



TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
TP. HỒ CHÍ MINH



UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

KỶ YẾU HỘI THẢO QUỐC TẾ VỀ DIDACTIC TOÁN LẦN THỨ 6

ACTES
DU SIXIEME COLLOQUE INTERNATIONAL
EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
(CIDMATH6)



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

280 An Dương Vương, Phường 4, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại: (028) 38 301 303 – Fax: (028) 39 381 382

Email: nxb@hcmup.edu.vn

Website: <http://nxb.hcmup.edu.vn>

Kỷ yếu

Hội thảo quốc tế về Didactic Toán lần thứ 6 Actes du sixième colloque international en didactique des mathématiques (CIDMath6) - CD

Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh

Chịu trách nhiệm xuất bản:

**Giám đốc
LÊ THANH HÀ**

Chịu trách nhiệm nội dung:

**Tổng biên tập
NGUYỄN KIM HỒNG**

Biên tập:

BÙI VĂN HẢI

Trình bày bìa:

VÕ HOÀNG PHÚC

Sửa bản in:

TĂNG MINH DŨNG

Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN: 978-604-947-988-5

In 120 bản (CD) tại Công ty TNHH MTV Dịch vụ Xuân Thủy; 213 Nguyễn Văn Cừ, Phường 4, Quận 5, TP.HCM; Số xác nhận đăng ký xuất bản: 2991-2017/CXBIPH/01-84/ĐHSPTPHCM; Quyết định xuất bản số: 412/QĐ-NXBĐHSPTPHCM ký ngày 15 tháng 09 năm 2017. In xong và nộp lưu chiểu năm 2017.



TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
TP. HỒ CHÍ MINH



UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Kỷ yếu

HỘI THẢO QUỐC TẾ VỀ DIDACTIC TOÁN LẦN THỨ 6

ACTES

**DU SIXIEME COLLOQUE INTERNATIONAL
EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
(CIDMATH6)**



**NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH**

Vinh danh PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu

Hội thảo quốc tế về Didactic Toán lần thứ 6 được tổ chức tiếp tục khẳng định sự phát triển, lớn mạnh của Didactic Toán tại Việt Nam, đánh dấu sự thành công của việc hợp tác giữa Đại học Sư phạm TPHCM và Đại học Joseph Fourier (nay là Đại học Grenoble Alpes). Hội thảo này cũng là dịp để vinh danh những đóng góp của PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu – một trong những người Việt Nam đầu tiên tiếp cận với Didactic Toán để rồi sau đó góp phần quan trọng vào việc phổ biến lĩnh vực khoa học này ở nước nhà.

Tiếp cận với Didactic Toán từ đầu thập niên 90 của thế kỷ trước, bảo vệ luận án Tiến sĩ ở Pháp vào năm 1997, trở về nước cô đã luôn cống hiến hết mình cho Didactic Toán và nền giáo dục Việt Nam. Năm 2001, cùng với sự nhiệt tình giúp đỡ của TSKH, Nhà giáo nhân dân Trần Văn Tấn, cô và đồng nghiệp đã xin mở thành công mã số đào tạo trình độ Thạc sĩ chuyên ngành Didactic Toán tại Trường Đại học Sư phạm TPHCM. Chính sự khởi đầu này đã tạo cơ hội cho hàng chục cán bộ, giảng viên của Đại học Sư phạm TPHCM, Đại học Giáo dục – Đại học quốc gia Hà Nội, các Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận, thành phố Hồ Chí Minh... tìm được học bổng sang Pháp học tập và làm nghiên cứu sinh để nhận bằng Tiến sĩ về Didactic Toán. Từ những hạt nhân này, Trường Đại học Sư phạm TPHCM trở thành một cơ sở đào tạo giáo viên có chất lượng tốt, từ trình độ cử nhân đến Thạc sĩ, Tiến sĩ chuyên ngành Didactic Toán.

Sau 16 năm cùng với các chuyên gia Pháp và đồng nghiệp Việt Nam đưa Didactic Toán về Trường Đại học Sư phạm TPHCM, cô đã góp phần quan trọng trong việc đào tạo ra hàng trăm Thạc sĩ, gần chục Tiến sĩ về Didactic Toán cho các Trường Đại học và THPT trong cả nước. Cô cũng luôn dành trọn tình yêu cho Didactic Toán với rất nhiều sách tham khảo và bài báo khoa học - đó là nguồn tài liệu tham khảo có giá trị cho các thế hệ học viên của chuyên ngành cũng như cho đội ngũ giảng viên ở các trường Sư phạm và giáo viên dạy Toán ở các trường phổ thông.

Để thay cho lời kết, chúng tôi mượn lời của một trong những người bạn Pháp (đã chung vai cùng cô và các đồng nghiệp Việt Nam trong sự nghiệp phát triển Didactic Toán) viết cho cô nhân dịp Hội thảo này : *“Chúng ta đã cùng nhau cày xới tại Pháp và Việt Nam những mảnh đất màu mỡ của ngành Didactic Toán. Khi mới bắt đầu, chúng ta đã biết rằng mảnh đất ấy màu mỡ vì lương tri nhân loại bao giờ cũng sống bằng sự truyền đạt kiến thức. Và mùa gặt đã bội thu, ở Việt Nam cũng như ở Pháp. Tại Việt Nam, trong sự bội thu đó hiển nhiên đã có công lao của chị rất nhiều, người đã không ngừng vun đắp cho mầm non và bảo vệ chúng”*.

Xin vinh danh và tri ân tất cả những công sức, những đóng góp của cô cho sự nghiệp giáo dục, cho ngành Didactic Toán.

Ban biên tập



BAN TỔ CHỨC

STT	HỌ VÀ TÊN	ĐƠN VỊ
1	Nguyễn Thị Minh Hồng	Phó hiệu trưởng, Đại học Sư phạm TP.HCM
2	Nguyễn Tiến Công	Trưởng Phòng Khoa học Công nghệ và Môi trường – Tạp chí Khoa học, Đại học Sư phạm TP.HCM
3	Nguyễn Anh Tuấn	Trưởng Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm TP.HCM
4	Dương Minh Thành	Trưởng Khoa Giáo dục Tiểu học, Đại học Sư phạm TP.HCM
5	Nguyễn Thị Nga	Phó Trưởng Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm TP.HCM
6	Trần Đức Thuận	Phó Trưởng Khoa Giáo dục Tiểu học, Đại học Sư phạm TP.HCM
7	Nguyễn Thị Yến Nam	Trưởng Phòng Kế hoạch Tài chính, Đại học Sư phạm TP.HCM
8	Huỳnh Công Ba	Trưởng Phòng Công tác Chính trị và Học sinh Sinh viên, Đại học Sư phạm TP.HCM
9	Dương Thị Hồng Hiếu	Trưởng Phòng Đào tạo, Đại học Sư phạm TP.HCM
10	Bùi Trần Quỳnh Ngọc	Phó Trưởng Phòng Sau Đại học, Đại học Sư phạm TP.HCM
11	Nguyễn Thị Tú	Trưởng Phòng Hợp tác Quốc tế, Đại học Sư phạm TP.HCM
12	Nguyễn Tuấn Đạt	Phó Trưởng Phòng Quản trị Thiết bị, Đại học Sư phạm TP.HCM
13	Phạm Chung Thủy	Phó Trưởng Phòng Tổ chức Hành chính, Đại học Sư phạm TP.HCM
14	Lê Thanh Hà	Giám đốc Nhà xuất bản Đại học Sư phạm TP.HCM
15	Nguyễn Vĩnh Khương	Phó Trưởng Phòng Khoa học Công nghệ và Môi trường – Tạp chí Khoa học, Đại học Sư phạm TP.HCM
16	Tăng Minh Dũng	Êkip Didactic Toán, Đại học Sư phạm TP.HCM
17	Vũ Như Thu Hương	Êkip Didactic Toán, Đại học Sư phạm TP.HCM

BAN KHOA HỌC

STT	HỌ VÀ TÊN	ĐƠN VỊ
1	Annie Bessot	Êkíp MeTAH, Viện nghiên cứu LIG, ĐH Grenoble Alpes, Cộng hòa Pháp
2	Hamid Chaachoua	Trưởng Êkíp MeTAH, Viện nghiên cứu LIG, ĐH Grenoble Alpes, Cộng hòa Pháp
3	Claude Comiti	Êkíp MeTAH, Viện nghiên cứu LIG, ĐH Grenoble Alpes, Cộng hòa Pháp
4	Lê Thị Hoài Châu	Êkíp Didactic Toán, Đại học Sư phạm TP.HCM
5	Dương Minh Thành	Trưởng Khoa Giáo dục Tiểu học, Đại học Sư phạm TP.HCM
6	Lê Thái Bảo Thiên Trung	Êkíp Didactic Toán, Đại học Sư phạm TP.HCM
7	Trần Vui	Trưởng Phòng Khoa học Công nghệ - Hợp tác quốc tế, Đại học Sư phạm Huế

TỔNG QUAN

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh cùng với Đại học Grenoble Alpes, đồng tổ chức Hội thảo quốc tế lần thứ sáu về Didactic Toán. Cũng như các hội thảo trước, đây là dịp để đội ngũ nghiên cứu và đào tạo đối chiếu các lý thuyết, trao đổi khoa học về lĩnh vực giảng dạy và học tập môn Toán. Hội thảo cũng là dịp để người tham dự cùng làm việc trên các kết quả nghiên cứu gần đây và có ý nghĩa về giáo dục trong Toán học.

Hội thảo sẽ phân thành ba tiểu ban, tập trung làm việc theo ba chủ đề :

Chủ đề 1. Lợi ích của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu didactic toán

Phân tích tri thức luận tìm cách làm rõ tiến trình hình thành và phát triển các khái niệm khoa học, hay nói một cách tổng quát hơn là nêu lên các đặc trưng của hoạt động khoa học. Một trong những đóng góp của phân tích tri thức luận là nó cho phép đặt câu hỏi về các tri thức có mặt trong giảng dạy. Các báo cáo trong chủ đề này sẽ trình bày những nghiên cứu cho thấy lợi ích mà phân tích tri thức luận đem lại cho việc hiểu các hiện tượng gặp trong dạy-học.

Chủ đề 2. Các nghiên cứu về giáo dục bậc tiểu học

Nghiên cứu việc giảng dạy ở bậc tiểu học là một vấn đề quan trọng của xã hội vì đó là cơ sở cho việc học tập trong tương lai. Mục tiêu của chủ đề này là giới thiệu một số công trình khác nhau về dạy học toán ở tiểu học. Chủ đề này cũng mở ra những vấn đề cần xem xét trong đào tạo giáo viên tiểu học và trong việc tích hợp công nghệ vào giảng dạy toán ở tiểu học.

Chủ đề 3. Phân tích thực hành dạy học của giáo viên

Phân tích thực hành dạy học của giáo viên trong các nghiên cứu didactic toán dẫn đến vấn đề mô hình hoá những thực hành này. Dựa trên lý thuyết tham chiếu nào? Quan sát nào cần được tiến hành? Đặc biệt, chúng tôi quan tâm đến việc giáo viên và học sinh sử dụng như thế nào các nguồn tư liệu cũng như các công nghệ giáo dục. Chủ đề này cũng dẫn đến những câu hỏi về vấn đề đào tạo giáo viên mà các phân tích thực hành giảng dạy đặt ra.

MỤC LỤC

BÁO CÁO TOÀN THỂ.....15

SỰ CẦN THIẾT CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN ĐỐI VỚI CÁC NGHIÊN CỨU VỀ HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC VÀ ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN 17

Lê Thị Hoài Châu

EVALUATION ET ANALYSE DIDACTIQUE DES MANUELS: CAS DU BRESIL..... 41

Marilena Bittar

ĐÁNH GIÁ VÀ PHÂN TÍCH SÁCH GIÁO KHOA TỪ CÁCH TIẾP CẬN CỦA DIDACTIC: TRƯỜNG HỢP BRA-XIN.....51

Marilena Bittar

TIỂU BAN 1: LỢI ÍCH CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN ĐỐI VỚI CÁC NGHIÊN CỨU DIDACTIC TOÁN.....61

QUELLES MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT PROFESSIONNEL? NÉCESSITÉ D'UNE ENQUÊTE ÉPISTÉMOLOGIQUE POUR DÉPASSER L'OPINION 63

Annie Bessot

LOẠI TOÁN NÀO CHO GIÁO DỤC CHUYÊN NGHIỆP? SỰ CẦN THIẾT CỦA KHẢO SÁT KHOA HỌC LUẬN ĐỂ VƯỢT QUA DƯ LUẬN 73

Annie Bessot

MỘT MÔ HÌNH KHOA HỌC LUẬN ĐỂ NGHIÊN CỨU VỊ TRÍ CỦA HÌNH HỌC “TÍNH TOÁN” Ở THPT NHƯ MỘT VẤN ĐỀ ĐẶT RA CHO VIỆC THIẾT KẾ CHƯƠNG TRÌNH.....83

Nguyễn Ngân Giang, Maggy Schneider

CÁC TÌNH HUỐNG TRANH LUẬN KHOA HỌC XOAY QUANH MỘT SỐ CHŨNG NGẠI TRI THỨC LUẬN CỦA KHÁI NIỆM GIỚI HẠN 93

Lê Thái Bảo Thiên Trung

XEM XÉT SỰ CHUYỂN HÓA SỰ PHẠM KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN Ở GIẢI TÍCH LỚP 12 TRONG SỰ GẮN KẾT VỚI DẠY HỌC VẬT LÝ.....103

Ngô Minh Đức

LỢI ÍCH CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN ĐỐI VỚI DẠY HỌC ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH: TRƯỜNG HỢP KHÔNG GIAN VECTƠ 113

Nguyễn Ái Quốc, Nguyễn Thị Thanh Thanh

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN TRONG DẠY HỌC ĐẠI SỐ CAO CẤP: TRƯỜNG HỢP NHÓM 125

Nguyễn Ái Quốc, Nguyễn Thị Vân Khánh

CÁC HƯỚNG TIẾP CẬN VÀ ÍCH LỢI CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN: TRƯỜNG HỢP NGHIÊN CỨU “BIỂU DIỄN PHỐI CẢNH” 137

Tăng Minh Dũng

MỘT KHẢO SÁT KHOA HỌC LUẬN VỀ SỰ MỞ RỘNG KHÁI NIỆM LŨY THỪA	147
<i>Trần Lương Công Khanh, Nguyễn Hữu Lợi</i>	
PHÁT TRIỂN KỸ NĂNG TOÁN HỌC CƠ BẢN LÀM NỀN TẢNG ĐÀO TẠO NGUỒN NHÂN LỰC TRẺ CHẤT LƯỢNG CAO Ở VIỆT NAM.....	155
<i>Trần Vui</i>	
MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP CỦA SINH VIÊN KHI TIẾP CẬN, VẬN DỤNG KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ GIẢI PHÁP	165
<i>Thái Trần Phương Thảo, Phạm Sỹ Nam</i>	
TIỂU BAN 2: CÁC NGHIÊN CỨU VỀ GIÁO DỤC BẬC TIỂU HỌC	167
L'OSTENSIF COMME UN FACTEUR DE CARACTÉRISATION DE LA TECHNIQUE: L'EXEMPLE DU CHAMP ADDITIF DANS DES MANUELS BRÉSILIENS	169
<i>Danielly Kaspary, Marilena Bittar</i>	
CÁC BIỂU ĐẠT ĐÓNG VAI TRÒ NHÂN TỐ ĐẶC TRƯNG CHO KỸ THUẬT: VÍ DỤ VỀ TRƯỜNG CỘNG TÍNH TRONG SÁCH GIÁO KHOA BRAZIN	175
<i>Danielly Kaspary, Marilena Bittar</i>	
PRAXÉOLOGIE DE RÉFÉRENCE DE L'ASPECT DÉCIMAL POUR LE TYPE DE TÂCHES « DÉNOMBRER UNE COLLECTION » SELON LE DÉLE T4TEL.....	183
<i>Yasmina Chaachoua</i>	
PRAXÉOLOGIE THAM CHIẾU VỀ PHƯƠNG DIỆN THẬP PHẦN TRONG KIỂU NHIỆM VỤ ĐẾM MỘT TẬP HỢP THEO MÔ HÌNH T4TEL.....	193
<i>Yasmina Chaachoua</i>	
MÔ PHỎNG PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN BẰNG PHẦN MỀM EXCEL VÀ R TRONG DẠY HỌC XÁC SUẤT Ở LỚP 11	203
<i>Bùi Anh Kiệt, Nguyễn Chí Thành</i>	
VẬN DỤNG LÝ THUYẾT TÌNH HUỐNG TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM DIỆN TÍCH Ở TIỂU HỌC	215
<i>Bùi Quang Thịnh, Ngô Thị Mỹ Phượng</i>	
GIẢI BÀI TOÁN HERON VỀ TIA SÁNG VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA PHẦN MỀM ĐỘNG GEOGEBRA: CÁC KẾT QUẢ TỪ THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM	225
<i>Lê Viết Minh Triết, Nguyễn Phú Lộc</i>	
KHÁI NIỆM TỈ SỐ PHẦN TRĂM TRONG SÁCH GIÁO KHOA TOÁN TIỂU HỌC VIỆT NAM VÀ SINGAPORE	235
<i>Ngô Trúc Phương</i>	
MỘT SỐ BÀN LUẬN VỀ DẠY HỌC TOÁN VÀ VẤN ĐỀ KẾT NỐI TOÁN HỌC VỚI THỰC TIỄN TRONG DẠY HỌC TOÁN	245
<i>Nguyễn Tiến Trung, Hoàng Ngọc Anh, Nguyễn Mạnh Tuấn</i>	

KỸ NĂNG ĐẶT CÂU HỎI CHO HỌC SINH TIỂU HỌC	259
<i>Phạm Sỹ Nam, Phạm Thị Thanh Tú</i>	
KHÁI NIỆM THỂ TÍCH TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC: MỘT NGHIÊN CỨU VỀ SỰ LỰA CHỌN CỦA THỂ CHẾ VÀ ẢNH HƯỞNG CỦA NÓ.....	269
<i>Trần Đức Thuận</i>	
MÔ HÌNH VÀ SỰ XUẤT HIỆN CỦA MÔ HÌNH TRONG SÁCH GIÁO KHOA TOÁN TIỂU HỌC Ở VIỆT NAM	279
<i>Trịnh Duy Trọng</i>	
PHÂN TÍCH VÀ ĐỀ XUẤT ĐIỀU CHỈNH, BỔ SUNG HỆ THỐNG CÂU HỎI, BÀI TẬP MÔN TOÁN Ở TIỂU HỌC THEO HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC NGƯỜI HỌC	289
<i>Vũ Quốc Chung, Nguyễn Hữu Tuyến</i>	
MÔI TRƯỜNG TIN HỌC CÓ TẠO THUẬN LỢI CHO DẠY HỌC TÍCH HỢP ? HAI TRƯỜNG HỢP ĐƯỢC NGHIÊN CỨU	299
<i>Vũ Như Thư Hương</i>	
TIỂU BAN 3: PHÂN TÍCH THỰC HÀNH DẠY HỌC CỦA GIÁO VIÊN....	309
ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES, PROBLEMES DE LA PROFESSION ET FORMATION DES ENSEIGNANTS	311
<i>Claude Comiti</i>	
PHÂN TÍCH THỰC HÀNH DẠY HỌC, VẤN ĐỀ NGHỀ NGHIỆP VÀ ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN.....	321
<i>Claude Comiti</i>	
ANALYSE D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE VISANT À SENSIBILISER LES ÉLÈVES DE PREMIÈRE S AU CONCEPT DE LIMITE D'UNE SUITE.....	331
<i>Patrick Gibel</i>	
PHÂN TÍCH MỘT TÌNH HUỐNG DẠY HỌC NHẪM NÂNG CAO NHẬN THỨC VỀ KHÁI NIỆM GIỚI HẠN DẪY SỐ CỦA HỌC SINH LỚP 11 BAN KHOA HỌC	343
<i>Patrick Gibel</i>	
ADAPTATION DE JQUIZ POUR L'AUTO-APPRENTISSAGE INTERACTIF DE LA CHIMIE UNE EXPÉRIMENTATION À LA FACULTÉ DÉ SCIENCES DE L'ÉDUCATION DU LAOS.....	355
<i>Xaya Chemcheng</i>	
THÍCH ỨNG JQUIZ TRONG TỰ HỌC TƯƠNG TÁC Ở MÔN HOÁ HỌC: THỰC NGHIỆM TẠI KHOA KHOA HỌC GIÁO DỤC, ĐẠI HỌC QUỐC GIA LÀO	363
<i>Xaya Chemcheng</i>	

MỘT SỐ NHÂN TỐ ẢNH HƯỞNG TỚI SỰ LỰA CHỌN SỰ PHẠM CỦA GIÁO VIÊN TRONG THỰC HÀNH DẠY HỌC KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM....	371
<i>Bùi Thị Thanh Mai</i>	
HƯỚNG DẪN SINH VIÊN KHAI THÁC BÀI TẬP TOÁN.....	381
<i>Đào Thị Hoa</i>	
MỘT NGHIÊN CỨU VỀ VẬN DỤNG QUY TRÌNH NGHIÊN CỨU BÀI HỌC TRONG VIỆC PHÁT TRIỂN NGHIỆP VỤ SỰ PHẠM CHO GIÁO VIÊN	391
<i>Hoa Ánh Tường, Nguyễn Hữu Hậu</i>	
VỀ “THIẾT KẾ CÁC HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC” QUA SÁCH GIÁO KHOA TOÁN LỚP 10 Ở VIỆT NAM VÀ Ở PHÁP	403
<i>Nguyễn Thành Long</i>	
SỐ PHỨC TRONG MỐI LIÊN HỆ LIÊN MÔN TOÁN – VẬT LÝ: PHÂN TÍCH THỰC HÀNH DẠY HỌC CỦA GIÁO VIÊN TOÁN VÀ VẬT LÝ Ở TRƯỜNG THPT	413
<i>Nguyễn Thị Nga</i>	
CÁC YẾU TỐ VÀ KỸ NĂNG ĐỂ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN	423
<i>Phạm Sỹ Nam, Phan Anh Tài, Nguyễn Văn Thuận, Phạm Thị Thanh Tú</i>	
POSTER.....	433
CẢI THIẾN VIỆC DẠY VÀ HỌC KHÁI NIỆM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẰNG PHẦN MỀM GRAPH.....	435
<i>Trần Lương Công Khanh</i>	
TIẾP CẬN CDIO TRONG DẠY HỌC XÁC SUẤT – THỐNG KÊ THEO HƯỚNG RÈN LUYỆN KỸ NĂNG NGHỀ NGHIỆP CHO SINH VIÊN KINH TẾ Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC LẠC HỒNG.....	441
<i>Trần Văn Hoan</i>	
SỰ PHỐI HỢP GIỮA SUY LUẬN QUY NẠP VÀ SUY DIỄN TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ.....	447
<i>Vương Vĩnh Phát</i>	
XÂY DỰNG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LỜI VĂN NHẪM PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TOÁN VÀ KỸ NĂNG SỐNG CỦA HỌC SINH TIỂU HỌC	453
<i>Nguyễn Văn Hồng</i>	

BÁO CÁO TOÀN THỂ

**SỰ CẦN THIẾT CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN
ĐỐI VỚI CÁC NGHIÊN CỨU
VỀ HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC VÀ ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN**

Lê Thị Hoài Châu

**ĐÁNH GIÁ VÀ PHÂN TÍCH SÁCH GIÁO KHOA
TỪ CÁCH TIẾP CẬN CỦA DIDACTIC:
TRƯỜNG HỢP BRA-XIN**

Marilena Bittar

SỰ CẦN THIẾT CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN ĐỐI VỚI CÁC NGHIÊN CỨU VỀ HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC VÀ ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN

*Lê Thị Hoài Châu**

Tóm tắt

Với bài viết này chúng tôi sẽ chỉ ra sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học toán cũng như đối với công tác đào tạo giáo viên.

Trong phần đầu của bài viết chúng tôi sẽ làm rõ lợi ích của phân tích tri thức luận thông qua câu trả lời mà nó mang lại cho những câu hỏi: Đây là nghĩa của tri thức đang bàn đến? Sự lựa chọn của thể chế đối với tri thức ấy có thỏa đáng hay không? Tình huống cơ sở nào có thể lấy làm điểm tựa cho việc tổ chức hay phân tích các hoạt động dạy học tri thức? Quan niệm nào có thể gắn với tri thức? Chương ngại nào học sinh phải đương đầu để có thể hiểu và sử dụng được tri thức ấy? Đây là những yếu tố không thể bỏ qua khi tổ chức việc học tập.

Trong phần thứ hai, thông qua vài ví dụ quan sát được từ thực tiễn giảng dạy, chúng tôi sẽ chỉ ra những lỗ hổng trong công tác đào tạo giáo viên, sinh ra từ việc không tính đến các yếu tố tri thức luận.

Từ khóa: tri thức luận, chuyển hóa sư phạm, nghĩa của tri thức, chương ngại.

Résumé

Par cette communication, nous montrerons la nécessité d'une étude épistémologique aussi bien pour les recherches portant sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques que pour la formation des enseignants.

Dans la première partie, nous essaierons de mettre en évidence l'intérêt de l'analyse épistémologique pour les réponses qu'elle peut apporter aux questions suivantes: quelles sont les significations du savoir? Les choix institutionnels pour un savoir à enseigner sont-ils pertinents? Quelles sont les situations fondamentales sur lesquelles on peut se baser pour organiser un enseignement/apprentissage? Quels sont les obstacles que doivent rencontrer et surmonter les élèves? Quelles conceptions sont attachées au savoir en jeu? Les éléments de réponse à ces questions sont des éléments indispensables pour l'organisation d'un apprentissage.

Dans une deuxième partie, nous analyserons, à travers des exemples de la pratique professionnelle, des lacunes d'une formation qui ne prend pas en compte les éléments épistémologiques du savoir.

Mots-clés: Épistémologie, transposition didactique, sens du savoir, obstacle.

1. Về thuật ngữ “nghiên cứu tri thức luận”

Đứng trước tri thức cần dạy, nếu như một số nhà nghiên cứu và giáo viên chỉ quan tâm tới việc tìm phương pháp dạy học được xem là có hiệu quả - thậm chí ngay cả khi tiêu chuẩn cho phép khẳng định tính hiệu quả này vẫn còn chưa được xác định rõ ràng, thì cộng đồng didactic thừa nhận sự cần thiết của nghiên cứu tri thức luận. Quan điểm ấy bắt nguồn từ đâu? Thông qua bài viết này, chúng tôi sẽ cố gắng trả lời cho câu hỏi đó. Nhưng trước hết cần phải làm rõ nghĩa của từ *nghiên cứu tri thức luận*.

* PGS.TS, Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Nghiên cứu tri thức luận

“*Nghiên cứu (hay phân tích) tri thức luận*” được chúng tôi sử dụng theo nghĩa của các thuật ngữ *étude épistémologique*, *analyse épistémologique* trong tiếng Pháp, nên cần phải trở về với định nghĩa của từ gốc để hiểu rõ nội hàm khái niệm.

Trong tiếng Pháp, *épistémologique* là tính từ của danh từ *épistémologie*. Thuật ngữ *épistémologie* chỉ mới xuất hiện ở thế kỷ 19, được cấu tạo từ hai gốc Hy Lạp *épistème* - khoa học và *logo* - nghiên cứu về. Trong *Vocabulaire technique et critique de la Philosophie* của Lalande (cuối thế kỷ 20), ta tìm thấy định nghĩa sau đây:

“Từ này chỉ triết học của các khoa học nhưng với nghĩa rõ hơn một chút. Nó không phải là một nghiên cứu về các phương pháp khoa học [...]. Nó cũng không phải là một sự tổng hợp hay tiên đoán về các luật khoa học. [...] Về cơ bản, nó là một nghiên cứu mang tính phê phán những nguyên lý, những giả thuyết và những kết quả của các khoa học khác nhau, nhằm xác định nguồn gốc logic (chứ không phải là nguồn gốc tâm lý), giá trị và ảnh hưởng khách quan của chúng.”

Trong một cách viết ngắn gọn hơn, cuốn từ điển *Petit Larousse* xuất bản năm 1973 thu hẹp *épistémologie* ở nghĩa “*nghiên cứu các khoa học, nhằm mục đích đánh giá giá trị của chúng đối với trí tuệ nhân loại*”. Như thế, thoát đầu thì *épistémologie* đã xuất hiện như là một bộ phận của Triết học các khoa học (*Philosophie des sciences*). Cụ thể hơn, Dorier (1997) giải thích rằng *épistémologie* chỉ giới hạn ở mục đích thứ nhất trong hai mục đích nghiên cứu sau đây của Triết học các khoa học:

- vạch rõ đặc trưng của tri thức (nhà bác học nói về cái gì, và nói như thế nào về cái đó?)
- xác định tính hợp thức của tri thức (chân lý khoa học là gì? có chân lý khoa học với điều kiện nào? có thể nói về chân lý khoa học trong những giới hạn nào?).

Tuy nhiên, Dorier cũng cho thấy là về sau này thì nhiều trào lưu nghiên cứu khác nhau liên quan đến *épistémologie* đã được phát triển, dẫn đến việc mở rộng nghĩa của từ, nhất là trong những lĩnh vực có gắn bó chặt chẽ với nó như *Lịch sử các khoa học* và *Khoa học nhận thức*. Đặc biệt, ngày nay không hiếm khi người ta thấy thuật ngữ *épistémologie* ở Pháp còn được dùng để chỉ *Lý thuyết về các phương pháp* hay *Cơ sở của kiến thức*, tức là lấy nghĩa của *epistemology* trong tiếng Anh. Với những cách hiểu trên về *épistémologie*, chúng tôi chuyển ngữ từ này sang tiếng Việt là *khoa học luận*.

Thừa nhận rằng mọi nghiên cứu về các hoạt động dạy học một tri thức luôn luôn phải dựa trên pha tìm hiểu quá trình xây dựng và phát triển tri thức đang bàn đến trong những thể chế khác nhau, Didactic¹ toán giữ mối quan hệ khăng khít với *épistémologie*. Việc thuật ngữ *épistémologie* được mở rộng nghĩa và được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau làm nảy sinh nhu cầu thống nhất cách hiểu về nó trong cộng đồng các nhà nghiên cứu didactic. Về điều này, Dorier viết:

“Chúng tôi quan tâm đến *épistémologie* chủ yếu ở chỗ nó giúp hiểu rõ hơn mối liên hệ giữa việc xây dựng tri thức trong cộng đồng các nhà bác học với việc dạy và học tri thức này.

Chính là theo cách hiểu này mà chúng tôi cho rằng tốt hơn là hãy đưa ra một định nghĩa cho tính từ *épistémologique*. [...] Chúng tôi đề nghị định nghĩa sau: *étude*

¹ Chúng tôi sẽ làm rõ thuật ngữ Didactic trong phần kết luận của bài báo này.

épistémologique nghiên cứu những điều kiện cho phép nảy sinh tri thức (đối với chúng tôi là tri thức toán học), quan tâm đến sự tiến triển của các tri thức hay kiến thức. Ở đây thuật ngữ tiến triển được hiểu theo nghĩa rộng nhất: nó có thể liên quan đến sự biến đổi tình trạng kiến thức của một hệ thống, một thể chế hay một cá thể. Hơn thế, nó chú ý không chỉ đến những tư tưởng tiến bộ mà còn đến cả những trì trệ, những bước lùi.” (Dorier, 1997, tr.17).

Thuật ngữ *nghiên cứu* (hay *phân tích*) *tri thức luận* được chúng tôi chuyển ngữ từ *étude épistémologique, analyse épistémologique* với cách hiểu trên. Một cách cụ thể hơn, nghiên cứu tri thức luận là nghiên cứu lịch sử hình thành tri thức nhằm làm rõ:

- nghĩa của tri thức, những bài toán, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết;
- những trở ngại cho sự hình thành tri thức;
- những điều kiện sản sinh ra tri thức, những bước nhảy cần thiết trong quan niệm để thúc đẩy quá trình hình thành và phát triển tri thức.

Phân biệt nghiên cứu tri thức luận và nghiên cứu lịch sử

Với định nghĩa trên, nghiên cứu tri thức luận phải dựa trên những dữ liệu về lịch sử hình thành tri thức. Vậy nó có khác nghiên cứu lịch sử không?

Thoạt nhìn, có thể cho rằng Lịch sử các khoa học chỉ giới hạn ở việc liệt kê các sự kiện khoa học, cùng lắm là vạch ra những triển vọng thông qua tư tưởng tổng quát ở từng thời đại. Nhưng cách nhìn này quá hạn hẹp, như Dorier đã nhấn mạnh:

“Lịch sử của một khoa học không phải là bộ sưu tập đơn giản các tiểu sử, lại càng không phải là bảng niên đại được tô điểm bởi những giai thoại. Nó phải là lịch sử của sự hình thành, sự biến dạng, sự chỉnh lý các khái niệm khoa học. Nghiên cứu lịch sử một khoa học không đơn giản chỉ là mô tả các sự kiện, mà còn phải xem xét tính gắn bó nội tại chặt chẽ thể hiện qua những khái niệm, những vấn đề đưa lại nghĩa cho khoa học đó.” (Dorier, 1997, tr. 10).

Theo quan niệm này thì lịch sử một khoa học không thể tách rời khỏi những câu hỏi về mặt tri thức luận. Tuy nhiên, nghiên cứu tri thức luận và nghiên cứu lịch sử một khoa học không đồng nhất với nhau. Bachelard phân biệt hai đối tượng này qua ý kiến sau:

“Nhà lịch sử xem các tư tưởng như là những sự kiện. Người phân tích tri thức luận thì lại nắm lấy các sự kiện như là những tư tưởng bằng cách lồng chúng vào trong một hệ thống tư duy.

Lo lắng về tính khách quan, nhà lịch sử ghi vào danh mục mọi tư liệu, không đi đến chỗ đo những biến đổi nhận thức khi giải thích cho một văn bản. Thực ra thì ở cùng một thời đại, dưới cùng một từ, có thể có những khái niệm khác nhau biết bao nhiêu. [...] Người nghiên cứu tri thức luận phải cố gắng nắm bắt khái niệm khoa học trong quá trình tiến triển, bằng cách thiết lập các bậc thang quan niệm về mỗi khái niệm, chỉ rõ nó được hình thành như thế nào và có liên hệ ra sao với những khái niệm khác.

Một sự kiện được hiểu không đúng ở một thời đại chỉ là một sự kiện đối với nhà lịch sử, nhưng lại có thể là một chướng ngại hay một ý tưởng đối lập theo cách nhìn của người phân tích tri thức luận. Khi một tư tưởng khoa học xuất hiện như là khó khăn đã được khắc phục thì cũng có nghĩa là một chướng ngại đã được vượt qua.” (Bachelard, 1938, tr. 17-18).

Phân tích tri thức luận lịch sử một tri thức là một phân tích quá khứ để khám phá những mò mẫm, những lệch lạc, những chướng ngại khác nhau, những điều kiện cho phép xuất hiện các khái niệm khoa học mới. Trong phân tích tri thức luận lịch sử, điều kiện cho sự nảy sinh một phát minh cũng quan trọng không kém bản thân phát minh đó. Phân tích này giúp ta hiểu đầy đủ hơn sự tiến triển của tri thức, từ đó hiểu rõ hơn các hiện tượng dạy học tri thức đang bàn đến.

2. Sự cần thiết của nghiên cứu tri thức luận

2.1. Chuyển hóa sự phạm và đóng góp của nghiên cứu tri thức luận

2.1.1. Chuyển hoá sự phạm (*transposition didactique*)

Didactic Toán quan tâm đến mối quan hệ giữa giáo viên và học sinh chỉ khi nào trong họ có một bên muốn dạy và bên kia muốn học một tri thức xác định. Nói cách khác, hệ thống tối thiểu được nghiên cứu ở đây là tam giác tạo thành từ ba cực *giáo viên - học sinh - tri thức*. Trong ba cực đó, Didactic Toán khẳng định chính tri thức (chứ không phải giáo viên hay học sinh) là cực đầu tiên cần nghiên cứu. Quan điểm này được hình thành từ sự thừa nhận rằng tri thức cần dạy (theo quy định của chương trình) không bao giờ là bản sao trung thành của tri thức bác học. Mỗi tri thức đều phải gắn liền với một thể chế nào đó, không có những tri thức tồn tại “lơ lửng” trong xã hội rộng. Mỗi tri thức như một sinh vật sống, sinh ra ở một thời điểm xác định, có mối quan hệ với những đối tượng khác cũng tồn tại trong thể chế, có “cuộc sống” của nó trong thể chế. Thế nhưng, mỗi thể chế luôn được vận hành trong những điều kiện nhất định, nên để sống và phát triển trong thể chế thì tri thức phải tuân theo các ràng buộc của thể chế, dẫn đến chỗ nó phải bị biến đổi. Như vậy thì một tri thức có thể sống trong những thể chế khác nhau, với những dạng thức không hoàn toàn giống nhau. Quan điểm này dẫn đến việc phân biệt nhiều kiểu thao tác liên quan đến tri thức:

- tạo ra tri thức,
- sử dụng tri thức,
- dạy học tri thức,
- chuyển hóa tri thức (từ thể chế này sang thể chế kia).

Quá trình chuyển hóa tri thức từ thể chế này sang thể chế kia được Chevallard gọi là “chuyển hóa sự phạm” nếu thể chế đích là một thể chế dạy học. Trong quá trình này phải kể đến ba mắt xích cơ bản: tạo ra đối tượng tri thức, chuyển một đối tượng tri thức thành đối tượng dạy học, rồi chuyển đối tượng dạy học thành đối tượng được dạy.

Mắt xích thứ nhất: Đối tượng tri thức (do thể chế tạo ra và “bảo quản” tri thức thực hiện)

Sự ra đời của một “đối tượng tri thức” - còn gọi là “tri thức bác học”, là kết quả của một hoạt động khoa học. Hoạt động này gắn liền với lịch sử cá nhân nhà nghiên cứu. Nhà nghiên cứu đứng trước một vấn đề cần giải quyết. Để giải quyết nó, ông ta phải khám phá ra những phương pháp, những kiến thức. Một số trong những kiến thức (cá nhân) này được nhà nghiên cứu nhận thấy là đủ mới, đủ hay, có thể thông báo cho cộng đồng khoa học, biến nó thành kiến thức chung. Để thông báo, nhà nghiên cứu tạo cho những kiến thức này một dạng khái quát nhất có thể được, theo quy tắc suy lý logic

đang lưu hành trong cộng đồng khoa học. Như vậy, để tồn tại trong cộng đồng, “tri thức bác học” đã phải trải qua một sự soạn thảo của nhà nghiên cứu:

“Để thông báo cho cộng đồng cái mà nhà nghiên cứu nghĩ rằng mình đã phát minh, ông ta phải biến đổi nó:

- Trước hết, nhà nghiên cứu xóa đi thời kỳ khai thủy của nghiên cứu: những suy nghĩ vô ích, những sai lầm, những đường vòng lắt léo, rất dài, thậm chí dẫn đến ngõ cụt. Nhà nghiên cứu cũng bỏ đi tất cả những gì liên quan đến động cơ cá nhân hay nền tảng hệ tư tưởng của khoa học theo nhận thức của mình. Chúng tôi dùng từ phi cá nhân hóa để chỉ hoạt động xóa bỏ này.

- Nhà nghiên cứu cũng xóa đi lịch sử trước đó đã dẫn mình đến với kiến thức mới (những mò mẫm, những con đường sai lầm), có khi còn tách nó ra khỏi bài toán đặc biệt mà lúc đầu mình muốn giải quyết và tìm một bối cảnh tổng quát nhất sao cho trong đó kết quả vẫn đúng. Chúng tôi gọi việc làm này là phi hoàn cảnh hóa.” (Arsac, 1989).

Hệ quả tích cực của hoạt động phi cá nhân hóa và phi hoàn cảnh hóa: làm cho kiến thức trở thành tri thức chung, có thể sử dụng và kiểm tra bởi bất cứ ai, ít nhất là cũng bởi các thành viên của cộng đồng khoa học. Nhưng hoạt động này cũng có *hệ quả tiêu cực* ở chỗ làm biến mất đi một phần hay toàn bộ bối cảnh của phát minh, làm cho phát minh trở thành bí ẩn và bị tước mất nghĩa.

Việc mất nghĩa này không tồn tại đối với những nhà nghiên cứu cùng thời và cùng lĩnh vực với tác giả của phát minh, vì họ được tiếp xúc với vấn đề mà nhà nghiên cứu muốn giải quyết qua các kênh truyền thông khác, họ biết vị trí chính xác của phát minh trong mạng lưới những vấn đề gần gũi với nhau. Nhưng đối với các thế hệ sau thì vấn đề làm nảy sinh tri thức đã bị che dấu.

Mất xích thứ hai: Đối tượng tri thức → đối tượng dạy học (do noosphere thực hiện)

Không phải thầy giáo là người trực tiếp biến đổi một tri thức bác học thành đối tượng dạy học theo sáng kiến riêng của mình.

Hệ thống dạy học là một hệ thống mở, nghĩa là nó có những mối liên hệ với môi trường xã hội (phụ huynh học sinh, nhà nghiên cứu, các thể chế sử dụng), và hoạt động của nó phải tương hợp với môi trường này. Chevallard đã mượn từ *noosphere* để chỉ tập hợp những nơi, những thời điểm xảy ra sự trao đổi giữa hệ thống dạy học với môi trường của nó. Noosphere hoạt động

“như hậu trường của hệ thống dạy học, và thực sự như là cái sàng mà qua đó xảy ra sự tác động qua lại giữa hệ thống này với môi trường xã hội. [...] Để hệ thống tồn tại, nghĩa là để việc dạy học có thể thực hiện được, thì vấn đề đầu tiên cần phải giải quyết là vấn đề tương hợp của hệ thống với môi trường của nó” (Chevallard, 1985).

Để có thể trở thành đối tượng dạy học, tri thức phải chịu một số ràng buộc nào đó. Chẳng hạn, Chevallard đã đưa ra danh sách sau để nói về những ràng buộc đó:

- phải đảm bảo tính đơn nhất của tri thức (có nghĩa là phải vạch được ranh giới giữa tri thức đang bàn đến với những tri thức bộ phận có liên quan),
- phải đảm bảo tính phi cá nhân hóa của tri thức (có nghĩa là tri thức phải được phân tách khỏi cá nhân),
- phải đảm bảo tính công khai của tri thức (nghĩa là phải xác định được tường minh nội hàm và ngoại diên của nó),

- phải chương trình hóa việc tiếp thu tri thức (nghĩa là phải lập chương trình cho việc dạy và kiểm tra việc học tri thức).

Dưới đây ta xem xét hai kiểu hoạt động quan trọng của Noosphere nhằm làm cho tri thức đưa vào giảng dạy trong nhà trường đáp ứng được những ràng buộc nói trên.

Kiểu hoạt động thứ nhất: Trong những tri thức toán học được tích lũy qua lịch sử, các nhà lập chương trình chọn ra một số vấn đề làm *đối tượng dạy học*. Nhiều yếu tố ảnh hưởng đến sự lựa chọn này (kiểu xã hội, kiểu tổ chức hành chính, tình trạng của hệ thống giáo dục, trình độ phát triển công nghệ, việc đào tạo giáo viên, v.v. ...). Sau khi đối tượng dạy học đã được chỉ ra, các nhà lập chương trình phải quay trở về với hệ thống giáo dục, tổ chức chúng theo một trình tự nối khớp hợp logic, đảm bảo tính gắn kết giữa các thành phần, theo những mục tiêu xác định. Việc tổ chức lại đó khiến tri thức có thể bị biến đổi.

Kiểu hoạt động thứ hai: Theo chương trình quy định, các nhà viết sách giáo khoa tìm cách trình bày lại những tri thức được chọn. Việc phải chia cắt tri thức thành từng “lát” để có thể tuần tự dạy được cho một bộ phận công chúng xác định, và việc chiếm lĩnh tri thức này phải được đánh giá qua một số khả năng nào đó - đã được thu hẹp cho phù hợp với đối tượng dạy học, là những ràng buộc đè nặng lên hoạt động soạn thảo sách giáo khoa. Để cho các tri thức lập thành một tập hợp gắn kết và người học có thể lĩnh hội được, nhiều khi tác giả phải viết lại các định nghĩa, các tính chất, biến đổi các phép chứng minh, tạo ra một sự nối khớp khác. Tác giả cũng có thể bị dẫn đến chỗ sáng tạo ra một số đối tượng mới. Hệ quả kéo theo là nhiều khi có một sự chênh lệch khá lớn giữa tri thức bác học với tri thức xuất hiện trong chương trình và sách giáo khoa. Đặc biệt, lý do nảy sinh tri thức nhiều khi đã bị che dấu.

Mắt xích thứ ba: tri thức cần dạy → tri thức được dạy

Chính ở bước này mà giáo viên can thiệp: sự chuyển hóa sự phạm được tiếp tục trong lòng hệ thống dạy học. Chúng tôi sẽ trở lại với mắt xích này ở phần sau.

2.1.2. Hạn chế của một nghiên cứu chỉ đóng khung trong nội tại hệ thống dạy học

Phần lớn những tri thức toán học giảng dạy trong nhà trường đều ra đời muộn nhất là đầu thế kỷ 20. Ngoài hệ thống dạy học, những tri thức này tồn tại như là *công cụ* cơ sở đối với người làm toán chuyên nghiệp, hay như là kỹ năng trong các thể chế sử dụng toán học, không còn được quan tâm với tư cách một *đối tượng* nữa. Trong bối cảnh này, tri thức tồn tại ở những dạng khác nhau và đã bị thuần hóa, bị biến đổi so với nguồn gốc ban đầu của nó. Những vấn đề mà nó cho phép giải quyết đã bị lãng quên. Nó có thể được trao một chức năng hoàn toàn mới, là cơ sở cho sự hình thành những tri thức khác phức tạp hơn sinh ra từ thể chế sử dụng nó.

Hơn thế, những biến đổi mà tri thức phải chịu để trở thành đối tượng giảng dạy “*rất ít khi xuất phát từ một lý do về mặt tri thức luận gắn liền với sự sản sinh ra tri thức, mà thường chỉ là giải pháp tình huống, chủ yếu do tuân theo các ràng buộc nội tại của thể chế dạy học*” (Dorier, 1997, tr.21).

Tất nhiên, tri thức chương trình và sách giáo khoa đã được hình thành trên cơ sở lấy tri thức bác học làm tham chiếu. Nhưng vẫn còn một số điểm tối trong mối liên hệ giữa tri thức bác học với tri thức được dạy. Vì thiếu những hiểu biết về lịch sử của tri

thức, nhà nghiên cứu hay giáo viên không được tiếp xúc tận gốc quá trình biến đổi một tri thức thành đối tượng dạy học, chỉ hình dung được những giai đoạn gần gũi nhất.

Ví dụ 1: Câu hỏi sau² đã được chúng tôi đặt ra cho nhiều khoá đào tạo giáo viên bậc đại học và bậc thạc sỹ ở các trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Cần Thơ, Đại học Sài Gòn:

Trong các cách viết sau, cách nào biểu diễn một số thập phân?

0,66; $\frac{1}{3}$; 0,6666; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{9}$; 3; $\frac{21}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{4}$; 3,14; 15,00; 5,7418; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{100}$; 30,06;

$\sqrt{\frac{4}{4}}$; 0,3; $\sqrt{8}$; $\frac{15}{75}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{1,3}{1,7}$; $\frac{\sqrt{2}}{100}$.

Dưới đây là những câu trả lời được chúng tôi nhóm lại theo cách hiểu của người trả lời về số thập phân:

- 1) Các số 0,66; 0,6666; 3,14; 5,7418; 30,06; 0,3 (số thập phân là số có hai phần ngăn cách nhau bởi dấu phẩy; số nguyên không phải là số thập phân).
- 2) 6 số trên, thêm số 3 và 15,00 (số nguyên cũng là số thập phân).
- 3) Tất cả, trừ $\sqrt{2}$; $\sqrt{8}$ và $\frac{\sqrt{2}}{100}$ (không viết được ở dạng phân số).
- 4) Tất cả.

Câu trả lời 1) và 2) đến từ quan niệm cho rằng số thập phân là số có hai phần, được ngăn cách với nhau bởi dấu phẩy. Câu trả lời số 3 đồng nhất số thập phân với số hữu tỷ. Trong thực tế, chúng tôi còn gặp một câu trả lời là biến thể của nó, đến từ cùng quan niệm, nhưng thêm vào đó là không chấp nhận $\frac{1,3}{1,7}$ biểu diễn một phân số (số hữu tỷ). Câu trả lời cuối cùng thì lại đồng nhất số thập phân với số thực.

Sau khi học viên đưa ra câu trả lời, chúng tôi yêu cầu họ xem xét tính đúng sai của mỗi ý kiến bằng cách cho biết *số thập phân là gì?* Dưới đây là những trích dẫn được họ lấy ra từ các sách giáo khoa toán dùng ở trường phổ thông.

Sách giáo khoa Toán 5:

“Các phân số thập phân $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,... được viết thành 0,1; 0,01; [...] Các số 0,1; 0,01; 0,001 gọi là các số thập phân.” (Toán 5, tr.33).

“Mỗi số thập phân gồm hai phần, phần nguyên và phần thập phân, chúng được phân cách bởi dấu phẩy.” (Toán 5, tr.36).

Câu thứ hai được viết đậm bằng chữ màu xanh trong sách giáo khoa. Như vậy, sách giáo khoa Toán 5 không đưa ra một định nghĩa tường minh nào, mà lại nhấn mạnh cách viết số thập phân.

Sách giáo khoa Toán 7, trong “*Chương 1 – Số hữu tỉ, số thực*” có bài “*Số thập phân hữu hạn, số thập phân vô hạn tuần hoàn*”, trong đó mệnh đề sau được in nghiêng và đóng khung:

² Lấy từ bộ câu hỏi về số thập phân đã được Robert Neyret (1995) đặt ra cho một số giáo sinh ở Pháp.

“Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.” (Toán 7, Tập 1, tr.34).

Tiếp sau đó, khi nghiên cứu số vô tỉ qua một tình huống hình học, sách giáo khoa đưa vào số x thỏa mãn đẳng thức $x^2=2$ và nói:

“Người ta chứng minh được rằng không có số hữu tỉ nào mà bình phương bằng 2 và đã tính được $x = 1,4142135623730950488016887\dots$. Số này là một số thập phân vô hạn mà ở phần thập phân của nó không có một chu kỳ nào cả. Đó là một số *thập phân vô hạn không tuần hoàn*. Ta gọi những số như vậy là *số vô tỉ*.” (Toán 7, Tập 1, tr.40).

Nếu đối chiếu với khái niệm số thập phân định nghĩa trong các từ điển toán học, ta thấy sự chênh lệch lớn biết bao nhiêu giữa tri thức bác học với tri thức trình bày trong sách giáo khoa (ở đó số thập phân cũng có thể có vô hạn chữ số ở phần thập phân). Và những câu trả lời trên cũng cho thấy việc chỉ đứng trong thể chế dạy học khiến sự hiểu biết tri thức của người giáo viên có thể bị lệch lạc như thế nào.

2.1.3. Đóng góp của phân tích tri thức luận

Nhưng làm sao để chỉ ra được sự chênh lệch này?

Người ta chỉ có thể thực sự hiểu một tri thức (với tư cách là sản phẩm của nhân loại) nếu xác định được những câu hỏi mà tri thức này đem lại câu trả lời. Chevallard gọi đó là *lý do tồn tại của tri thức*. Chính phân tích tri thức luận giúp ta xác định được lý do này, tức là xác định nghĩa của tri thức, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết.

Ví dụ 2: Lấy lại trường hợp khái niệm số thập phân. Trong quá trình đào tạo, chúng tôi cũng đã đặt ra cho sinh viên sư phạm những câu hỏi như: số thập phân được định nghĩa như thế nào? đâu là vị trí của tập $\mathbb{D}$ các số thập phân trong quá trình mở rộng từ $\mathbb{N}$ sang $\mathbb{R}$? số thập phân được sinh ra để giải quyết vấn đề gì? Kết quả quan sát cho thấy: không nhiều sinh viên đưa ra được định nghĩa số thập phân (kể cả sinh viên của khoa đào tạo giáo viên tiểu học), đại bộ phận lúng túng tự hỏi phải chăng $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ (số hữu tỷ là những số thập phân đặc biệt), còn lý do tồn tại của số thập phân thì hầu như không ai chỉ ra được, hoặc nếu có chăng thì chỉ là nhắc đến nhu cầu đo độ dài.

Nghiên cứu tri thức luận lịch sử sẽ cho ta thấy tập hợp $\mathbb{D}$ các số thập phân xuất hiện như một thu hẹp của tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, và các số thập phân, về nguồn gốc, là một cách viết khác của phân số thập phân. Cách viết đó có một lợi ích lớn là làm cho các tính toán được dễ dàng hơn đối với mọi người. Cụ thể, nó cho phép mở rộng các quy tắc tính toán trên $\mathbb{N}$, vốn không thể mở rộng cho toàn tập $\mathbb{Q}$. Nó còn cho phép biểu diễn một cách thuận tiện số đo của các đại lượng.

Như vậy, nghiên cứu tri thức luận giúp ta “*trả lại tính lịch sử cho khái niệm toán học mà việc dạy học thường có khuynh hướng trình bày nó như những đối tượng phổ biến đồng thời trong thời gian và trong không gian*” (M. Artigue, 1990, tr. 243). Nghiên cứu này cũng giúp ta thoát khỏi ảo tưởng mà việc dạy học thường tạo ra về một sự chính xác vĩnh cửu và hoàn hảo của môn toán dạy trong nhà trường.

Trong khi trường học có ảo tưởng rằng đối tượng dạy học là một bản copy, tuy đã được đơn giản hoá nhưng vẫn trung thành, của đối tượng khoa học, thì *phân tích tri thức luận sẽ giúp nhà nghiên cứu hiểu rõ cái gì chi phối sự tiến triển của kiến thức*

khoa học, đâu là sự chênh lệch giữa tri thức bác học với tri thức được dạy, đâu là khoảng cách giữa hai hệ thống – toán học và dạy học.

Phân tích trên giải thích sự cần thiết của một nghiên cứu tri thức luận. Nghiên cứu này giúp ta vạch rõ các tham chiếu hợp thức của tri thức cần dạy, trả lại cho tri thức những nghĩa rộng hơn, phong phú hơn, điều mà việc nghiên cứu đơn thuần chương trình và sách giáo khoa không thể mang lại. Những hiểu biết khoa học luận về tri thức cần dạy giúp nhà nghiên cứu và giáo viên nhìn nó ở một khoảng cách cần thiết, không hoàn toàn bị bó hẹp trong nội tại hệ thống dạy học, không chỉ xem xét nó dưới lăng kính của chương trình và sách giáo khoa. Nói cách khác, phân tích tri thức luận giúp cho nhà nghiên cứu thoát ra khỏi ảo tưởng về sự “trong trẻo” của đối tượng tri thức và gạt bỏ những biểu tượng sai lầm về mặt tri thức luận mà hoạt động dạy học có thể gây nên. Điều này là cần thiết nếu ta muốn tìm những tình huống cho phép học sinh nắm được nghĩa của tri thức.

2.2. Chương ngại tri thức luận và đóng góp của nghiên cứu tri thức luận

2.2.1. Về khái niệm chương ngại

Sai lầm và chương ngại

Thừa nhận thuyết kiến tạo, cho rằng việc học tập xảy ra qua các quá trình đồng hóa và điều ứng nhằm thiết lập sự cân bằng giữa chủ thể với môi trường, Didactic gán cho sai lầm và sự nhận ra sai lầm một vai trò có tính xây dựng trong hoạt động nhận thức. Đây là một nét độc đáo của Didactic, ở chỗ nó đã liên kết được thuyết kiến tạo và quan điểm của phái Bachelard, quan điểm khẳng định rằng trong lịch sử các bộ môn khoa học, sai lầm không phải là một sự kiện thứ yếu xảy ra trong một quá trình: nó không nằm ngoài kiến thức mà chính là biểu hiện của kiến thức.

“Khi nghiên cứu những điều kiện [...] cho các bước tiến của khoa học, ta nhanh chóng đi đến chỗ tin rằng cần phải tiếp cận vấn đề bằng thuật ngữ chương ngại. [...] Chính là ở đó mà ta tìm thấy nguyên nhân của sự trì trệ, thậm chí sự thụt lùi. Chính là ở đó ta phát hiện những nguyên nhân trở ngại mà ta gọi là chương ngại. [...] Trong thực tế, ta cần phải biết chống lại một kiến thức cũ bằng cách loại bỏ đi những kiến thức đã được xây dựng một cách không hoàn toàn đúng, bằng cách vượt lên cái nằm trong chính tư duy và tạo nên chương ngại cho nhận thức.” (Bachelard, 1938).

Ngay từ những năm 70, nghiên cứu của Brousseau đã chỉ ra rằng một số kiến thức sai là *cần thiết* cho học tập: con đường đi của học sinh phải trải qua việc xây dựng (tạm thời) từ một số kiến thức sai, và việc ý thức được sai lầm này sẽ là yếu tố cấu thành nên nghĩa của kiến thức mà ta muốn xây dựng cho họ. Kế thừa Bachelard, Brousseau gọi những điểm buộc phải trải qua này là những *chương ngại tri thức luận* và nhấn mạnh vai trò của chúng trong lịch sử phát triển các kiến thức:

“Sai lầm không phải chỉ là hậu quả của sự không biết, không chắc chắn, ngẫu nhiên, như cách nghĩ của những người theo chủ nghĩa kinh nghiệm và chủ nghĩa hành vi, mà còn có thể là hậu quả của những kiến thức đã có từ trước, đã từng có ích đối với việc học trước kia, nhưng lại là sai, hoặc đơn giản là không còn phù hợp nữa đối với việc lĩnh hội tri thức mới. Những sai lầm thuộc loại này không phải thất thường hay không dự đoán được. Chúng tạo thành chương ngại. Trong hoạt động của giáo viên cũng như trong hoạt động của học sinh, sai lầm bao giờ cũng góp phần xây dựng nên nghĩa của kiến thức được thu nhận bởi những chủ thể này.” (Brousseau, 1983, tr. 171).

Như vậy, theo Brousseau, nếu ở học sinh có những sai lầm nào đó là hệ quả của sự hời hợt, hết sức riêng biệt, thì cũng còn có những sai lầm khác không phải ngẫu nhiên được sinh ra. Những sai lầm đó không nằm ngoài kiến thức, chúng chính là biểu hiện của kiến thức. Ở cùng một chủ thể, những sai lầm khác nhau có thể có chung một nguồn gốc là một kiến thức nào đó.

Brousseau phân biệt các chương ngại tùy theo nguồn gốc của chúng:

- Chương ngại thuộc về sự phát triển cá thể (obstacle ontogénétique): là chương ngại gắn liền với những hạn chế về nhận thức của cá nhân ở một thời điểm nào đó trong quá trình phát triển của nó.

- Chương ngại văn hóa (obstacle culturel): sinh ra từ những kiến thức lưu truyền qua các bối cảnh văn hóa, đã được khoa học điều chỉnh, nhưng vẫn luôn luôn hiện diện.

- Chương ngại sư phạm (obstacle didactique): là chương ngại sinh ra từ sự chuyển hóa sư phạm, dường như chỉ phụ thuộc vào sự lựa chọn của hệ thống dạy học.

- Chương ngại tri thức luận (obstacle épistémologique): là chương ngại gắn liền với lịch sử phát triển của tri thức mà việc vượt qua nó đóng vai trò quyết định đối với quá trình xây dựng kiến thức của chủ thể. Trong học tập, việc vượt qua những chương ngại tri thức luận là điều không thể tránh khỏi, bởi đó là yếu tố cấu thành nên kiến thức.

Một chương ngại tri thức luận có thể trở nên trầm trọng hơn, hay ngược lại, được giảm nhẹ, do sự chuyển hóa sư phạm được lựa chọn.

Đặc trưng của chương ngại là gì?

- Một chương ngại là một kiến thức, một quan niệm chứ không phải là một khó khăn³ hay một sự thiếu kiến thức.

- Kiến thức này tạo ra những câu trả lời phù hợp trong một bối cảnh nào đó mà ta thường hay gặp.

- Nhưng khi vượt ra khỏi bối cảnh này thì nó sản sinh những câu trả lời sai. Để có câu trả lời đúng cho mọi bối cảnh cần phải có một thay đổi đáng kể trong quan điểm.

- Hơn nữa, kiến thức này chống lại những mâu thuẫn với nó và chống lại sự thiết lập một kiến thức hoàn thiện hơn. Việc có một kiến thức khác hoàn thiện hơn chưa đủ để kiến thức sai này biến mất, mà nhất thiết phải xác định được nó và đưa việc loại bỏ nó vào tri thức mới.

- Ngay cả khi chủ thể đã ý thức được sự không chính xác của kiến thức chương ngại này, nó vẫn tiếp tục xuất hiện dai dẳng và không đúng lúc.

Ta có thể thấy là các kiến thức về số tự nhiên là chương ngại cho việc nắm tập hợp số thập phân, số hữu tỉ, số thực như thế nào. Chẳng hạn, nó khiến cho học sinh nghĩ rằng tích của hai số thập phân luôn lớn hơn từng thừa số, hay giữa 12,3 và 12,4 không có số thập phân nào, hay $0,3^2 = 0,9$, v.v...

³ Để phân biệt hai khái niệm này, bạn đọc có thể tham khảo bài viết của Lê Văn Tiến, Trần Anh Dũng (2012).

2.2.2. Xác định các chương ngại tri thức luận và đóng góp của nghiên cứu tri thức luận

Chính do đặc trưng của nó mà chương ngại tri thức luận cần phải được đặc biệt quan tâm trong các nghiên cứu của Didactic. Cách hiểu trên về chương ngại tri thức luận dẫn đến chỗ thừa nhận là có thể tìm thấy dấu vết của chúng trong lịch sử hình thành tri thức. Để nghiên cứu các chương ngại tri thức luận, Brousseau đã đề nghị tiến trình sau:

- Xác định những sai lầm thường xuyên tái diễn, chứng tỏ rằng chúng có thể nhóm lại quanh một quan niệm.
- Nghiên cứu xem có tồn tại hay không những chương ngại trong lịch sử xây dựng khái niệm toán học.
- Đối chiếu các chương ngại lịch sử với chương ngại học tập để nếu có thể thì thiết lập đặc trưng khoa học luận của chương ngại.

Hiển nhiên, không phải mọi chương ngại mà các nhà toán học gặp trước đây đều là những chương ngại mà học sinh ngày nay phải đương đầu. Tuy thế, ta thường có thể tìm thấy trong lịch sử dấu vết của những khó khăn, chương ngại mà học sinh gặp phải.

Qua nghiên cứu tri thức luận lịch sử, nhà nghiên cứu có thể khơi thông một logic tổng thể, những giai đoạn chủ yếu, vai trò và sự tác động qua lại lẫn nhau của chúng. Hơn thế, còn có thể xác định *những điều kiện nội tại cho sự phát triển*, những vấn đề đã từng là lý do cho sự ổn định hay sự bế tắc của một giai đoạn lịch sử, những ràng buộc chi phối các nhà khoa học đương thời. Lịch sử cung cấp những ví dụ về quá trình tiến triển của kiến thức mà phân tích tri thức luận sẽ giúp ta vạch rõ *những khó khăn, những quan niệm đã từng là trở ngại cho sự hình thành và phát triển của kiến thức, những động lực, những bước nhảy trong quan niệm, những điều kiện làm nảy sinh tri thức*.

Ví dụ 3: trường hợp khái niệm số tương đối

Nghiên cứu lịch sử cho thấy toán học đã phải trải qua một giai đoạn dài với nhiều khó khăn và sự xuất hiện các số âm không phải là dễ dàng. Một số công trình nghiên cứu đã chỉ ra nhiều chương ngại tri thức luận phải vượt qua để hiểu khái niệm số âm.

Chương ngại thứ nhất: số tự nhiên

Ta biết rằng chính những vấn đề của cuộc sống đã khiến các nhà toán học đến với số âm. Chẳng hạn, ngay từ thế kỷ thứ nhất, trong các tình huống thương mại, người Trung Quốc đã biểu diễn đại lượng âm (nợ, lỗ) bằng những que màu đen và đại lượng dương (có, lãi) bằng những que màu đỏ, còn số 0 bằng một ô trống. Tương tự, những tính toán liên quan đến hoạt động buôn bán đã cho phép các nhà toán học Hindou thao tác trên các đại lượng âm mà chẳng có một giải thích toán học nào.

Nhưng trong một thời gian dài số âm chỉ được sử dụng như trung gian để tính toán chứ không được xem là “số”. Chẳng hạn, cho đến tận thế kỷ XVIII ở châu Âu người ta vẫn không nói “số âm” mà chỉ nói “đại lượng âm”. Các số chỉ có thể là dương mà thôi và đại lượng âm được định nghĩa như là một “đôi lập” với đại lượng dương: trên con đường có hướng xác định thì lấy hướng ngược lại với nó, có và nợ, được và mất...

Số âm là gì? Ta thường nghĩ rằng toán học nói chung, khái niệm số nói riêng, được xây dựng bằng con đường trừu tượng hóa từ những quan sát cụ thể. Chẳng hạn,

“số 2” như là một tính chất trừu tượng của mọi tập hợp có hai phần tử. Cộng hai cái kẹo với ba cái kẹo thì có năm cái kẹo. Nhưng “ $2 + 3 = 5$ ” đúng cho mọi tập hợp đối tượng, và ta có một “định lý” sử dụng được cho mọi trường hợp. Chính là với kiểu suy nghĩ này mà con người chuyển từ việc đếm sang toán học trừu tượng.

Cách hiểu đó về số tự nhiên là một chương ngại đối với việc gán nghĩa cho các số âm. Chẳng dễ dàng gì để chấp nhận là -5 bé hơn 2 (tại sao lỗ 5 đồng lại bé hơn là thắng 2 đồng?) hay lỗ 3 đồng cũng giống như thắng (-3) đồng. Trong một thời gian dài (đến tận thế kỷ XVI) các nhà toán học vẫn không thừa nhận sự tồn tại của số âm bên cạnh số tự nhiên, mặc dầu họ đã có các quy tắc tính toán với chúng, đã sử dụng chúng để giải các phương trình, nhưng cuối cùng chỉ lấy những nghiệm dương. Ngay cả với Viète (1540-1630), người đặt nền móng cho tính toán trên các chữ, thì chữ cũng chỉ lấy giá trị dương và các nghiệm âm của phương trình đều bị loại. Hay trong Hình học giải tích, Descartes cũng lựa chọn các trục sao cho chỉ có những điểm có tọa độ dương. Phải đợi đến thế kỷ XVIII, Maclaurin và đặc biệt là Euler mới giải thích được tại sao có thể lấy những điểm có tọa độ âm. Trong kỹ thuật, nhiệt kế mà Fahrenheit tạo ra năm 1715 không có số âm mà phải đợi đến đầu thế kỷ XIX ta mới có những nhiệt kế như ngày nay. Như vậy, cũng như các số phức sau này, đại lượng âm chỉ được các nhà toán học sử dụng như một phương tiện trung gian để tính toán chứ chưa được thừa nhận là số.

“Carnot (1753-1823) nói: “Để có một đại lượng âm, cần phải lấy đi một đại lượng hiện hữu từ zéro, mà zéro thì lại chẳng có gì cả: phép toán không thực hiện được. Vậy thì làm thế nào để tưởng tượng ra một đại lượng âm?” Và ông kết luận: việc sử dụng các số âm dẫn đến những kết luận sai lầm” (Berté, 2008, tr. 60).

Kiến thức về số tự nhiên không chỉ là trở ngại cho việc thừa nhận số âm, mà còn gây khó khăn cho việc hiểu phép toán nhân hai số âm. Chẳng hạn, Carnot giải thích việc ông không hiểu tại sao $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ hay $(-3)^2 > 2^2$ bằng những lập luận đã từng hữu ích trước đây, như:

- Một số bé (-1) chia cho số lớn hơn nó (1) không thể nào lại có cùng kết quả với phép chia số lớn (1) cho số bé (-1),
- Bình phương của một số (-3) không thể nào lớn hơn bình phương của một số lớn hơn nó (2).

Chương ngại thứ hai: khái niệm số 0 trong tập số tự nhiên

Như ta thấy trong phân tích của Carnot, một chương ngại thứ hai giao thoa với chương ngại thứ nhất: số 0 được hiểu là số mà dưới nó không có gì cả (số 0 tuyệt đối). Brousseau cũng nhắc đến chương ngại này khi phân tích việc gắn số với số đo. Số 0 lúc này được hiểu như số đo của một cái gì đó “không có gì cả”. Cách hiểu này cản trở việc thừa nhận sự tồn tại những số nhỏ hơn số 0.

Chuyển vào tập số tương đối đòi hỏi phải từ bỏ quan niệm “số 0 tuyệt đối” và hợp nhất đường thẳng số bằng cách đặt trên đó số 0 chung cho các số âm và dương.

Chương ngại thứ ba: mô hình thương mại

Trong “*Éléments d’algèbre*” Clairaut (1713-1765) đã bắt đầu nói chút ít về “dấu” của một số và quy tắc cộng, trừ các số âm. Lần lượt sau đó các quy tắc tính toán trên số tương đối được đưa ra. Nhưng quy tắc nhân hai số âm luôn đặt ra những khó khăn.

Trong thực tế, để liên kết các tính toán thì cần chấp nhận rằng tích hai số âm là một số dương. Nhưng quy tắc này vấp phải trở ngại trong chính mô hình thương mại - mô hình được sử dụng để đưa vào các đại lượng âm. Stendhal (1835) đã viết:

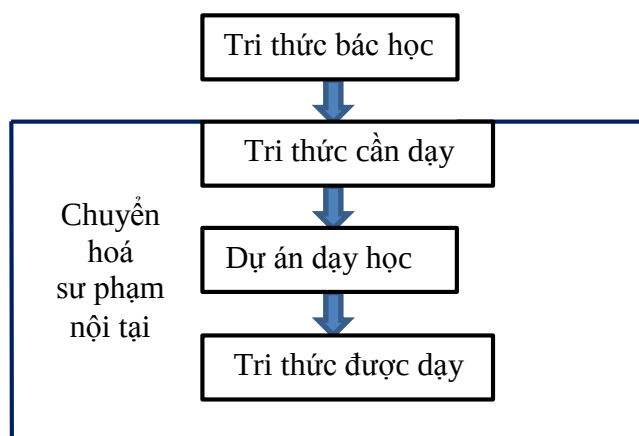
“Giả sử các đại lượng âm là số tiền nợ của một người. Làm thế nào mà bằng cách nhân 10.000 phờ-răng (francs) tiền nợ với 500 phờ-răng tiền nợ nữa, người này lại có một tài sản 5.000.000, đến năm triệu phờ-răng ?” (trích theo Berté, 2008, tr. 61)

Như vậy, mô hình thương mại đã tạo thuận lợi cho việc hiểu phép cộng các số tương đối lại trở thành một chướng ngại cho việc hiểu phép nhân.

2.3. Xây dựng, phân tích các tình huống dạy học và đóng góp của nghiên cứu tri thức luận

Trở về với mắt xích thứ ba mà chúng ta còn chưa phân tích khi bàn về quá trình chuyển hoá sư phạm. Mắt xích này được thực hiện bởi chính giáo viên, trong lòng hệ thống dạy học.

Tiếp theo hai mắt xích thuộc phần “có thể nhìn thấy” (Chevallard, 1991) của quá trình chuyển hoá sư phạm là phần công việc thường bị che giấu để chuyển từ tri thức cần dạy thành tri thức được dạy: sự chuyển hoá nội tại trong lòng hệ thống dạy học. Nhiều nhân tố tác động (gián tiếp hay trực tiếp) vào bước chuyển hoá nội tại này: chương trình, sách giáo khoa, tài liệu hướng dẫn giáo viên, và cả quá trình đào tạo giáo viên nữa. Nhưng chúng ta giả định rằng người trực tiếp thực hiện bước chuyển hoá nội tại này là giáo viên. Bước chuyển ấy có thể được phân thành hai giai đoạn: thiết kế một dự án dạy học và sau đó thực hiện dự án. Ở đây chúng ta chỉ bàn đến giai đoạn thứ nhất của bước chuyển hoá sư phạm nội tại: chuyển từ tri thức cần dạy (đã được quy định bởi chương trình, sách giáo khoa) thành một dự án giảng dạy. Ở bước này nhiều nhân tố cần phải được giáo viên tính đến, trừ phi anh ta chỉ thực hiện nó một cách hời hợt.



2.3.1. Lý do tồn tại của tri thức và tình huống mang lại nghĩa cho tri thức

Chúng ta đã nói rằng người ta chỉ thực sự hiểu một tri thức (sản phẩm của nhân loại) nếu đã xác định được những câu hỏi mà tri thức này mang lại một câu trả lời. Chevallard (1995) gọi những câu hỏi đó là lý do tồn tại của tri thức. Chúng mang lại nghĩa cho tri thức.

Như vậy, xây dựng những tình huống trong đó tri thức cần dạy xuất hiện như một giải pháp tối ưu phải được xem là mục đích của việc dạy học. Những tình huống như thế

có tồn tại hay không đối với một tri thức xác định bất kỳ. Câu trả lời là “có”, vì mọi tri thức toán học đều sinh ra từ việc giải quyết một vấn đề nào đó. Chính vì thế mà lý thuyết tình huống do Brousseau đặt nền móng thừa nhận giả thuyết khoa học luận sau : với mỗi kiến thức đều tồn tại một họ tình huống có khả năng đem lại cho nó một nghĩa *đúng*. *Đúng* ở đây là *đúng* so với lịch sử của khái niệm, so với bối cảnh xã hội và so với cộng đồng khoa học. Khái niệm “tình huống cơ sở” mà Brousseau đưa ra nhằm mô hình hóa cho họ các tình huống như vậy, trong đó tri thức cần dạy xuất hiện như là kết quả hay phương tiện để thiết lập chiến lược tối ưu (tham khảo Bessot A. và các tác giả, 2004).

Vấn đề là phải “tái tạo” lại trong lớp một sự phát sinh ra những tri thức toán học với cái nghĩa mà ta muốn học sinh chiếm lĩnh. Dựa vào đâu để kiến tạo những tình huống như vậy, khi lý do tồn tại của tri thức đã bị che dấu qua những biến đổi mà nó phải chịu? Chính phân tích tri thức luận sẽ giúp ta tìm lại nghĩa của tri thức, những câu hỏi, những vấn đề chủ yếu mà tri thức cần dạy mang lại cách giải quyết ở một thời điểm nào đó trong lịch sử và những điều kiện cho phép nảy sinh tri thức.

Việc sử dụng từ “phát sinh” có thể làm cho ta lầm tưởng rằng tri thức sinh ra theo kiểu đường thẳng và đồng đều. Điều này không bao giờ xảy ra trong toán học. Thực tế thì có cả một mạng các vấn đề thuộc nhiều nguồn gốc giữ những vai trò khác nhau trong quá trình hình thành tri thức. Thậm chí, trong một số trường hợp, sự tiến triển lịch sử đã vô ích đi theo một đường vòng quanh co, rồi sau đó mới xuất hiện những con đường ngắn hơn làm cho tri thức dễ dàng xuất hiện. Như vậy, thực tế lịch sử không phải luôn luôn là một mô hình hoàn hảo để cho hoạt động dạy học rập khuôn theo.

Chẳng những thế, việc dạy học lại phải tuân thủ những ràng buộc không thể tránh khỏi. Sự ràng buộc về thời gian chẳng hạn: làm thế nào để đi theo một quá trình hình thành đã trải qua nhiều thập kỷ (thậm chí hàng thế kỷ) trong vài giờ? Rồi vấn đề nhận thức: tri thức cần dạy đã được tổ chức lại theo một hệ thống không trùng với trình tự phát triển trong lịch sử, làm thế nào để lồng quá khứ học toán của học sinh vào tiến trình diễn ra trong lịch sử? Rồi thì sự khác nhau về tâm lý, về hoàn cảnh xã hội, về thể chế (thể chế tạo ra tri thức và thể chế dạy học)... Biết bao nhiêu yếu tố làm cho *sự phát sinh được tạo ra trong lớp học* (chúng tôi sẽ gọi là sự phát sinh giả tạo) không thể đồng nhất với *sự phát sinh trong lịch sử*.

“Tuy nhiên, đối với nhà nghiên cứu, sự phát sinh trong lịch sử là điểm tựa để phân tích một quá trình dạy học cụ thể, là cơ sở cho việc thiết kế một sự phát sinh giả tạo.” (Artigue, 1991, tr. 246).

Sở dĩ nói như vậy là vì trong phân tích hay thiết kế các tình huống dạy học, giáo viên nhất thiết phải đối chiếu với vấn đề nghĩa của tri thức, mà chính những vấn đề đã từng là lí do của việc đưa vào tri thức này hay tri thức kia, cũng như những vấn đề chi phối sự tiến triển của tri thức, là cái cấu thành nên nghĩa của tri thức này.

Cùng quan điểm với Artigue, Schneider thường xuất phát từ những vấn đề được gọi lên từ lịch sử để thiết kế tình huống dạy học. Tác giả cho rằng dù là kiến thức gì thì trong tổng thể, con đường tiến lên của học sinh cũng có những nét giống với con đường lịch sử. Tuy nhiên, tác giả liên kết tư tưởng này với quan điểm của Brousseau: *vấn đề không phải là tạo ra lại con đường lịch sử, mà là tạo ra những tác dụng tương tự bằng những phương tiện khác*.

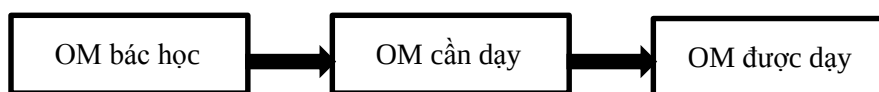
Ví dụ 4: Ta biết rằng trong lịch sử khái niệm đạo hàm (của hàm số tại một điểm) được hình thành từ hai lĩnh vực Vật lý và Hình học. Vì thế, trong dạy học có ít nhất hai cách tiếp cận khác nhau để đưa vào khái niệm này: cách thứ nhất xuất phát từ bài toán tìm tiếp tuyến, cách kia chọn bài toán tìm vận tốc tức thời của một chuyển động. Phân tích hai cách tiếp cận này, Scheneider cho rằng cách tiếp cận qua tiếp tuyến phải đối diện với một số trở ngại. Chẳng hạn, bản thân việc dạy học khái niệm giới hạn đã phải đương đầu với nhiều chương ngại tri thức luận, trong đó có chương ngại hình học (tham khảo Sierpinska, 1985). Chương ngại đó ở đây lại còn trầm trọng hơn vì học sinh phải hiểu “tiếp tuyến là vị trí giới hạn của cát tuyến”, trong khi trước đó chưa có định nghĩa nào về giới hạn của một tập hợp các đường thẳng. Trong thực tế, một số nghiên cứu đã cho thấy học sinh không thiết lập được mối liên hệ về số giữa độ nghiêng của tiếp tuyến và độ nghiêng của cát tuyến. Ngoài ra, các sách giáo khoa phổ thông nói chung rất ít chỉ ra lợi ích của việc nghiên cứu tiếp tuyến. Sự xấp xỉ số trong một lân cận hầu như không được đề cập, định lý về mối liên hệ giữa tính dương của đạo hàm và tính đồng biến của hàm số lại không được chứng minh, nên học sinh không nhìn thấy vai trò của tiếp tuyến.

Trong khi đó cách tiếp cận từ bài toán tìm vận tốc tức thời cho phép tránh những chương ngại, khó khăn trên. Hơn thế, nó lại thuận tiện cho việc đưa vào “tỷ số biến thiên tức thời” của hàm số - một nghĩa quan trọng của khái niệm đạo hàm khi ta phải xem xét những vấn đề ngoài toán học. Chính từ phân tích này mà tác giả chọn con đường tiếp cận khái niệm đạo hàm từ bài toán của chuyển động học, một bài toán vốn là nguồn gốc của khái niệm. Nhưng tình huống mà tác giả lựa chọn là nghiên cứu một chuyển động thẳng có hàm vị trí được cho trước hết bằng đồ thị, sau đó bằng biểu thức. Lý do của sự lựa chọn này là nó cho phép liên kết trong tình huống cả hai đối tượng “vận tốc” và “tiếp tuyến” (tham khảo Scheneider, 2009).

2.3.2. Tình huống mang lại nghĩa cho tri thức và tổ chức toán học tham chiếu

Khi nói đến tình huống, ta hiểu là ở đó có một vấn đề cần giải quyết. Kết nối *Lý thuyết tình huống* với *Thuyết nhân học* trong Didactic toán, chúng tôi nói rằng trong dự án dạy học của giáo viên phải có ít nhất một kiểu nhiệm vụ cần được nghiên cứu. Với nhiệm vụ t thuộc một kiểu nhiệm vụ T được đặt ra, vấn đề là phải nghiên cứu một kỹ thuật τ nào đó để giải quyết. Kỹ thuật ấy không chỉ cho phép giải quyết nhiệm vụ t mà còn hữu hiệu, nếu không phải là với toàn thể thì cũng là trên một tập hợp khá lớn những nhiệm vụ thuộc kiểu T . Hiển nhiên, kỹ thuật ấy phải hợp thức, nghĩa là có thể giải thích được bởi những yếu tố công nghệ θ nào đó. Đến lượt mình, yếu tố công nghệ ấy lại được biện minh bởi những yếu tố lý thuyết Θ khác. Rồi Θ lại phải được giải thích bởi những yếu tố nào đó. Quá trình giải thích cứ tiếp tục như vậy. Nhưng để nghiên cứu một kiểu nhiệm vụ, ta có thể dừng lại ở Θ . Chevallard gọi mỗi bộ bốn thành phần $(T, \tau, \theta, \Theta)$ gọi là một praxéologie. Khi T là một kiểu nhiệm vụ toán học thì ông gọi đó là một praxéologie toán học, hay một tổ chức toán học, ký hiệu là OM (organisation mathématique). Như vậy, trong tình huống dạy học phải có ít nhất một praxéologie cần được xây dựng.

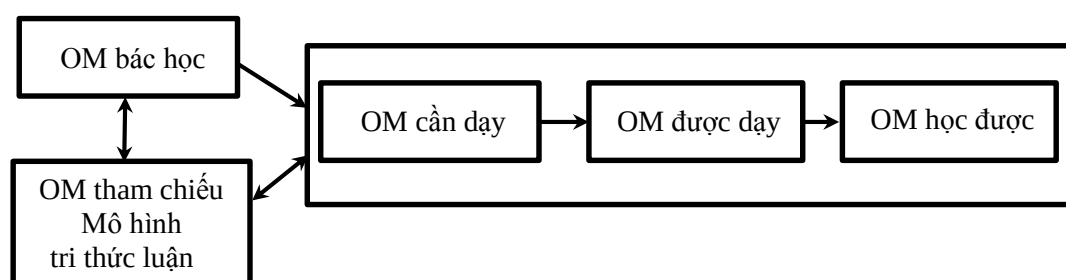
Chính là theo cách tiếp cận này mà các mắt xích của quá trình chuyển hóa sư phạm đã được Bosch & Gascon (2005) mô tả bằng sơ đồ:



Hiểu như vậy thì để thiết kế dự án dạy học giáo viên sẽ phải xác định những OM mang lại nghĩa cho tri thức cần dạy. Một số nghiên cứu đã chỉ ra rằng tài liệu chủ yếu mà giáo viên tham khảo là chương trình và sách giáo khoa. Nhưng, như chúng tôi đã chỉ ra ở trên, nếu chỉ tự giới hạn trong nội tại hệ thống dạy học mà mình đang ở trong đó, nhiều khi giáo viên không nhìn thấy cái gì có thể và cần phải xảy ra trong dự án dạy học của mình. Câu hỏi giáo viên cần đặt ra là: Đối với tri thức đang bàn đến, học sinh cần phải được nghiên cứu những OM nào? Sự lựa chọn của sách giáo khoa có thỏa đáng hay không?

Chính phân tích tri thức luận sẽ mang lại câu trả lời cho những câu hỏi này. Phân tích đó sẽ giúp xác định những tổ chức toán học cần được triển khai trong dạy học và ta gọi đó là các OM tham chiếu. Các OM tham chiếu là lưới vấn đề mà nhà nghiên cứu có thể sử dụng để phân tích một thể chế xác định hay thực hành dạy học của giáo viên, cũng là điểm tựa để giáo viên thiết kế dự án giảng dạy của mình.

Dù không phải là đối tượng nghiên cứu của báo cáo này, nhưng chúng tôi muốn dừng lại giây lát ở đây để nói đến một sự mở rộng phương pháp luận xác định các OM tham chiếu. Trong sự mở rộng này, không phải chỉ phân tích lịch sử, mà việc nghiên cứu những tài liệu học đường (chương trình, sách giáo khoa phổ thông, giáo trình bậc đại học, sách giáo viên, các đề thi, v.v...) trong nhiều thể chế khác nhau cũng cho phép xác định các OM tham chiếu. Hai phân tích (tri thức luận và thể chế) bổ sung cho nhau trong sơ đồ sau của Bosche và Garcon (2005):



Ví dụ 5 : dạy học hệ đếm (thập phân)

Phân tích tri thức luận cho thấy hiểu hệ đếm thập phân là phải hiểu hai đặc trưng vị trí và thập phân. Đặc trưng vị trí nói lên mối liên hệ giữa các đơn vị với vị trí của các chữ số (giá trị của chữ số phụ thuộc vào vị trí của nó trong cách viết số) và đặc trưng thập phân nói về mối liên hệ giữa các đơn vị của hệ đếm. Nghiên cứu lịch sử hình thành hệ đếm thập phân đã giúp Chambris (2008) chỉ ra mối liên hệ khăng khít giữa đại lượng và số, từ đó đề xuất những tình huống, những con đường củng cố kiến thức về hệ đếm cho học sinh đầu cấp Trung học cơ sở bằng cách khai thác đại lượng đo độ dài (Chambris 2012).

Về phần mình, qua tìm hiểu lịch sử toán học và kế thừa kết quả của Chambris về phân tích lịch sử dạy học hệ đếm thập phân ở bậc tiểu học của Pháp trong một giai

đoạn dài (thế kỷ XX đến đầu thế kỷ XXI), Tempier (2009) đã phân biệt ba OM địa phương tham chiếu⁴ :

- OM_{card} : nhóm những OM điểm liên quan đến các kiểu nhiệm vụ cần kiến thức về bản số (cardinal) của số (đếm, tạo ra, so sánh các tập hợp),
- OM_{ord} : nhóm những OM điểm liên quan đến các kiểu nhiệm vụ huy động kiến thức về sắp thứ tự (ordinal) các số (so sánh hai số, sắp thứ tự một dãy số, tìm số nằm giữa hai số, đóng khung một số, đặt hay đọc một số trên đường thẳng khác vạch...),
- OM_{trad} : nhóm những OM điểm liên quan đến kiểu nhiệm vụ xem xét sự chuyển dịch (traduction) giữa viết và đọc số (phân tích, hay ngược lại, tạo ra một số, viết số, đọc số).

Đây là ba tổ chức toán học địa phương mà Tempier đã sử dụng trước hết để nghiên cứu một số chương trình và sách giáo khoa. Nghiên cứu này cho thấy sự ưu tiên xem xét phương diện vị trí (qua các kiểu nhiệm vụ *đọc, viết, so sánh*) nhưng lại chưa chú ý đúng mức đến phương diện thập phân (rất ít xuất hiện các kiểu nhiệm vụ *phân tích hay tạo ra một số*). Tác giả sử dụng sau đó lưới OM tham chiếu này để phân tích thực hành dạy học của hai giáo viên các lớp đầu cấp tiểu học trong việc giải thích những lựa chọn trong dự án dạy học của họ. Dường như những kiểu nhiệm vụ nghiên cứu phương diện thập phân (như chuyển 856 chục thành trăm, đếm số gói 10 trong số 8564) đã không được xem là một đặc trưng quan trọng trong dạy học hệ đếm.

Ví dụ 6 : dạy học khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm

Ta đã nói đến hai bài toán cơ bản là nguồn gốc làm nảy sinh khái niệm đạo hàm trong lịch sử. Vấn đề tìm vận tốc của vật thể đưa Newton đến với ý tưởng xây dựng giải tích trên cơ sở của “chuyển động”, trong đó đạo hàm được định nghĩa như là tốc độ biến thiên tức thời của một đại lượng nào đó theo “thời gian”. Thời gian ở đây được hiểu là một biến bất kỳ x nào đó biến thiên đều theo thời gian, nghĩa là $(x)' = 1$. Cách hiểu này mang lại cho đạo hàm những ứng dụng đa dạng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Từ một phân tích tri thức luận lịch sử hình thành khái niệm, chúng tôi đưa ra ba nghĩa của khái niệm đạo hàm:

- Đạo hàm – hệ số góc của tiếp tuyến,
- Đạo hàm – tốc độ biến thiên của hàm số,
- Đạo hàm – công cụ xấp xỉ hàm số.

Từ ba nghĩa này, chúng tôi đưa ra ba OM tham chiếu, là ba tổ chức toán học địa phương được đặt trong một tổ chức toán học vùng (gọi là tổ chức toán học về đạo hàm):

- OM_{tt} : gồm các OM điểm hình thành từ những kiểu nhiệm vụ liên quan đến tiếp tuyến của đường cong.
- OM_{bt} : gồm các praxéologie điểm hình thành từ những kiểu nhiệm vụ liên quan đến vấn đề tìm tốc độ biến thiên của hàm số so với đối số
- OM_{xx} : gồm OM điểm hình thành từ những kiểu nhiệm vụ liên quan đến vấn đề xấp xỉ hàm số.

⁴ Về các khái niệm praxéologie điểm, địa phương, vùng, tổng thể, bạn đọc có thể tham khảo Bessot A. và các tác giả, 2004.

Sử dụng ba *OM* tham chiếu có được từ nghiên cứu tri thức luận này, và với cách tiếp cận sinh thái học, nhiều phân tích đã chỉ ra rằng dù cả ba nghĩa đều được đưa vào trong sách giáo khoa Giải tích 11 hiện hành của Việt Nam, nhưng vết của OM_{xx} rất mờ nhạt, còn OM_{bt} thì hiện diện chủ yếu chỉ ở kiểu nhiệm vụ tìm vận tốc tức thời, cường độ dòng điện tức thời. Nghĩa *tốc độ biến thiên* chưa thực sự được xây dựng. Đặc biệt, những tình huống cho phép thiết lập mối liên kết giữa ba nghĩa này (vào một khái niệm - đạo hàm) không tồn tại trong sách giáo khoa.

Nhằm bổ sung cho khiếm khuyết của sách giáo khoa, tác giả Ngô Minh Đức đã thiết kế một số tình huống dạy học theo quan điểm liên môn Toán – Lý. Trước đó, tác giả tiến hành phân tích tác động của đạo hàm trong những nội dung vật lý dạy ở bậc Trung học phổ thông. Phân tích này cho thấy vết của OM_{xx} , OM_{bt} khá đa dạng trong các sách giáo khoa Vật lý. Nghiên cứu thể chế dạy học Vật lý đã giúp tác giả đưa ra một danh sách cụ thể cho các tổ chức toán học điểm thuộc ba *OM* tham chiếu ở trên, là dữ liệu để tác giả thiết kế các tình huống dạy học theo định hướng giảm bớt sự ngắt quãng với Vật lý khi dạy học khái niệm đạo hàm trong môn Toán (tham khảo Ngô Minh Đức, 2013).

Trong một nghiên cứu khác, Trần Thanh Hà (2015) muốn tổ chức dạy học khái niệm đạo hàm theo quan điểm tích hợp, trong đó đạo hàm can thiệp vào những vấn đề thực tiễn (không chỉ giới hạn ở Vật lý). Bằng một phân tích so sánh quan hệ thể chế, tác giả đã chỉ ra rằng nếu như trong sách giáo khoa Giải tích 11 của Việt Nam, nghĩa *tốc độ biến thiên* chỉ giới hạn trong vài vấn đề Vật lý, thì nó lại được trình bày khái quát trong cuốn “Harcourt Mathematics 12, Advanced Function and Introductory Calculus (2002)” sử dụng ở Canada:

“Vận tốc chỉ là một ví dụ của khái niệm tốc độ biến thiên. Tổng quát, giả sử lượng y phụ thuộc vào x theo phương trình $y = f(x)$. Khi biến độc lập biến thiên từ a đến $a + h$, tương ứng với sự biến thiên của biến phụ thuộc y là $\Delta y = f(a + h) - f(a)$. Khi đó tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ được gọi là tốc độ biến thiên trung bình của y đối với x trên khoảng từ $x = a$ đến $x = a + h$.

[...] Nếu chúng ta giải thích đạo hàm theo nghĩa tốc độ biến thiên, quy tắc hàm hợp có thể được phát biểu rằng nếu y là một hàm theo x thông qua một biến trung gian u , thì tốc độ biến thiên của y đối với x bằng tích của tốc độ biến thiên của y đối với u và tốc độ biến thiên của u đối với x .”

Phân tích so sánh này đã giúp tác giả làm phong phú thêm cho OM_{bt} bằng một số praxéologie điểm ở ngoài phạm vi toán học, và là những gợi ý để tác giả thiết kế các tình huống dạy học khái niệm đạo hàm theo quan điểm tích hợp (tham khảo Trần Thanh Hà, 2015).

2.4. Kết luận về sự cần thiết của nghiên cứu tri thức luận

Phân tích trên cho thấy một nghiên cứu tri thức luận có ít nhất ba đóng góp quan trọng, không thể bỏ qua trong những công trình xem xét các hoạt động dạy học.

Thứ nhất, với phân tích tri thức luận, nhà nghiên cứu hay giáo viên có thể làm một bước lùi khỏi thể chế dạy học mà mình đang ở trong đó, nhìn thấy sự chênh lệch giữa tri thức bác học với tri thức cần dạy, nhận ra những cái đã bị mất đi do quá trình chuyển hóa sư phạm. Thật ảo tưởng khi nghĩ rằng tri thức cần dạy là một bản copy

trung thành của tri thức bác học (tuy có được đơn giản hóa đi). Cũng là sai lầm khi quan niệm cái mất đi ấy là không thể tránh khỏi. Phân tích tri thức luận sẽ giúp ta chỉ ra cái gì cần tồn tại và có thể tồn tại, tồn tại như thế nào.

Thứ hai, phân tích ấy cho phép làm rõ tình huống mang lại cho tri thức đang bàn đến nghĩa này hay nghĩa kia, giúp nhà nghiên cứu và giáo viên tìm câu trả lời cho những câu hỏi:

- Liệu có đảm bảo rằng vấn đề được đặt ra trong tình huống là *đích thực* đối với tri thức hay không? Từ *đích thực* ở đây được hiểu theo nghĩa tri thức cần dạy là tri thức hoặc không thể thiếu, hoặc đem lại một chiến lược tối ưu cho việc giải quyết vấn đề được đặt ra.

- Vấn đề đó có mối liên hệ như thế nào với *lý do tồn tại* của đối tượng tri thức được xem là mục đích của hoạt động dạy học.

- Vấn đề ấy đưa lại cho tri thức cái *nghĩa nào*?

Nói cách khác, phân tích tri thức luận giúp xác định tình huống cơ sở, để rồi bằng việc lựa chọn các biến với những giá trị thích đáng mà nhà nghiên cứu hay giáo viên xem xét các tình huống dạy học. Bằng cách đó, người ta sẽ thực hiện công việc ngược với nhà nghiên cứu là ngữ cảnh hoá trở lại, cá nhân hoá trở lại, đặt học sinh vào trong tình huống của nhà nghiên cứu trước đây, nhằm tạo ra một sự phát sinh giả tạo.

Thứ ba, phân tích tri thức luận còn giúp tìm hiểu những chướng ngại mà người học cần phải trải qua, những điều kiện cho phép tri thức nảy sinh, những kiến thức cần có... Tình huống dạy học phải tính đến những câu hỏi mà câu trả lời được tìm thấy qua phân tích tri thức luận: việc vượt qua chướng ngại đã xác định chỉ có thể được thực hiện với những bước nhảy nào về quan niệm, về kiến thức.

3. Nhìn lại chương trình đào tạo giáo viên truyền thống

3.1. Vài ghi nhận từ thực tế

Những hiện tượng quan sát được ở giáo viên mà chúng tôi nêu trong ví dụ 1 và 2 của báo cáo này cho thấy sự hiểu biết về tri thức cần dạy của họ là một điểm cần phải được xem xét. Dường như họ chỉ tự giới hạn trong thể chế dạy học mà mình là một thành viên chủ chốt. Ghi nhận này còn được kiểm chứng trong nhiều công trình khác lấy đối tượng nghiên cứu là thực hành dạy học của giáo viên.

Chẳng hạn, tác giả Trần Thị Túy An (2007) đã quan sát và phân tích thực hành dạy học *khái niệm xác suất* của hai giáo viên P1, P2, một dạy cho học sinh lớp 11 theo chương trình cơ bản (gọi là lớp thường) và một dạy cho học sinh lớp 11 song ngữ Việt – Pháp mà phần *Xác suất – Thống kê* được dịch từ cuốn sách giáo khoa TERACHER Première và TERACHER Terminale của Pháp. Trong khi sách giáo khoa sử dụng ở lớp thường ưu tiên cho định nghĩa cổ điển thì sách giáo khoa cho lớp song ngữ lại bắt đầu việc tiếp cận khái niệm xác suất của biến cố bằng tần suất và nhấn mạnh ý nghĩa thực tiễn của định nghĩa này. Thế nhưng, trái với yêu cầu của chương trình, P2 (cũng như P1) chỉ tập trung vào công thức Laplace.

Biên bản ghi chép lại diễn biến các tiết học sau đó được chúng tôi sử dụng trong các đợt bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên toán Trung học phổ thông, với yêu cầu

“phân tích các tiết dạy”. Trong những nhận xét chúng tôi thu được không có ý kiến nào nói về sự lựa chọn không thỏa đáng khi ưu tiên cho công thức Laplace, bỏ qua cách tiếp cận khái niệm bằng tần suất. Ý kiến này cũng không hề xuất hiện khi giáo viên phân tích cách trình bày khái niệm xác suất trong các sách giáo khoa.

Một ghi nhận khác: trong thực tế đào tạo ở Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, trước khi bàn về vấn đề dạy học chủ đề *vector – tọa độ*, sinh viên năm thứ tư đưa ra định nghĩa “vector là đoạn thẳng định hướng” để trả lời cho câu hỏi “vector hình học là gì?” Như vậy, sau 3 năm học ở trường đại học sư phạm, dường như quan niệm của sinh viên về đối tượng vector không có gì thay đổi so với trước đó.

Cũng như thế, những câu hỏi rất đơn giản kiểu như “tại sao cần phải đưa vào khái niệm tần suất? tại sao tần suất lại phải viết ở dạng phần trăm? đối với bài toán thống kê cụ thể này có cách ghép lớp (tần số, tần suất) nào khác không? vẽ một biểu đồ tần suất ghép lớp (histogramme) như thế nào” thì không ít sinh viên lúng túng, thậm chí không tìm ra câu trả lời.

3.2. Nhìn lại chương trình đào tạo giáo viên truyền thống

Rõ ràng hiện tượng không tính đến đặc trưng tri thức luận của khái niệm cần dạy như thế không chỉ tồn tại ở cá nhân vài giáo viên. Nó khiến chúng ta phải nhìn lại chương trình đào tạo giáo viên truyền thống.

Chương trình đó phân thành 3 khối. Khối các môn chung, chiếm tỷ lệ khoảng 25% số tín chỉ, bao gồm các môn Triết học, Ngoại ngữ, Tin học. Khối các môn Toán cơ bản, chiếm tỷ lệ khoảng 50% số tín chỉ. Thời gian còn lại dành cho khối các môn nghiệp vụ, bao gồm Tâm lý học, Giáo dục học, Phương pháp giảng dạy, Thực tập.

Các học phần toán cơ bản có nhiệm vụ tạo nền tảng toán cho vốn kiến thức của sinh viên. Ở đây sinh viên chỉ làm việc với một số lý thuyết toán học thuần túy, được xây dựng bằng phương pháp tiên đề. Vấn đề làm nảy sinh một khái niệm, những trở ngại cho sự hình thành nó, những bước nhảy cần thiết cho sự phát triển... không được xem là một trong những nội dung nghiên cứu của phần đào tạo nền tảng kiến thức toán cho giáo viên.

Sự tách rời giữa các học phần toán cơ bản với vấn đề đào tạo nghề đã được một số nhà đào tạo đề ý đến từ vài ba thập niên trước, nên có ý kiến đề nghị giảng viên các học phần này phải chú ý liên hệ với chương trình phổ thông. Nhưng điều đó dường như không khả thi, vì quả thật là nhiều khái niệm, nhiều vấn đề của toán cao cấp có khoảng cách rất lớn với những nội dung mà sinh viên sẽ phải giảng dạy sau này. Hơn nữa, giảng viên mỗi bộ môn còn phải tuân theo những ràng buộc khác áp đặt lên thực hành dạy học của họ. Trong thực tế, khoảng cách này ngày càng lớn theo thời gian, khi mà, trong bối cảnh phát triển nhanh chóng của khoa học kỹ thuật nói chung, của toán học nói riêng, các chương trình đào tạo gần đây có xu hướng muốn đưa thêm vào những nội dung hiện đại mới, trong khi phần lớn kiến thức toán dạy ở trường phổ thông đều ra đời muộn nhất là đầu thế kỷ 20.

Gói học phần đào tạo nghề thì tập trung giới thiệu :

- Các nguyên tắc dạy học,

- Các phương pháp dạy học,
- Các tình huống dạy học điển hình (dạy khái niệm, dạy định lý, dạy giải bài tập),
- Dạy học những chủ đề có trong chương trình phổ thông, như *vector – tọa độ*, hình học không gian, hàm số, phương trình... Trong phần này, nội dung chủ yếu được đề cập là *cách trình bày một số khái niệm (như vector, hàm số...)*, *mục đích dạy học*, và *sau đó là những lời khuyên cho thực hành sau này của giáo viên*. Hầu như rất ít yếu tố tri thức luận được nghiên cứu. Trừ số rất ít sinh viên giỏi được làm luận văn thay cho các môn thi tốt nghiệp, đại đa số còn lại không thực hiện một luận văn nghề nào.

Chương trình đào tạo không chỉ thiếu sự phối hợp chặt chẽ giữa trường đại học và trường phổ thông, mà còn không tính đến việc cho sinh viên tiếp xúc với các kết quả phân tích tri thức luận về những tri thức họ phải dạy sau này.

Hệ quả là nhiều giáo viên lầm tưởng rằng những kiến thức được quy định bởi chương trình và sách giáo khoa dường như là “trong suốt”, không có gì phải bàn cãi ngoài việc tìm cách dạy sao cho đạt mục đích đã đề ra trong chương trình, trong các văn bản, chỉ thị của Bộ Giáo dục và đào tạo. Nhưng, như chúng tôi đã phân tích, việc chỉ giới hạn trong thể chế dạy học để xem xét tri thức cần dạy như thế sẽ không cho phép giáo viên hình dung được đầy đủ cái gì có thể, hay ngược lại không thể, và cái gì cần phải xảy ra trong dạy học.

Ở cương vị một nhà đào tạo, chúng tôi thấy chương trình cần phải được bổ sung vào nhiều yếu tố, trong đó không thể không tính đến việc mang lại cho sinh viên sự phạm những kết quả phân tích tri thức luận. Đó là cơ sở để họ có thể vượt ra ngoài thể chế, so sánh các thể chế khác nhau, từ đó thiết kế những dự án dạy học theo một mục tiêu xác định.

4. Thay cho lời kết

Những năm gần đây người ta kêu gọi giáo viên đổi mới phương pháp dạy học nhằm tích cực hóa hoạt động học tập của học sinh. Gần đây hơn nữa lại là thay mục tiêu dạy học kiến thức bằng mục tiêu phát triển năng lực cho học sinh. Theo xu hướng này, điều cơ bản là phải thiết kế những tình huống tương thích với nội dung dạy học - tình huống mà kiến thức xây dựng được qua hoạt động giải quyết vấn đề nảy sinh từ đó chính là kiến thức cần dạy.

Vấn đề là tình huống như thế nào sẽ được xem như “tương thích với nội dung” dạy học, làm sao để xây dựng nó? Không có một phương pháp tổng quát cho phép tạo ra các tình huống dạy học như vậy. Để làm điều đó, giáo viên cần phải có sự hiểu biết về nghĩa của tri thức cần dạy, tình huống cơ sở mang lại nghĩa đó, những trở ngại cũng như những điều kiện cho sự hình thành tri thức, tính thỏa đáng hay không của sự lựa chọn thể chế...

Chương trình và nội dung đào tạo giáo viên phải tính đến việc mang lại cho giáo viên những hiểu biết này. Chính vì thế, chúng tôi xin nhắc lại ý kiến của Dorier:

“Mọi phân tích trong didactic đều phải bao gồm phần nghiên cứu tri thức luận. [...] Cho dù trọng lượng của phần phân tích tri thức luận có thể nhiều hay ít tùy theo kiểu phân tích, thì điều chủ yếu là không được bỏ qua nghiên cứu này. Điều đó không loại trừ các phương diện tâm lý, xã hội, hay văn hóa trong didactic, nhưng tất cả những phương diện

đó sẽ được xem xét trong mối quan hệ với phương diện tri thức luận khi bàn về giữa giáo viên và học sinh.” (Dorier, 1997, tr.15).

Quan điểm này chính là mấu chốt để phân biệt trường phái Didactic Toán hình thành ở Pháp với những trường phái truyền thống của ngành Lý luận và Phương pháp dạy học toán đã tồn tại nhiều năm ở nước ta.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Bessot A., Comiti C., Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2004), *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.
2. Lê Thị Hoài Châu (2003), *Khoa học luận và Didactic Toán*, *Tạp chí khoa học*, Đại học Sư phạm tp Hồ Chí Minh, Số 32 (2003).
3. Lê Thị Hoài Châu (2014), Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm, *Tạp chí khoa học*, Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh, số 65, tr.5-18.
4. Trần Thị Túy An (2007), *Nghiên cứu thực hành giảng dạy khái niệm xác suất trong các lớp song ngữ và các lớp phổ thông ở Việt Nam*, Luận văn thạc sỹ, Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
5. Ngô Minh Đức (2013), *Khái niệm đạo hàm trong dạy học Toán và Vật lý ở trường phổ thông*, Luận văn thạc sỹ, Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
6. Trần Thanh Hà (2015), *Dạy học khái niệm đạo hàm ở lớp 11 theo quan điểm tích hợp*, Luận văn thạc sỹ, Đại học Cần Thơ.
7. Lê Văn Tiến, Trần Anh Dũng (2012). *Các quan niệm về chương ngại trong dạy học toán ở phổ thông*. *Tạp chí Giáo dục*, số 285, kì 1 tháng 5.

Tiếng nước ngoài

8. Arsac G. (1992), L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/1, pp. 7-32., éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.
9. Artigue M. (1990), Epistémologique et Didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n°2.3, pp. 241-286, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.
10. Bachelard G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, 13° éd., Paris : Vrin, 1986.
11. Berté A. et al (2008), *Enseigner les nombres relatifs au collège*, Reperes – IREM, N°73 - octobre 2008.
12. Bosch M., Espinoza L. et Gascon J. (2002) El profesor como director de procesos de estudio: analisis de organizaciones didacticas espontaneas, *Recherche en Didactique des Mathématiques* N°23/1, pp.79 –135, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.
13. Bosch M. et Gascon J. (2005), La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques, In Mercier A., Margolinas C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques*, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 177-122.

14. Brousseau G. (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, in *Construction des savoirs, obstacles, conflits*, éd. Agence d'Arc inc., Montréal.
15. Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*, Thèse, Université Paris-Diderot (Paris 7) .
16. Chambris C. (2012) Consolidé la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile ? *Petit x*, N°89, pp. 5-31, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.
17. Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble. (1991 : 2^eème édition)
18. Dorier J-L. (1997), Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions, *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*.
19. Lalande A. (1991), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presse universitaire de France.
20. Lê Thị Hoài Châu (2010) *Étude didactique et épistémologique de l'enseignement du vecteur dans deux institutions. deux cas : la classe de dixième au Viêt-Nam et la classe de seconde en France*, Edition universitaire européenne.
21. Neyret R. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et reels dans les instituts universitaires de formation des maitres*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble.
22. Schneider M. et Gantois J-Y (2009), Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui ? Pourquoi ? Comment ? *Petit x*, N°79, pp. 5-21, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.
23. Sierpinska A. (1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 6.1, pp 5.

EVALUATION ET ANALYSE DIDACTIQUE DES MANUELS: CAS DU BRESIL

Marilena Bittar*

Résumé

L'importance des manuels scolaires aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant met en évidence le besoin d'analyser ce matériel. Comprendre ce qui est proposé dans les manuels scolaires permet, entre autres, d'approcher ce qui est véhiculé en classe et ainsi, mieux comprendre des difficultés d'apprentissages. Après plusieurs années de différents travaux encadrés autour des manuels scolaires j'ai esquissé un modèle pour les analyser, constitué des étapes suivantes, non nécessairement hiérarchiques : choix des manuels à être analysés; séparation entre partie cours et partie activités proposées ; élaboration des praxéologies mathématiques ; élaboration des praxéologies didactiques ; croisement des données. Dans ce texte, des exemples de recherches seront utilisés pour présenter et illustrer cette proposition. La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1998) est le principal outil méthodologique utilisé pour ces recherches.

Pourquoi analyser manuels scolaires?

L'importance des manuels scolaires est mise en évidence dans différents pays, de façon plus importante dans les dernières années débouchant sur la création, en 2015, de l'*International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT) avec la deuxième édition en mai 2017. Mon intérêt principal sur cet objet d'étude est dû au fait que ce qui est présent dans les manuels est très proche du savoir institutionnel comme le soutient Assude (1996). De plus, l'analyse des manuels scolaires est une « entrée indispensable pour comprendre le fonctionnement du système ou pour caractériser son état à un instant donné » (Chaachoua et Comiti, 2010).

Au sein du DDMat¹ nous menons, depuis environ dix ans, des investigations sur les choix mathématiques et didactiques des auteurs de manuels brésiliens destinés à des élèves de l'école publique de l'enseignement obligatoire. Pour cela le principal apport théorique et méthodologique est la théorie anthropologique du didactique – TAD (Chevallard, 1998), ce qui nous permet de mieux décrire et comprendre les choix mathématiques et didactiques des auteurs des manuels. De plus, cela permet, d'une part, d'interroger les pratiques enseignantes et, d'autre part, de comprendre des aspects de l'apprentissage des élèves.

Avant de continuer la discussion il faut situer le lecteur par rapport au contexte particulier des recherches décrites dans ce texte : le contexte brésilien.

Pour comprendre le contexte brésilien

Le Ministère de l'Éducation brésilien a mis en place, depuis plus de 20 ans, un programme d'évaluation des manuels pouvant être acquis par les établissements publics, dès l'école primaire jusqu'au lycée : il s'agit du *Programa Nacional do Livro Didático* (PNLD). Ce Programme date de plus de 30 ans, mais, avant 1996 il ne comprenait pas l'évaluation des manuels à être acheté par l'état : il s'agissait plutôt de l'acquisition et de la distribution de ce matériel. En 1996 la première évaluation pédagogique de manuels est mise en place. Elle avait comme objectif de fournir, aux

* Université Fédérale du Mato Grosso du Sud, Brazil.

¹ Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques, dirigé par l'auteur de ce texte.

élèves, des manuels scolaires satisfaisants selon certains critères de qualité, tels que l'exclusion de manuels comportant des erreurs conceptuels et/ou des préjugés. Pour cela, le Ministère a fait un appel aux maisons d'éditions pour la soumission de manuels ainsi qu'à des universités pour la coordination de l'évaluation. Il s'agit d'un processus long, mené par une équipe, chaque collection étant examinée, de façon aveugle, par deux évaluateurs, qui doivent, au bout d'environ deux mois, fournir un rapport à l'équipe responsable de l'évaluation. Après cette phase, la coordination du processus doit produire un *Guide* qui servira d'aide à l'enseignant au moment de réaliser son choix. Ce *Guide* contient, entre autres, des synthèses de l'évaluation de chaque collection approuvée dans le processus, ainsi que la fiche d'évaluation utilisée par les examinateurs. Le processus d'évaluation des manuels destinés aux élèves est cyclique : il se répète tous les trois ans et tous les ans, en alternance, on évalue des manuels de l'un des trois niveaux de l'enseignement obligatoire : maternelle, collège, lycée. J'ai eu l'opportunité de participer au PNLD à plusieurs reprises, depuis 2002, ce qui m'a poussé à creuser, de plus en plus, l'étude des manuels scolaires pour aller au delà de l'évaluation faite au sein du PNLD.

Évaluer ou analyser ?

Pour mieux caractériser la différence entre évaluation et analyse (des manuels) je propose une analogie avec le microscope optique et le microscope électronique. L'évaluation faite au PNLD fonctionne regarder un matériel avec un microscope optique, alors qu'un microscope électronique donne accès à des éléments « cachés » visibles seulement lorsqu'on utilise un outil très puissant. Dans les cas des recherches décrites dans ce texte, la TAD fonctionne comme un microscope électronique.

D'après Chevallard (1998) toute activité humaine, y compris l'activité mathématique, peut être décrite par le moyen d'une praxéologie, modélisée par un type de tâche T , une technique τ pour la résoudre, une technologie τ qui justifie la technique et une théorie Θ qui justifie la technologie. On a, ainsi, le quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$ qui permet de décrire une praxéologie (mathématique ou didactique). Il faut souligner que la modélisation dépend, au même temps, de la réalité modélisée, de l'institution et du chercheur².

Comment s'y prendre pour les analyses de manuels ?

Après avoir encadré environ une dizaine de recherches autour de l'analyse des manuels à l'aide de la TAD, et être motivée par des collègues chercheurs à expliciter la façon dont ces études sont faites, j'ai décrit un modèle d'analyse constitué des étapes suivantes : choix des manuels ; séparation entre *Partie Cours* et *Partie Activités Proposées* ; élaboration des praxéologies mathématiques ; élaboration des praxéologies didactiques ; croisement des données. Par la suite, j'illustre chacune de ces étapes.

Choix des manuels

Le choix du matériel qui va constituer la source d'étude et de production des données est fait en fonction des objectifs de recherche. Ainsi, cela peut varier d'un seul manuel scolaire à plusieurs manuels d'un même niveau ou à une collection d'un même auteur destiné à un cycle de la scolarité. Je l'illustre ci-après par trois recherches.

² L'objectif de ce texte n'est pas de présenter la TAD. Pour le lecteur intéressé je renvoie aux textes indiqués dans les références.

L'objectif du travail de Nogueira (2008) est de caractériser l'enseignement de l'algèbre en classe de quatrième, année scolaire où débute officiellement cet enseignement. Pour regarder au plus près ce qui est proposé dans cette année scolaire et cela dans le temps disponible pour la recherche, l'auteur choisit trois manuels parmi ceux du PNLD 2008 : ces trois manuels offrent différentes approches de l'enseignement de l'algèbre identifiées grâce à la lecture du *Guide* de 2008.

Ayant l'objectif d'étudier la présentation du champ additif à l'école primaire qui occupe une place significative dans les manuels durant l'ensemble des 5 années de ce cycle, Kaspary (2014) choisit une unique collection : la plus vendue du PNLD 2013.

Enfin Oliveira (2010) a pour objectif principal non pas l'analyse d'un champ de savoir mais celle du rapport entre la formation initiale et la pratique d'un enseignant débutant. Cet objectif l'a emmené à choisir d'analyser le manuel utilisé par l'enseignant. Signalons que Oliveira a utilisé en plus de la TAD, pour l'analyse des praxéologies du manuel et de l'enseignant, les catégories de connaissances nécessaires pour l'enseignant issues des études de Shulman (1986 ; 2001).

Séparation entre Partie Cours et Partie Activités Proposées

Par **Cours** je considère tout ce qui n'est pas laissé à la charge de l'élève. C'est à dire, les définitions, propriétés, exercices résolus, les informations fournies dans des petits encadrés, etc. L'analyse de cette partie permet de modéliser des types de tâches importantes pour les auteurs du manuel aussi bien que les techniques attendues pour les résoudre³. C'est de plus dans cette partie que l'on peut rencontrer le bloc technologico-théorique. Je prends un exemple issu de la recherche de Nogueira (2008) à propos d'une façon de résoudre l'équation $3x=2x+100+50$ (figure 1). Les pas de la technique proposée sont justifiés par analogie avec une balance en équilibre⁴.

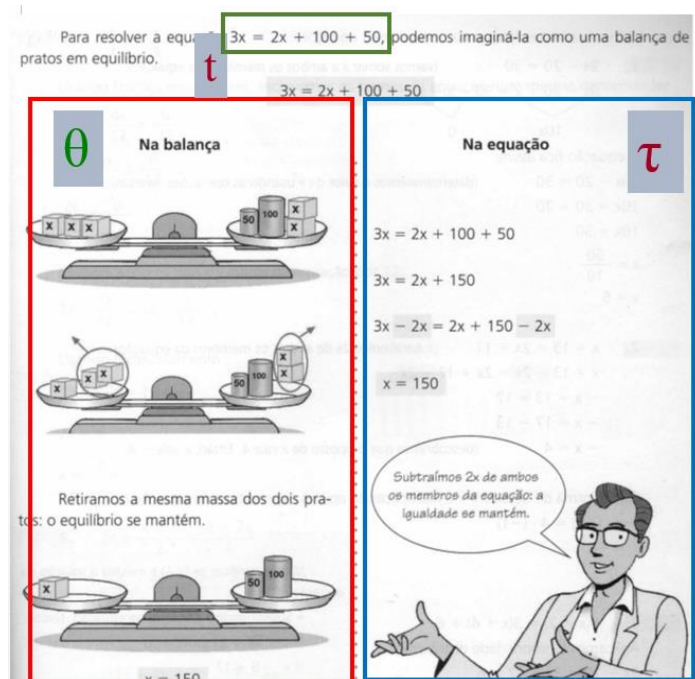


Figure 1 : Résoudre une équation du 1er degré du type $ax+b=cx+d$ (Nogueira, 2008)

³ De plus, comme un des effets du contrat didactique (Brousseau, 1986), nous savons que les élèves cherchent dans cette partie des indications sur la façon de résoudre les activités proposées.

⁴ Il faut remarquer que dans le manuel il n'y a pas de discussion sur la portée de cette analogie.

L'analyse du **Cours** fournit, ainsi, des éléments pour l'étude des activités proposées, comme on le verra plus loin dans ce texte.

Les **Activités Proposées** peuvent être des exercices d'application immédiate d'une technique, ou non. Chaque activité est analysée en cherchant à identifier la tâche (pour l'élève) et la technique attendue. Pour cela l'étude de la partie cours est essentielle, mais on peut aussi se faire aider par le manuel de l'enseignant⁵, qui peut contenir les résolutions de certaines activités ainsi que des commentaires d'aide à l'enseignant.

Lors de l'analyse des activités proposées, nous prenons aussi en compte la quantité de tâches de chaque type et la mise en œuvre des techniques : cet indicateur permet de mesurer l'importance relative accordée par les auteurs des manuels aux tâches et techniques identifiées. Je prends l'exemple de la recherche de Ramalho (2016) qui étudie la trigonométrie dans des manuels de troisième. Après une première analyse l'auteur s'est rendu compte qu'il y avait un élément fort dans les tâches qu'il était nécessaire de mettre en évidence pour mieux comprendre le choix des auteurs des manuels. Cet élément concernait la présence dans les énoncés d'une certaine contextualisation. Ainsi les types de tâches ont été regroupés en deux groupes : G1 – Résoudre une activité autour d'un triangle rectangle dans un **contexte extra-scolaire** et G2 – Résoudre une activité autour d'un triangle rectangle dans un **contexte mathématique**. En quantifiant le nombre de tâches appartenant à chaque groupe Ramalho a produit un graphe (figure 2). Entre autres l'auteur a conclu que même si les praxéologies mathématiques ne diffèrent guère d'un manuel à l'autre, les choix didactiques ne coïncident pas. Prenons les manuels L1 et L2 : pour le premier environ 68,6% des activités contiennent un texte et une figure qui renvoie à un contexte extra-mathématique. En revanche, le deuxième fait le choix contraire : environ 82,6% des activités n'ont aucune référence à un contexte hors mathématiques. De plus, L3 et L4 font un choix proche de celui L2. L1 semble plus proche de ce qui est attendu par le ministère de l'éducation qui prescrit, dans de documents officiels, de travailler sur des situations contextualisées. La tentative de répondre à cette demande finit par produire des situations pseudo-contextualisées, comme nous le verrons dans un exemple plus loin dans ce texte.

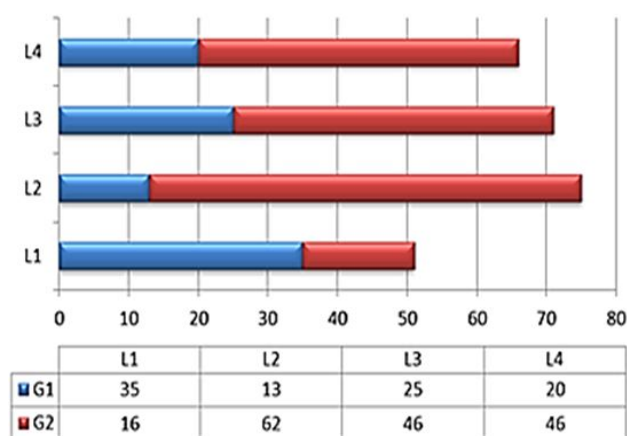


Figure 2 : Tâches appartenant aux deux groupes de tâches dans 4 manuels (Ramalho, 2016)

⁵ Les Manuels didactiques achetés par le Ministère de l'Éducation doivent associer un Guide de l'enseignant au Manuel de l'élève accompagné d'un supplément spécifique pour l'enseignant avec, entre autres, les choix pédagogiques, des suggestions d'activités complémentaires et des textes d'aide au travail quotidien du professeur.

ELABORATION DE L'ORGANISATION MATHÉMATIQUE

Tout d'abord commençons par deux remarques importantes par rapport aux praxéologies mathématiques :

1) Les techniques sont aussi des tâches - Par exemple, *Résoudre une équation du premier degré* est une des techniques pour le type de tâches *Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues* ;

2) Les éléments de la praxéologie peuvent changer de position. Ce qui est technique à un moment peut jouer le rôle d'une technologie pour une autre technique.

Des praxéologies *a priori*

Comment modéliser des tâches ? Qu'est-ce qu'on regarde ? Voici une des premières difficultés lors du démarrage de l'analyse. Ainsi, s'il y a la possibilité d'avoir une grille d'analyse pour se faire aider, il faut le faire. De plus, il y a beaucoup de recherches déjà faites qui peuvent (et doivent) être considérées. Je cite la recherche de Kaspary (2014) sur le champ additif à l'école primaire. Avec un tel objet mathématique l'étude des situations modélisées par Gérard Vergnaud (1990) au sein de la Théorie des Champs Conceptuels (TCC) est incontournable. Ainsi, Kaspary a, tout d'abord, fait une relecture des situations afin de construire une praxéologie *a priori*, constituée de types de tâches modélisées à partir des situations décrites par la TCC. Il s'agit, ainsi, de types de tâches *a priori* qui fonctionnent comme une grille pour l'analyse. Ceci ne veut pas dire que tous les types de tâches *a priori* seront rencontrés dans les manuels. De plus, d'autres (types de) tâches peuvent vivre dans l'institution, comme Kaspary a pu constater lors de son analyse. Par exemple, la tâche *Calculer $25+13$* ne fait pas partie des catégories de situations de la TCC mais est très présente à l'école élémentaire.

Des techniques auto-technologiques

Lorsqu'il s'agit d'analyser des manuels destinés aux premières années scolaires il est assez commun de rencontrer des tâches dont la technique est auto-explicative. Dans ce cas, Chevallard (1998) parle de technique auto-technologique. Je cite la recherche de Almeida (2015) sur les polygones à l'école primaire et j'en emprunte une activité où l'élève doit compter le nombre de sommets, de faces et d'arêtes d'un cube. Pour cela, il doit manipuler le cube et compter, un par un, sans oublier et sans compter deux fois le même sommet (face ou arête). Cette technique, la seule disponible à ce moment, ne demande pas d'explication.

Figure 3 : Quantité de sommets d'un cube (Almeida, 2015)

The image shows a worksheet with a red-bordered box containing the following text:

3 COMPLETE COM INFORMAÇÕES SOBRE O CUBO.

- NÚMERO DE VÉRTICES: 8
- NÚMERO DE FACES: 6
- NÚMERO DE ARESTAS: 12

Below the box, it says "AGORA RESPONDA:" followed by a blue-bordered box containing:

A) COMO SÃO AS FACES DO CUBO?

Arrows indicate that the information in the red box is used to answer the question in the blue box.

A propos du bloc technologico-théorique

Il faut être toujours vigilant sur le fait que tout ce que l'on conclut est relatif à des institutions bien définies. Ainsi, ce que l'on peut attendre comme justification mathématique à un niveau scolaire peut ne pas être accepté à un autre niveau. De plus, la façon de le faire va aussi changer. Par exemple, en classe de CE2 les propriétés du système de numération sont mobilisées pour justifier l'algorithme de l'addition, et l'explication est donnée dans des bulles simulant une conversation entre collègues (figure 4).

Figure 4 : Identification du bloc technologico-théorique (Kaspary, 2014)



Il y a aussi des situations dont le bloc technologico-théorique « mathématique », ne peut pas vivre dans l'institution car il n'y a pas les conditions écologiques. Prenons l'exemple de la recherche de Gonçalves (2016) sur les nombres relatifs au collège. Pour justifier les propriétés des signes autour de la multiplication les auteurs des manuels font des choix didactiques tels que l'utilisation de concepts de température ou du niveau de l'eau de la mer parmi d'autres. Ainsi, il y a bien un bloc technologico-théorique, mais qui n'est pas celui qui est à l'origine de ces propriétés. Il s'agit de créations didactiques (Chevallard, 1991).

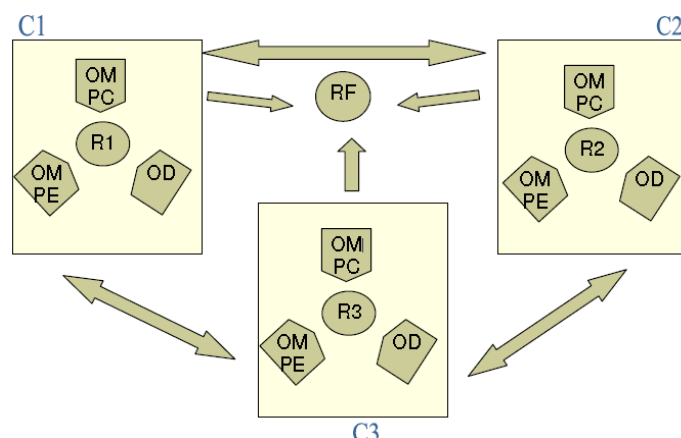
ELABORATION DES PRAXEOLOGIES DIDACTIQUES

Pour répondre à la question « Comment enseigner cette œuvre ? » nous modélisons la praxéologie didactique à partir des 6 moments d'études (Chevallard, 1998) : première rencontre avec l'organisation O enjeu d'étude ; exploration du type de tâches T_i et de l'élaboration d'une technique τ_i ; constitution de l'environnement technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ relatif à τ_i ; travail de la technique ; institutionnalisation ; évaluation. L'analyse de ces moments permettra, entre autres, d'identifier l'approche didactique proposée par les auteurs des manuels. Par exemple, la valorisation du moment dédié au travail avec la technique peut indiquer un choix plutôt techniciste.

CROISEMENT DES DONNEES

Après avoir modélisée des praxéologies (mathématiques et didactiques), il faut procéder au croisement des données pour chercher des éléments de réponses aux question posées, ce que Nogueira (2008) a représenté par le schéma suivant :

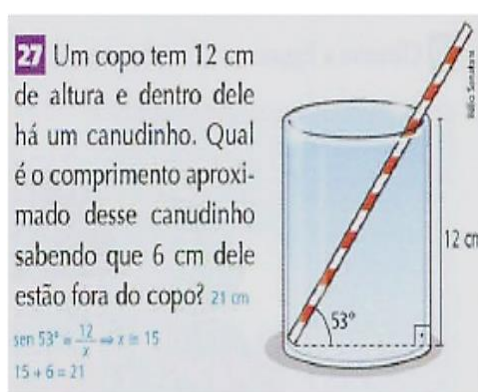
Figure 5 : Croisement de praxéologies modélisées (Nogueira, 2008)



Ce schéma symbolise l'analyse à l'intérieur de chaque collection ainsi que la confrontation entre les résultats obtenus. Le croisement des données a permis à Nogueira de constater une évolution des praxéologies dans les 3 collections analysées. L'une de ces conclusions est que le passage de l'arithmétique à l'algèbre n'est pas favorisé dans une des collections étudiées, à cause de l'absence de la praxéologie qui favorise ce passage.

Au cours de plusieurs analyses déjà réalisées au sein du DDMat, nous avons pu constater aussi l'existence de praxéologies de vie très courte, ce qui nous a conduit à réfléchir sur les causes possibles de leur présence et de la disparition rapide de ces praxéologies. Deux explications peuvent être avancées : faire vivre une autre praxéologie (la praxéologie envisagée) et répondre aux demandes de la noosphère. La figure 6 illustre cette dernière explication : il s'agit d'une activité proposée en classe de troisième pour faire étudier la trigonométrie. Cette situation artificielle en ce qui concerne le contexte semble être présente dans le manuels seulement pour répondre une demande de la noosphère : la trigonométrie est utile pour résoudre des problèmes « pratiques », alors il faut contextualiser son enseignement.

Figure 6 : Retombées de la noosphere (Ramalho, 2016)⁶



⁶ Un verre a 12 cm d'hateur et à l'intérieur Il y a une paille. Quelle est la taille aproximée de cete paille sacant que6 cm de cette paille est en « dehors » du verre ?

Pour conclure, il faut souligner que dans ce texte j'ai traité surtout de la modélisation des praxéologies mathématiques, laissant les praxéologies didactiques pour un autre moment. De même, bien d'autres éléments théoriques importants pour l'analyse, tels que les ostensifs et non-ostensifs, les niveaux de détermination et de co-détermination didactique, n'ont pas trouvé leur place. Et pourtant, leurs études peuvent être cruciales pour comprendre l'activité mathématique. Alors, je vous dit « à suivre... »

REFERENCES

1. Almeida, M. S. M. (2015). *A Articulação entre o Ensino de Polígonos e Poliedros em uma Coleção de Livros Didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
2. Assude, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/1, 47-72.
3. Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
4. Chevallard, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
5. Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble: La pensée Sauvage.
6. Freitas, M. V. C. (2015). *Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em uma coleção de livros didáticos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.
7. Gonçalves, K. R. (2016). *A teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
8. Kaspary, D. (2014). *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.
9. Nogueira, R. C. S. (2008). *A Álgebra nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: uma análise praxeológica*. Dissertação de Mestrado em Educação. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
10. Oliveira, A. B. de. (2010). *Prática pedagógica e conhecimentos específicos: um estudo com um professor de matemática em início de docência*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

11. Ramalho, L. V. (2016). *Trigonometria em livros didáticos do 9º do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática*. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
12. Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*, Educational Researcher.
13. Shulman, L. (2001) Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*. Tradução: Alberto Ide. 57(1), 163-196.
14. Vergnaud, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

ĐÁNH GIÁ VÀ PHÂN TÍCH SÁCH GIÁO KHOA TỪ CÁCH TIẾP CẬN CỦA DIDACTIC: TRƯỜNG HỢP BRA-XIN

Marilena Bittar*

Tóm tắt

Tầm quan trọng của sách giáo khoa dùng trong nhà trường đối với học sinh cũng như đối với giáo viên dẫn đến nhu cầu phải phân tích tài liệu này. Hiểu những gì được đề nghị trong sách giáo khoa sẽ cho phép tiếp cận các hiện tượng xảy ra trong lớp học, và nhờ đó mà cũng hiểu rõ hơn những khó khăn gặp phải trong học tập. Sau nhiều năm làm việc trong khuôn khổ những công trình khác nhau liên quan đến các sách giáo khoa dùng trong nhà trường, tôi đã phác thảo một mô hình để phân tích chúng. Mô hình này được tạo thành từ các giai đoạn sau – không nhất thiết phải theo đúng thứ tự: chọn sách giáo khoa cần phân tích; tách phần lý thuyết khỏi phần các hoạt động được đề nghị trong sách; xây dựng các praxéologie toán học; xây dựng các praxéologie dạy học; xác định những điểm giao của dữ liệu. Trong bài báo này, một số ví dụ nghiên cứu sẽ được sử dụng để trình bày và minh họa cho mô hình đó. Thuyết nhân học trong Didactic (Chevallard, 1998) là công cụ chủ yếu về mặt phương pháp luận cho những nghiên cứu này.

Résumé

L'importance des manuels scolaires aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant met en évidence le besoin d'analyser ce matériel. Comprendre ce qui est proposé dans les manuels scolaires permet, entre autres, d'approcher ce qui est véhiculé en classe et ainsi, mieux comprendre des difficultés d'apprentissages. Après plusieurs années de différents travaux encadrés autour des manuels scolaires j'ai esquissé un modèle pour les analyser, constitué des étapes suivantes, non nécessairement hiérarchiques: choix des manuels à être analysés; séparation entre partie cours et partie activités proposées; élaboration des praxéologies mathématiques; élaboration des praxéologies didactiques; croisement des données. Dans ce texte, des exemples de recherches seront utilisés pour présenter et illustrer cette proposition. La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1998) est le principal outil méthodologique utilisé pour ces recherches.

Vì sao phân tích sách giáo khoa?

Tầm quan trọng của các sách giáo khoa đã được thừa nhận ở nhiều nước khác nhau, và chúng càng được coi trọng hơn trong những năm gần đây, kể từ Hội thảo quốc tế về Nghiên cứu và Phát triển sách giáo khoa toán (ICMT) tổ chức năm 2015, rồi lần thứ hai vào tháng 5 năm 2017. Mối quan tâm chủ yếu của tôi về đối tượng nghiên cứu này hình thành từ ghi nhận là những gì được trình bày trong sách giáo khoa rất gần với tri thức thể chế, như Assude (1996) đã ủng hộ. Hơn nữa, phân tích sách giáo khoa là một “cách thức không thể bỏ qua để hiểu hoạt động của hệ thống hoặc để làm rõ đặc trưng của trạng thái của nó ở một thời điểm xác định” (Chaachoua và Comiti, 2010).

Tham gia nhóm nghiên cứu DDMat¹, từ khoảng mười năm nay, chúng tôi đã thực hiện nhiều công trình về những lựa chọn toán học và lựa chọn sự phạm của các tác giả

* Đại học Fédérale du Mato Grosso du Sud, Brazil.

¹ Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques (Nhóm nghiên cứu Didactic Toán), do tác giả của bài viết này phụ trách.

sách giáo khoa Bra-xin dành cho học sinh trường công lập trong hệ thống giáo dục bắt buộc. Đối với các nghiên cứu ấy, đóng góp chủ yếu về lý luận và phương pháp là thuyết nhân học của Didactic (Théorie Anthropologique du Didactique – TAD (Chevallard, 1998)). Lý thuyết TAD cho phép chúng tôi mô tả rõ hơn và hiểu những lựa chọn về toán học cũng như về sự phạm của các tác giả sách giáo khoa. Hơn thế nữa, nó còn cho phép một mặt là khảo vấn thực hành dạy học và mặt khác là hiểu các phương diện học tập của học sinh.

Trước khi tiếp tục trình bày, cần phải giới thiệu với độc giả bối cảnh đặc biệt của những nghiên cứu được mô tả trong bài viết này: bối cảnh ở Bra-xin.

Để hiểu bối cảnh ở Bra-xin

Từ hơn 20 năm nay, Bộ Giáo dục Bra-xin đã triển khai một chương trình đánh giá những sách giáo khoa có thể được chấp nhận bởi các trường công lập, từ tiểu học đến Trung học phổ thông: đó là chương trình quốc gia về sách giáo khoa (Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)). Chương trình này thực ra đã có từ hơn 30 năm, nhưng trước 1996 thì người ta không đánh giá những sách giáo khoa mà nhà nước đã mua: vấn đề chỉ là mua và phân phối những sách này. Năm 1996 thì lần đánh giá sự phạm đầu tiên về các sách giáo khoa được triển khai. Mục đích của việc làm này là để cung cấp cho học sinh những sách giáo khoa đáp ứng một số tiêu chuẩn về chất lượng, loại bỏ những sách có sai lầm về quan niệm và/hoặc có thành kiến. Để làm điều đó, Bộ Giáo dục đã kêu gọi các nhà xuất bản phối hợp với các trường đại học đánh giá sách giáo khoa. Quá trình kéo dài, do một ê-kíp thực hiện, trong đó mỗi bộ sách đã giấu tên tác giả được đánh giá bởi hai người. Khoảng hai tháng sau, hai người này nộp báo cáo cho ê-kíp chịu trách nhiệm đánh giá. Pha đánh giá phối hợp đó phải đi đến chỗ tạo ra được một cuốn sách *Hướng dẫn* cho giáo viên sử dụng một khi sách giáo khoa được chọn. Nội dung của cuốn *Hướng dẫn* gồm nhiều vấn đề, trong đó có phần tổng hợp đánh giá từng bộ sách giáo khoa đã được xét duyệt qua quá trình đánh giá cũng như những phiếu đánh giá đã được sử dụng. Quá trình đánh giá sách giáo khoa tiến hành theo chu kỳ 3 năm, thực hiện luân phiên, mỗi năm xem xét một trong ba bậc học bắt buộc: mẫu giáo, trung học cơ sở, trung học phổ thông. Tôi đã có cơ hội tham gia PNLD nhiều lần, kể từ năm 2002. Điều đó đã thôi thúc tôi đào sâu nghiên cứu sách giáo khoa, vượt quá sự đánh giá thực hiện trong lòng PNLD.

Đánh giá hay phân tích?

Để làm rõ hơn sự khác nhau giữa đánh giá và phân tích (sách giáo khoa) tôi dùng sự so sánh tương tự giữa kính hiển vi quang học và kính hiển vi điện tử. Việc đánh giá của PNLD hoạt động giống như người ta nhìn đối tượng với một cái kính hiển vi quang học, trong khi với một cái kính hiển vi điện tử thì có thể tiếp cận những yếu tố bị “che giấu”, chỉ nhìn thấy được khi sử dụng một công cụ rất mạnh. Với những nghiên cứu bàn đến trong bài viết này, TAD hoạt động như một kính hiển vi điện tử.

Theo Chevallard (1998) thì mọi hoạt động của con người, kể cả hoạt động toán học, đều có thể được mô tả bởi một praxéologie - khái niệm được mô hình hoá qua một kiểu nhiệm vụ T , một kỹ thuật τ để giải quyết T , một công nghệ θ giải thích cho kỹ

thuật τ và một lý thuyết Θ giải thích công nghệ. Như vậy, ta có bộ bốn $[T, \tau, \theta, \Theta]$ dùng để mô tả một praxéologie (toán học hay dạy học). Cần nhấn mạnh là sự mô hình hoá phụ thuộc cùng lúc vào thực tế được mô hình hoá, vào thể chế và vào nhà nghiên cứu².

Sử dụng các praxéologie như thế nào để phân tích sách giáo khoa ?

Sau khi đã hướng dẫn khoảng chục nghiên cứu liên quan đến việc phân tích sách giáo khoa theo cách tiếp cận của TAD, và được một số đồng nghiệp - nhà nghiên cứu đề nghị trình bày rõ cách thức tiến hành, tôi đã mô tả một mô hình phân tích bao gồm các giai đoạn sau: chọn sách giáo khoa; tách phần *lý thuyết* khỏi phần *các hoạt động được đề nghị* trong sách; xây dựng các praxéologie toán học (praxéologie mathématique); xây dựng các praxéologie dạy học (praxéologie didactique); xác định những điểm giao của dữ liệu. Trong phần tiếp theo tôi sẽ minh hoạ cho từng giai đoạn.

CHỌN SÁCH GIÁO KHOA

Sự lựa chọn sách giáo khoa để phân tích được thực hiện tùy theo mục đích nghiên cứu. Vì vậy, có thể chọn một sách giáo khoa duy nhất, hoặc nhiều sách dùng cho cùng một lớp, hoặc là một bộ sách của cùng tác giả viết cho một cấp học.

Nogueira (2008) có mục đích nghiên cứu những đặc trưng của việc dạy học đại số ở lớp 8, năm học bắt đầu của nghiên cứu, theo các tài liệu chính thức. Để xem xét một cách sát nhất (ở chừng mực có thể) những gì được đề nghị trong năm học này, và căn cứ điều kiện thời gian dành cho việc nghiên cứu, tác giả đã chọn ba sách giáo khoa trong số những sách mà PNLD đánh giá. Ba sách giáo khoa này có những cách khác nhau để tiếp cận nội dung dạy học – điều đó được xác định nhờ đọc cuốn *Hướng dẫn* năm 2008.

Với mục đích nghiên cứu trường cộng tính ở tiểu học³, được dạy suốt 5 năm và có một vị trí quan trọng trong sách giáo khoa, Kaspary (2014) đã chọn bộ sách bán chạy nhất trong số những bộ mà PNLD xem xét năm 2013.

Để kết thúc phần này tôi lấy thêm ví dụ về một nghiên cứu có mục đích chủ yếu không phải là phân tích sách giáo khoa mà là xem xét mối quan hệ giữa đào tạo ban đầu với thực hành của một giáo viên mới vào nghề (Oliveira, 2010). Với mục đích đó, nhà nghiên cứu thấy phải phân tích sách giáo khoa mà giáo viên sử dụng. Tôi muốn nhấn mạnh rằng ngoài TAD được sử dụng để phân tích các praxéologie có trong sách giáo khoa và do giáo viên xây dựng, nhà nghiên cứu còn sử dụng công trình của Shulman (1986; 2001) về cơ sở kiến thức cần thiết đối với giáo viên.

TÁCH PHẦN LÝ THUYẾT VỚI PHẦN CÁC HOẠT ĐỘNG ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ

Tôi quan niệm phần **Lý thuyết** là tất cả những gì không để cho học sinh phải chịu trách nhiệm. Đó là các định nghĩa, tính chất, bài tập có lời giải, những thông tin cung cấp trong các ô nhỏ... Phân tích phần này cho phép mô hình hoá những kiểu nhiệm vụ

² Mục đích của bài viết này không phải là giới thiệu TAD. Mời bạn đọc quan tâm đến nó tìm đọc những công trình tôi đã nêu trong phần Tài liệu tham khảo.

³ Thuật ngữ “trường cộng tính” được dùng theo cách nói của Gérard Vergnaud, bao gồm tất cả những tình huống cho phép đưa vào một trong hai phép toán cộng và trừ. (ND)

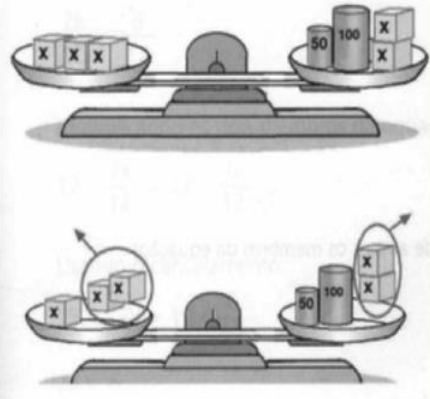
được tác giả sách giáo khoa xem là quan trọng và những kỹ thuật để giải quyết chúng⁴. Ở đây ta cũng có thể tìm thấy khối công nghệ - lý thuyết. Để minh họa, tôi sẽ lấy một ví dụ từ nghiên cứu của Nogueira (2008) về cách giải phương trình $3x = 2x + 100 + 50$ (hình 1). Các bước của kỹ thuật do sách giáo khoa đề nghị được giải thích như sự tương tự với một cái cân ở trạng thái cân bằng⁵.

Hình 1: Giải phương trình bậc nhất dạng $ax+b=cx+d$ (Nogueira, 2008)

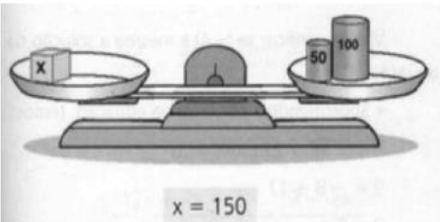
Để giải phương trình $3x = 2x + 50 + 100$ ta có thể tưởng tượng như những đĩa cân cân bằng.

$$3x = 2x + 50 + 100$$

Cân cân



Ta đã lấy ra cùng một khối lượng từ hai đĩa cân :
sự cân bằng vẫn được giữ nguyên



$x = 150$

Phương trình

$$3x = 2x + 100 + 50$$

$$3x = 2x + 150$$

$$3x - 2x = 2x + 150 - 2x$$

$$x = 150$$

Rút $2x$ từ hai vế của phương trình : phần còn lại vẫn bằng nhau



Như sẽ thấy trong phần tiếp theo, phân tích phần **Lý thuyết** sẽ cung cấp những yếu tố để nghiên cứu các hoạt động mà sách giáo khoa đề nghị cho học sinh thực hiện.

Phần **Các hoạt động được đề nghị** có thể là bài tập áp dụng - trực tiếp hay không - một kỹ thuật. Mỗi hoạt động được phân tích bằng cách xác định nhiệm vụ (đối với học sinh) và kỹ thuật mà sách giáo khoa mong đợi. Để làm điều đó thì ta dựa chủ yếu vào kết quả phân tích phần lý thuyết, ngoài ra cũng có thể tham khảo sách viết cho giáo viên⁶, vì trong đó có thể có lời giải cho một số hoạt động cũng như những bổ sung để giúp đỡ giáo viên.

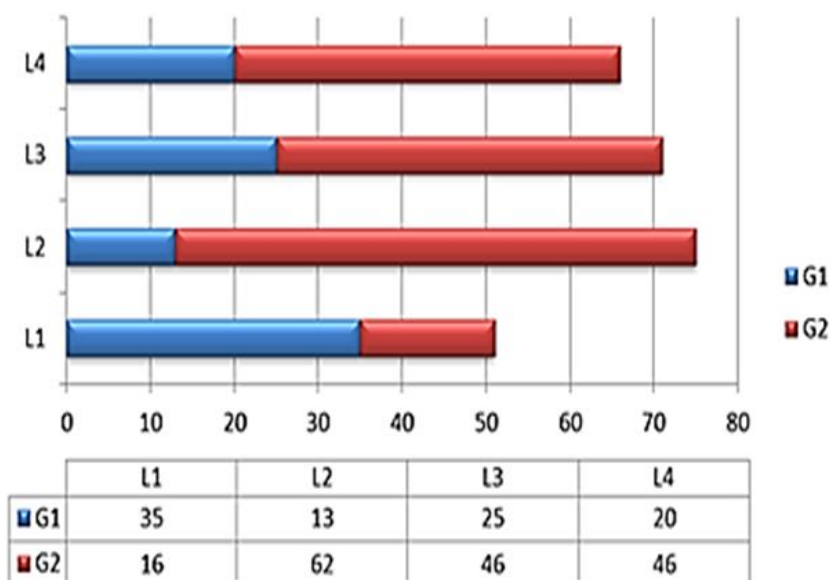
⁴ Hơn thế, như một trong các hiệu ứng của Hợp đồng dạy học (Contrat didactique - Brousseau, 1986), ta biết rằng học sinh sẽ tìm trong phần này những chỉ dẫn để giải quyết hoạt động đã nêu.

⁵ Cần lưu ý rằng trong sách giáo khoa không có phần thảo luận về tầm quan trọng của sự tương tự đã được sử dụng.

⁶ Các sách giáo khoa cho học sinh được Bộ Giáo dục mua phải có kèm theo sách Hướng dẫn cho giáo viên, trong đó có những bổ sung đặc biệt, với những lựa chọn sự phạm, những gợi ý về các hoạt động có thể thêm vào và những văn bản giúp giáo viên làm việc hàng ngày.

Khi phân tích những hoạt động được đề nghị cần phải tính đến số lượng nhiệm vụ trong mỗi kiểu cũng như việc vận dụng kỹ thuật. Điều đó là cần thiết để xác định những yếu tố được tác giả sách giáo khoa xem là quan trọng. Tôi sẽ lấy ví dụ trích từ công trình của Ramalho (2016), người đã nghiên cứu chủ đề lượng giác trong các sách giáo khoa lớp 9. Sau khi phân tích sơ bộ, tác giả thấy có một yếu tố được chú trọng trong các nhiệm vụ, và cho rằng cần phải xem xét kỹ hơn để hiểu quan điểm lựa chọn của các sách giáo khoa. Đó là sự có mặt (trong đề bài toán) của yếu tố đặt trong một bối cảnh nào đó. Như vậy, các kiểu nhiệm vụ được phân thành hai nhóm: G1 – giải quyết một vấn đề liên quan đến tam giác vuông, trong **bối cảnh ngoài học đường**, và G2 – giải quyết một vấn đề liên quan đến tam giác vuông, trong **bối cảnh toán học**. Từ số lượng nhiệm vụ thuộc vào mỗi nhóm, Ramalho đã vẽ một biểu đồ (hình 2). Tác giả kết luận rằng nếu như các praxéologie toán học không khác nhau bao nhiêu giữa các sách giáo khoa, thì sự lựa chọn sự phạm lại không trùng nhau. Ví dụ như hai sách giáo khoa L1 và L2: trong L1 khoảng 68,8% hoạt động về lượng giác có chứa (dù theo cách nhân tạo) một đề bài, một hình vẽ cho phép đặt vấn đề trong bối cảnh ngoài toán học. L2 thì chọn ngược lại: khoảng 82,6% hoạt động không đòi hỏi bất cứ một sự tham chiếu nào vào bối cảnh ngoài toán học. Hơn thế, L3 và L4 cũng có sự lựa chọn gần giống như L2. Điều đó chứng tỏ L1 dường như đáp ứng tốt hơn mong muốn mà Bộ Giáo dục đã nói rõ trong các văn bản chính thức về nhu cầu làm việc trong các tình huống gắn với bối cảnh thực tiễn. Mong muốn này dẫn đến chỗ tạo ra những tình huống giả thực tiễn, như chúng ta sẽ thấy trong một ví dụ phía dưới của bài viết này.

Hình 2: Những nhiệm vụ thuộc hai nhóm trong 4 sách giáo khoa (Ramalho, 2016)



XÂY DỰNG CÁC TỔ CHỨC TOÁN HỌC

Trước hết cần phải nói đến ít nhất là hai lưu ý quan trọng đối với các praxéologie toán học:

1) Các kỹ thuật cũng là những nhiệm vụ. Chẳng hạn, *Giải phương trình bậc nhất* là một kỹ thuật đối với kiểu nhiệm vụ *Giải hệ phương trình tuyến tính hai ẩn*;

2) Các yếu tố của praxéologie có thể thay đổi vị trí. Yếu tố kỹ thuật ở thời điểm này có thể đóng vai trò công nghệ cho một kỹ thuật khác.

Những praxéologies *tiên nghiệm*

Mô hình hoá các nhiệm vụ như thế nào? Cần xem xét cái gì? Đây là một trong những khó khăn đầu tiên khi khởi đầu phân tích. Như vậy, nếu có thể có một lưới phân tích để giúp đỡ cho việc này thì nên xây dựng lưới đó. Hơn thế, có nhiều nghiên cứu đã thực hiện có thể (và cần phải) được xem xét. Tôi trích ở đây nghiên cứu của Kaspary (2014) về trường cộng tính dạy ở tiểu học. Với một đối tượng toán học như vậy, không thể bỏ qua việc nghiên cứu các tình huống được Gérard Vergnaud (1900) mô hình hoá trong Lý thuyết Trường quan niệm (Théorie de Champs Conceptuel - TCC). Vì thế, trước hết Kaspary đã xem lại các tình huống để có một praxéologie *tiên nghiệm* (*a priori*), tạo thành từ các tình huống được mô hình hoá từ những tình huống mà TCC mô tả. Vấn đề là những kiểu nhiệm vụ *tiên nghiệm*, có chức năng như một lưới dùng cho việc phân tích sách giáo khoa. Điều đó không có nghĩa là trong sách giáo khoa ta sẽ gặp tất cả các kiểu nhiệm vụ *tiên nghiệm*. Hơn thế nữa, còn có những kiểu nhiệm vụ khác có thể tồn tại trong thể chế, như Kaspary đã ghi nhận trong phân tích của mình. Chẳng hạn, nhiệm vụ “*Tính $25 + 13$* ” không nằm trong phạm trù các tình huống của TCC nhưng có mặt khá nhiều ở trường tiểu học.

Những kỹ thuật có công nghệ tự động

Khi phân tích sách giáo khoa dành cho các lớp bé của tiểu học, ta thấy một hiện tượng chung là có những kiểu nhiệm vụ mà kỹ thuật được giải thích một cách tự nhiên, có thể chấp nhận được. Trong trường hợp này Chevallard gọi là kỹ thuật có công nghệ tự động (autotecnologique). Tôi sẽ đưa ra một ví dụ lấy từ nghiên cứu của Almeida (2015) về các đa giác dạy ở tiểu học, bằng cách xem xét hoạt động trong đó học sinh phải đếm số đỉnh, số mặt, và số cạnh bên của một hình lập phương. Để đếm, học sinh phải cầm hình lập phương và đếm từng đỉnh (mặt, cạnh) một, không bỏ sót và cũng không đếm một đỉnh (mặt, cạnh) hai lần. Đây là kỹ thuật duy nhất ở thời điểm đó, không đòi hỏi phải giải thích.

Hình 3: Số đỉnh của một hình lập phương (Almeida, 2015)



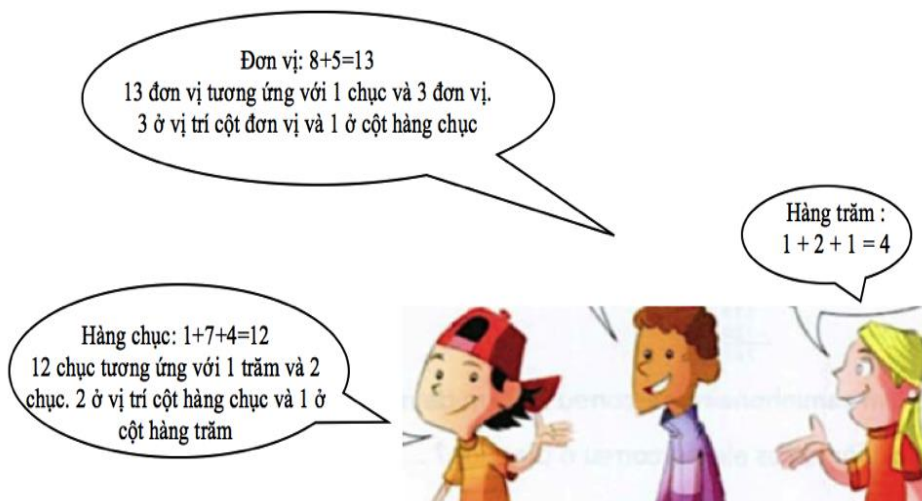
Về khối công nghệ – lý thuyết

Luôn luôn phải thận trọng, đừng quên rằng tất cả những kết luận đều được đặt trong mối quan hệ với những thể chế hoàn toàn xác định. Vì thế, điều ta chờ đợi như một sự giải thích toán học ở một cấp lớp nào đó có thể sẽ không được chấp nhận ở một

cấp lớp khác. Hơn thế nữa, cách giải thích cũng sẽ thay đổi. Chẳng hạn, ở lớp 3, các tính chất của hệ đếm được huy động để giải thích thuật toán cộng, và lời giải thích đưa ra trong các ô hình quả bóng để chỉ một cuộc trao đổi giữa các bạn cùng lớp (hình 4).

Hình 4: Sự xác định khối công nghệ - lý thuyết (Kaspary, 2014)

Hàng trăm	Hàng chục	Hàng đơn vị		Hàng trăm	Hàng chục	Hàng đơn vị		Hàng trăm	Hàng chục	Hàng đơn vị		Hàng trăm	Hàng chục	Hàng đơn vị		
2	7	8	→	2	¹ 7	8	→	¹ 2	¹ 7	8	→	¹ 2	¹ 7	8	278	
+ 1	4	5	→	+ 1	4	5	→	+ 1	4	5	→	+ 1	4	5	+ 145	
						3			2	3			4	2	3	423



Cũng có những tình huống mà khối công nghệ - lý thuyết « toán học » không thể sống trong thể chế vì không có điều kiện sinh thái. Ta hãy lấy ví dụ trong công trình của Gonçalves (2016) về các số nguyên dạy ở bậc trung học cơ sở. Để giải thích các tính chất về dấu của tích hai số, các tác giả của những tài liệu hướng dẫn dạy học chọn cách sử dụng các khái niệm nhiệt độ, mực nước biển (trong số những cách lựa chọn khác nhau). Như vậy, có khối công nghệ - lý thuyết, nhưng không giống như những gì chứng minh cho các tính chất này. Đó chỉ là một sáng tạo sư phạm mà thôi (Chevallard, 1991).

THIẾT KẾ CÁC PRAXÉOLOGIE DẠY HỌC

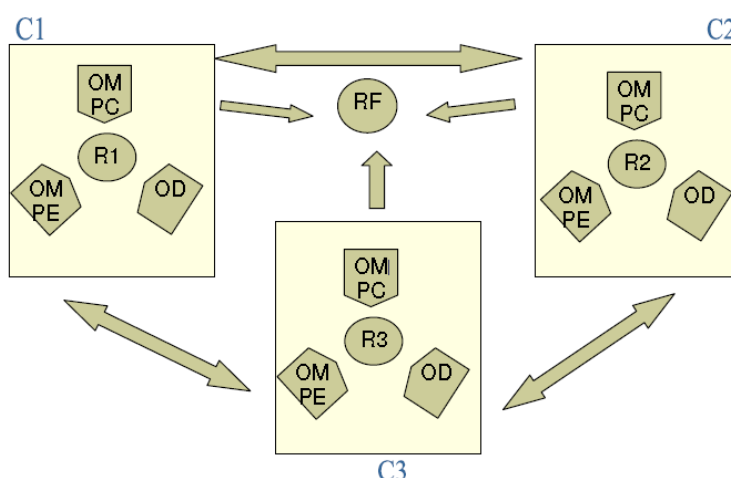
Để trả lời câu hỏi « Dạy tác phẩm này như thế nào » ta phải mô hình hoá praxéologie dạy học và điều này có thể thực hiện nhờ khái niệm 6 thời điểm nghiên cứu (Chevallard, 1998): lần gặp đầu tiên tổ chức O cần triển khai; nghiên cứu kiểu nhiệm vụ T_i và soạn thảo một kỹ thuật τ_i ; xây dựng môi trường công nghệ - lý thuyết $[\theta/\Theta]$ liên quan đến τ_i ; làm việc với kỹ thuật; thể chế hoá; đánh giá. Việc phân tích những thời điểm này sẽ cho phép xác định cách tiếp cận về mặt sư phạm mà các tác giả sách giáo khoa đề nghị. Chẳng hạn, sự chú trọng thời điểm dành để làm việc với kỹ thuật có thể biểu thị lựa chọn coi trọng kỹ thuật.

SỰ GIAO THOA DỮ LIỆU

Sau khi đã mô hình hoá các praxéologie (toán học và dạy học), cần phải tiến hành xem xét sự giao thoa của các dữ liệu, bằng cách tìm các yếu tố trả lời cho những câu

hỏi đã đặt ra để nghiên cứu. Nogueira (2008) đã trình bày thời điểm này bằng sơ đồ sau:

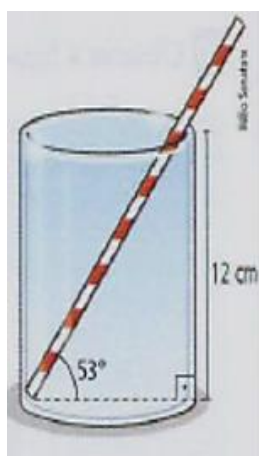
Hình 5: Nogueira (2008)



Sơ đồ này tượng trưng cho sự phân tích trong nội tại mỗi bộ sách cũng như đối chiếu các kết quả thu được. Về sự giao thoa các dữ liệu, Nogueira đã có thể ghi nhận một sự tiến triển của các praxéologie trong 3 bộ sách được phân tích. Một trong những kết luận của tác giả là một trong các bộ sách giáo khoa đó không tạo thuận lợi cho bước chuyển từ số học vào đại số, do sự vắng mặt của những praxéologie cho phép làm điều này.

Trải qua quá trình dài với nhiều phân tích đã thực hiện trong nhóm DDMat, chúng tôi cũng có thể nhận thấy sự tồn tại của những praxéologie có cuộc sống ngắn ngủi. Điều đó khiến chúng tôi phải suy nghĩ về những nguyên nhân có thể của sự có mặt nhưng sau đó biến mất rất nhanh của những praxéologie này. Hai câu trả lời có thể được nêu ra: đưa vào một praxéologie (khác với praxéologie nhắm đến) và đáp ứng đòi hỏi của noosphère. Hình 6 minh họa điều đó: đây mà một hoạt động được đề nghị ở lớp 9 để huy động kiến thức về lượng giác. Nó là một tình huống được sáng tạo ra có liên quan đến ngữ cảnh và dường như nó có mặt trong sách giáo khoa là để đáp ứng một yêu cầu của noosphère: lượng giác rất có ích cho việc giải quyết các vấn đề thực tế và do đó khi dạy học phải đặt kiến thức vào ngữ cảnh.

Hình 6: Theo yêu cầu của noosphère (Ramalho, 2016)



Một ly nước cao 12 cm. Trong ly có một ống hút. Chiều dài gần đúng của ống hút là bao nhiêu, biết rằng phần ống hút nằm ngoài ly dài 6 cm.

Để kết thúc, cần nhấn mạnh rằng trong bài viết này tôi tập trung trình bày sự mô hình hoá các praxéologie toán học, để lại phần các praxéologie dạy học. Tương tự, những yếu tố khác cũng quan trọng cho việc phân tích sách giáo khoa, như biểu đạt tường minh hay không tường minh (ostensif, non-ostensif⁷) và các cấp độ quyết định, cùng-quyết định về sự phạm (niveaux de détermination, de co-détermination didac), không được trình bày, do khuôn khổ có hạn của bài viết. Thế nhưng việc nghiên cứu các yếu tố đó có thể lại là mấu chốt để hiểu các hoạt động toán học. Vì vậy mà tôi nói với bạn đọc là « còn tiếp tục ... »

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Almeida, M. S. M. (2015). *A Articulação entre o Ensino de Polígonos e Poliedros em uma Coleção de Livros Didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
2. Assude, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/1, 47-72.
3. Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
4. Chevallard, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
5. Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble: La pensée Sauvage.
6. Freitas, M. V. C. (2015). *Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em uma coleção de livros didáticos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.
7. Gonçalves, K. R. (2016). *A teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
8. Kaspary, D. (2014). *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.
9. Nogueira. R. C. S. (2008). *A Álgebra nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: uma análise praxeológica*. Dissertação de Mestrado em Educação. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

⁷ Obtensif: những biểu đạt có thể nhìn thấy, tri giác được (như từ ngữ, đồ thị, cử chỉ, ...). Non-ostensif: những biểu đạt không tri giác được (như tư tưởng, trực cảm, khái niệm).

10. Oliveira, A. B. de. (2010). *Prática pedagógica e conhecimentos específicos: um estudo com um professor de matemática em início de docência*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
11. Ramalho, L. V. (2016). *Trigonometria em livros didáticos do 9º do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
12. Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching, *Educational Researcher*.
13. Shulman, L. (2001) Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*. Tradução: Alberto Ide. 57(1), 163-196.
14. Vergnaud, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

TIỂU BAN 1

LỢI ÍCH CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN ĐỐI VỚI CÁC NGHIÊN CỨU DIDACTIC TOÁN

Annie Bessot

Nguyễn Ngân Giang – Maggy Schneider

Lê Thái Bảo Thiên Trung

Ngô Minh Đức

Nguyễn Ái Quốc – Nguyễn Thị Thanh Thanh

Nguyễn Ái Quốc – Nguyễn Thị Vân Khánh

Tăng Minh Dũng

Trần Lương Công Khanh – Nguyễn Hữu Lợi

Trần Vui

Thái Trần Phương Thảo – Phạm Sỹ Nam

QUELLES MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT PROFESSIONNEL? NÉCESSITÉ D'UNE ENQUÊTE ÉPISTÉMOLOGIQUE POUR DÉPASSER L'OPINION

Annie Bessot*

Résumé

La formation professionnelle visée par cette communication est celle des métiers du bâtiment. Une activité de base dans cette profession est de prendre des décisions par une lecture « adéquate » de plans pour effectuer des tracés dans l'espace du chantier. Nous faisons l'hypothèse que certaines des prises de décisions dans cette situation de lecture tracé nécessitent des connaissances liés à l'espace: la géométrie euclidienne issue d'une modélisation de l'espace apparaît comme une première référence épistémologique pour l'analyse de ces connaissances. Un deuxième modèle de référence du côté de ce qui conditionne les pratiques sera formulé en termes de situation fondamentale de lecture tracé. Ces références épistémologiques permettent de formuler une géométrie en acte dont nous présentons ici quelques éléments.

Mots clés: Mathématiques pour la formation professionnelle, métiers du bâtiment, situation de lecture tracé, Situation fondamentale, Meso-espace, géométrie en acte.

1. La formation professionnelle, une question cruciale de société

Considérons l'exemple de ce qui se passe en France après le collège: 20% des bacheliers ont un Bac Technologique et 33% ont un Bac Professionnel. La figure 1 présente l'organisation de l'enseignement général et de l'enseignement professionnel et technologique, les flèches signalant les passerelles possibles entre les différentes formations.

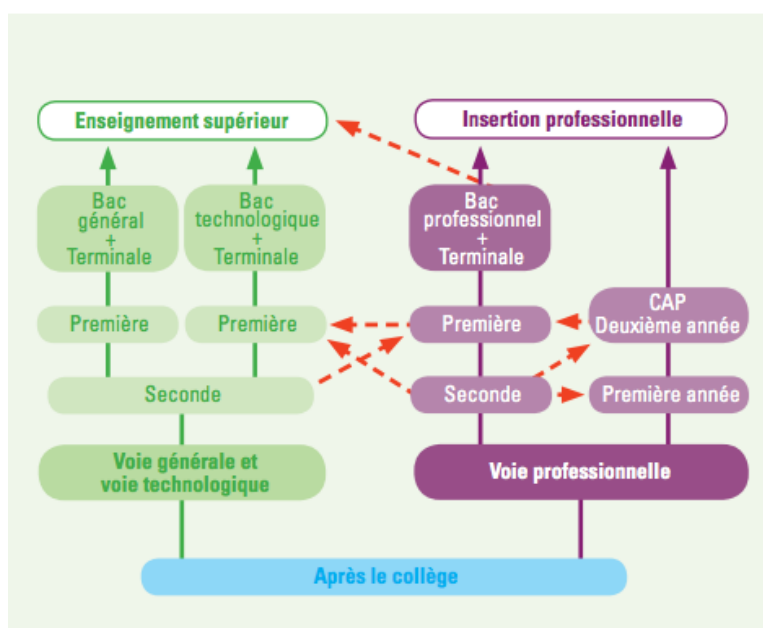


Figure 1. L'organisation de l'enseignement général et professionnel en France

* Equipe Metah, LIG, Université Grenoble Alpes

Du point de vue de la formation professionnelle, deux enseignements de savoirs mathématiques s'opposent:

- des savoirs pragmatiques à teneur mathématique immédiatement utiles aux professions. Un exemple est celui de l'Angleterre où la formation professionnelle initiale se fait majoritairement dans les entreprises. Le risque d'un tel enseignement est que la disparition de secteurs économiques entraîne celle des savoirs pragmatiques associés. Des savoirs pragmatiques doivent alors être reconstruits en cas de nouveaux besoins.

- des savoirs généraux voire universaux. Par exemple en France, les mathématiques enseignées peuvent être analysées comme une réduction des mathématiques de l'enseignement général (Bessot et al. 2000). Cette formation généraliste peut entraîner pour les formés des difficultés à s'adapter à la culture de l'entreprise.

De plus les concepts et les procédures à teneur mathématique sont si intégrés dans la pratique et le fonctionnement du monde de travail, qu'ils ne sont perçus que comme spécifique à l'activité. La conséquence est que pour répondre autrement que par l'opinion à la question « Quelles mathématiques pour l'enseignement professionnel? », une enquête épistémologique sur les pratiques professionnelles semble nécessaire.

Quels connaissances de nature mathématique sont sous-jacentes aux pratiques d'une profession?

Sous quelles conditions fonctionnent ces connaissances?

Quels problèmes spécifiques à teneur mathématique sont rencontrés?

Un champ de recherche peu exploré du point de vue de la didactique s'ouvre ainsi. *Le terrain d'enquête épistémologique choisi ici est celui des métiers de base du bâtiment.*

2. Une enquête sur les métiers de base du bâtiment

La plupart des situations du bâtiment s'appuient sur la lecture de plans pour effectuer des tracés dans l'espace du chantier. Nous appellerons ces situations, des *situations de « lecture tracé »*.



Figure 2. Situation de lecture tracé

La mise en place de certains éléments du chantier prend en compte l'implantation ultérieure d'autres éléments. Ainsi, lorsqu'un plancher est à poser, le tracé du plancher doit anticiper le passage des canalisations et du réseau électrique ; de même, l'implantation d'un mur doit prendre en compte les positions des fenêtres et des portes. Dans la profession, cette anticipation prend le nom de *réserve*.

Le premier type de contrôles est au centre de nos préoccupations. En absence de contrôle pragmatique, le contrôle s'exerce à travers des connaissances dont certaines sont liées à l'espace et aux instruments utilisés. Les réserves constituent donc pour nous un objet privilégié d'observation des conceptualisations.

De quelle nature sont les connaissances en jeu ? Comment sont-elles organisées ? Quelles relations entretiennent ces connaissances avec les artefacts présents sur les chantiers ?

Les connaissances impliquées dans les tâches de lecture tracé sont relatives à l'espace, or la géométrie euclidienne issue d'une modélisation de l'espace nous apparaît comme une référence opératoire pour l'analyse de ces connaissances (Hadamard 1988). Notre choix est donc d'étudier ces connaissances en relation avec cette géométrie de référence. Nous faisons l'hypothèse que ces dernières se spécifient et s'organisent en une structure propre liée aux contraintes et aux conditions des situations de l'institution professionnelle.

Nous caractérisons l'ensemble des situations de lecture tracé par la *situation fondamentale de lecture tracé* suivante (Bessot et al.1993, p. 120; Brousseau 1998, p. 80) :

Étant donné un plan coté d'un élément de bâtiment de *forme f* contenant *n* réservations de *type r* et d'*emplacement coté*, tracer avec les instruments, sur une *surface plane* cet élément de bâtiment et ces réservations.¹

La surface dépend du lieu de lecture tracé:

- en usine, ce lieu est une table de préfabrication de largeur imposée 2,50m: en effet les prédalles doivent être transportées en camion sur le chantier ce qui contraint leurs dimensions.

- en forain, c'est une table *ad hoc* de largeur non imposée, à proximité du chantier.

- sur le chantier lui-même.

Sur le chantier, les tâches de lecture tracé sont fréquentes, mais leur observation est rendue difficile par de nombreux facteurs, en particulier de conditions climatiques et de programmation du chantier. C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier le *cas de la préfabrication en usine*.

La préfabrication d'éléments de maçonnerie en usine (éléments verticaux ou horizontaux) présente l'intérêt économique de construire les éléments *quasi* en série. Ces éléments sont ensuite transportés sur le chantier et il reste à les assembler sur place

¹ En italique les variables de la situation, c'est à dire les conditions de la situation pouvant prendre différentes valeurs.

au reste de l'édifice (contrôle pragmatique des éléments). Le gain de la préfabrication réside dans le temps et le coût de la préparation.

Nous avons instancié ci-après la situation fondamentale correspondant aux conditions particulières de l'usine de préfabrication :

Étant donné un plan de préfabrication d'une prédalle de *forme f* contenant *n* réservations de type *r* et d'*emplacement coté*, tracer avec les instruments, **sur une table de largeur 2,5m** cette prédalle et ces réservations.²

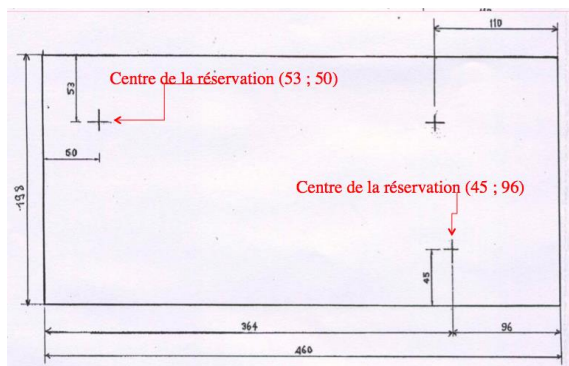
La notion de saut informationnel (Brousseau, 1986) nous permet d'analyser la complexité des situations de lecture tracé :

Le saut informationnel consiste, après avoir trouvé une situation fondamentale [...], à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances [...] permettent d'élaborer des stratégies efficaces... puis, sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir (op. cité, p.23).

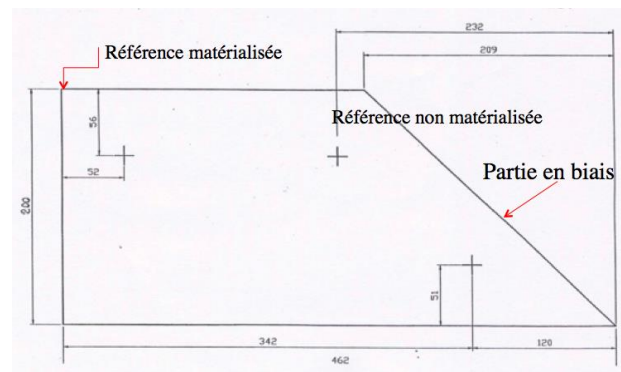
Les variables et leurs valeurs découlent de l'analyse des fiches d'incidents de l'usine : la majorité des erreurs concerne la forme non rectangulaire de la prédalle et le repérage sur le plan du centre de la réservation qui ne sont pas orientés dans les directions de la cotation (voir Tableau 1 et Figure 3).

Variable Situations	Forme de la prédalle	Repérage sur le plan du centre de la réservation
1	Rectangle	Référence matérialisée sur le plan
2	Non rectangle	Référence non matérialisée sur le plan

Tableau 1. Variables et valeurs de la situation fondamentale



Plan de préfabrication 1 - Situation 1



Plan de préfabrication 2 - Situation 2

Figure 3. Exemple de plans de préfabrication - situation 1 et situation 2

3. Géométrie en acte

Tout d'abord nous décrivons ici très succinctement l'expérimentation menée dans le cadre de notre enquête (lire pour plus de détails Bessot & Laborde 2005).

Nous avons d'abord observé et filmé (vidéo) l'activité de deux binômes successivement mis dans les deux situations de lecture tracé du tableau 1 (plans de

² En **gras** la valeur fixée de la variable « surface plane ».

préfabrication 1 et 2). Puis, pour faire expliciter les raisons de certaines actions, nous avons organisé un entretien avec un membre de chacun des binômes : lors de cet entretien, nous avons interrogé chaque personne sur la base d'extraits choisis des films, d'une part sur son action propre, d'autre part sur celle de l'autre binôme. La géométrie en acte formulée ci-après est nourrie de l'analyse des données recueillies lors de cette expérimentation.

Cette géométrie ne peut être décrite uniquement à l'aide de connaissances théoriques de la géométrie euclidienne. Elle doit aussi rendre compte de connaissances relatives aux aspects matériels de la situation. Les objets théoriques de la géométrie euclidienne constituent néanmoins des outils de modélisation efficaces de cette géométrie en acte: la géométrie euclidienne tire en partie son origine de la modélisation de l'espace matériel et il serait difficile de se passer de ses concepts de base et donc de la terminologie associée (perpendiculaire, parallèle...). Elle nous fournit aussi un moyen d'évaluer non seulement la validité mais aussi la consistance des théorèmes en acte identifiés.

3.1. Connaissances spatiales liées à la coordination de deux « espaces »

La situation de lecture tracé exige de coordonner deux espaces de caractéristiques différentes, le Meso-espace des tracés et le Micro-espace du plan de préfabrication (Brousseau 2000)³.

3.1.1. Le Meso-espace des tracés situé à l'intérieur de la table de préfabrication est un espace dans lequel le sujet se déplace pour effectuer les tracés par lecture du plan de préfabrication: tout déplacement et tout tracé peuvent être contrôlés par la vue. Dans cet espace, la table de préfabrication et le contour de la pré-dalle - une fois tracé, donnent des directions de référence supposées perpendiculaires.

Pour tracer une réservation particulière, il faut situer l'espace local du tracé dans l'espace global. Une fois ce tracé achevé et pour effectuer un nouveau tracé, le « lecteur traceur » va devoir se déplacer dans le Meso-espace pour changer d'espace local. Ce passage entre le local et le global, spécifique du Més-espace, pose un *problème de recollement d'espaces locaux éloignés les uns des autres*.

3.1.2. Le Micro-espace du plan de préfabrication et sa coordination avec le Meso-espace du chantier

La particularité fondamentale d'une géométrie en acte dans la situation de lecture tracé réside dans la mise en relation de deux référentiels spatiaux, celui du système des cotes du plan de préfabrication et celui de l'espace des tracés (table de préfabrication et/ou contour de la prédalle). Cette mise en relation peut être problématique dans les tâches de lecture tracé et être ainsi fluctuante au cours de l'activité (Weill-Fassina 1993, p.62).

³ Un troisième type de situations spatiales est le *Macro espace* : « Les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui posent - comme à notre chauffeur de taxi - des problèmes, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation. Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc. il est nécessaire de développer des concepts et des moyens spécifiques. Les solutions sont d'ailleurs différentes suivant qu'il s'agit de la terre entière ou d'une zone urbaine, rurale, sylvestre, souterraine, maritime ou aérienne. » (Brousseau 2000, p. 6)

Les observations montrent que la lecture des cotes du plan organise l'activité des tracés dans le Meso-espace. Par exemple, la prise des mesures dans le Meso-espace des tracés va être effectuée à un emplacement à l'intérieur de la table de préfabrication correspondant visuellement à l'emplacement de la ligne de cotes sur le plan de préfabrication.

3.2. Points et droite de la géométrie en acte

3.2.1. La catégorie « point » renvoie à deux types de concepts en acte (Vergnaud 1990) :

- premier type: *le point comme segment* parallèle à une direction de référence et de dimension suffisamment petite pour un tracé à la main. L'un des membres des binômes observés parle de point parallèle.

- second type: *le point comme intersection*, soit d'une ligne de référence et d'un point du premier type parallèle à l'autre ligne de référence, soit de deux points du premier type parallèles aux directions de référence.

Ces deux types de points (Figure 4) ont des fonctions différentes. Un point du second type ne peut être produit qu'à partir d'un ou de deux points du premier type. Un point du premier type est un segment auxiliaire matérialisé. L'espace des tracés est un espace évolutif, issu des actions de tracé dont le but final est le tracé du pourtour de la pré-dalle puis des centres des réservations.

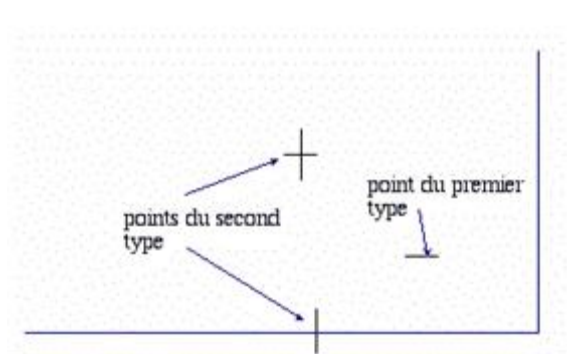


Figure 4. Les deux types de « points »

Un point du second type donne lieu à un tracé permanent, alors qu'un point du premier type donne lieu à un tracé destiné à disparaître dans le tracé d'un point du second type. Il n'est pas l'image d'un tracé du plan de préfabrication.

Le tracé de la réservation dans le Meso-espace du chantier doit être l'image *fidèle* de son dessin dans le plan de préfabrication. Il s'en déduit un critère de validité du tracé d'une réservation: « Si deux points de premier type ne se coupent pas pour former un point du second type, le tracé est erroné ».

Le tracé de la figure 5 est perçu par le binôme qui l'a effectué comme une erreur. Nous verrons plus loin les raisons de cette erreur.



Figure 5. Tracé du centre d'une réservation erronée

3.2.2. Concept en acte : droites

Une droite est un segment ne pouvant pas être tracé à la main, image d'un segment du plan de préfabrication : ligne de cotes, pourtour de la prédalle.

Elle donne lieu à deux concepts en acte :

- droite de référence tracée (pourtour de la prédalle); elles joignent des points du premier ou du second type;
- alignement de deux points du premier type (partiellement non tracée mais matérialisable par un instrument comme la règle rigide ou le mètre ruban).

Dans cette géométrie, deux points du premier type ne sont pas toujours alignés (Figure 6).



Figure 6. Points du 1^{er} type non alignés

Il s'en suit le théorème en acte sur l'alignement de deux points du premier type suivant : « Si deux points du premier type sont situés à la même distance d'une droite de référence D, alors ils sont alignés et la droite qui les joint est parallèle à D » (Figure 7).



Figure 7. Points du 1^{er} type alignés

3.3. Connaissances liées aux instruments du chantier

Dans les problèmes de construction dans le Meso-espace qui sont considérés ici, les instruments jouent un rôle central comme ils le font dans la géométrie euclidienne. Tout comme dans les *Éléments* d'Euclide, le *compas de chantier* assure de l'équidistance de plusieurs points à un point donné, l'usage de l'*équerre de chantier* prend en charge la propriété de perpendicularité de deux droites. Les instruments sont à la fois producteurs et garants de certaines propriétés spatiales. Mais contrairement à la règle de la géométrie d'Euclide, traceur de droites idéal, sans épaisseur et illimité, les instruments de tracé du bâtiment ont une matérialité qui a des conséquences sur les tracés.

Nous allons illustrer notre propos par les exemples du *mètre ruban* et du *crayon de chantier*.

Le *mètre ruban*, objet gradué en cm, a trois bords fonctionnels : deux bords « longs » parallèles et un petit bord métallique gradué zéro (voir Figure 7). Dans la géométrie en acte, le mètre ruban doit réaliser simultanément une double coïncidence contrôlée perceptivement: le petit bord avec une ligne de référence et l'un des bords

longs (différencié par b1) soit avec une ligne de référence, soit avec un point du premier type. La coïncidence du petit bord avec une ligne de référence assure l'orthogonalité du mètre ruban avec cette ligne de référence mais de *façon très imparfaite* par rapport à l'équerre.

Le crayon de chantier sert à tracer à la main un point du premier type à une distance donnée dans le prolongement visuel de la graduation du ruban. Toutes les graduations étant parallèles à la graduation zéro, le point du premier type ainsi obtenu est parallèle à la ligne de référence.

Revenons sur l'erreur dans le tracé du centre d'une réservation (Figure 5).

L'absence d'intersection constatée résulte de l'indifférenciation des deux bords parallèles du mètre ruban. « *Les tracés de deux points du premier type d'une réservation doivent être fait du même côté du bord long (ici notée b1)* ». Cette règle d'usage du mètre ruban est une connaissance instrumentale qui revient à orienter provisoirement le mètre ruban. Le non respect de cette orientation (choix de l'autre bord) conduit à obtenir un point du premier type décalé de la largeur du mètre ruban (Figure 7).

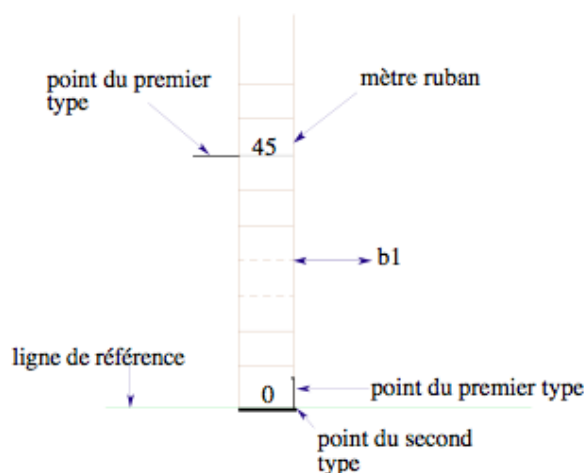


Figure 7. Les trois bords du mètre ruban

En conclusion

L'enquête épistémologique a mis en évidence le fonctionnement d'une géométrie en acte attachée à la multiplicité des espaces en jeu et aux instruments de tracé. Cette géométrie en acte articule:

- des connaissances théoriques de la géométrie euclidienne comme « point », « droite », « parallèle » présents en acte et dans les formulations;
- des connaissances spatiales permettant de se situer et de se déplacer dans le Meso-espace du chantier par la coordination de référentiels du Micro-espace du plan de préfabrication et du Meso-espace;
- des connaissances sur les instruments se traduisant par des mots comme d'équerre mais aussi incluant des règles implicites d'usage.

La relation complexe entre géométrie théorique et géométrie de lecture tracé dans le domaine professionnel du bâtiment questionne la nature et la place de la géométrie

théorique de référence dans les situations de formation aux pratiques de lecture tracé mais aussi dans un enseignement des mathématiques pour ces professions.

REFERENCES

1. Bessot A. & Verillon P. (1993) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble: Editions La Pensée Sauvage.
2. Bessot A., Ridgway J. (éds) (2000) *Education for Mathematics in the Workplace*. Kluwer Academics Publishers.
3. Bessot A. Dorier J-L., Déprez S. Eberhard M. (2000) *Pertinence et utilité de savoirs mathématiques dans des cursus éducatifs non strictement mathématiques*. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, n° 13. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01528036>
4. Bessot A. & Laborde C. (2005) Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment. In C. Castela & C. Houdement (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Année 2005. (pp. 39-76) Paris : Editions ARDM et IREM de Paris 7.
5. Brousseau G. (1998) *Théories des situations didactiques*. Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.
6. Brousseau G. (2000) Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. *Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques* : Université de Crète. 67-83. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/>
7. Hadamard J. (1988) *Leçons de géométrie*. Réimpression de la 13ème édition, Armand Colin 1947, 1ère édition 1898, Paris : Editions Jacques Gabay.
8. Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol.10 n°2-3, 133-170.
9. WEILL-FASSINA A. & RACHEDI Y. (1993) Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation, In Bessot A. & Verillon P. (eds.) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. (pp.57-86). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

LOẠI TOÁN NÀO CHO GIÁO DỤC CHUYÊN NGHIỆP? SỰ CẦN THIẾT CỦA KHẢO SÁT KHOA HỌC LUẬN ĐỂ VƯỢT QUA DƯ LUẬN

Annie Bessot*

Tóm tắt

Việc đào tạo nghiệp vụ đề cập trong tham luận này là đào tạo nghề xây dựng. Một hoạt động cơ bản của nghề này là ra quyết định dựa trên cách đọc “thích hợp” bản thiết kế để thực hiện các đường vẽ tại không gian công trường. Chúng tôi giả thuyết rằng một số quyết định trong tình huống đọc - vẽ này đòi hỏi những kiến thức gắn với không gian: hình học Euclid phát sinh từ việc mô hình hóa không gian là một tham chiếu khoa học luận đầu tiên để phân tích những kiến thức này. Đối với những gì ảnh hưởng đến tác nghiệp của công nhân, một mô hình tham chiếu thứ hai sẽ được phát biểu bằng ngôn ngữ tình huống cơ bản đọc – vẽ. Các tham chiếu khoa học luận này cho phép hình thành một loại “hình học qua hành động”, kết nối các kiến thức lý thuyết của hình học Euclid với các kiến thức liên quan đến khía cạnh vật chất và công cụ của tình huống cũng như với các kiến thức về nhận thức.

Từ khóa: Toán học cho đào tạo nghiệp vụ, nghề xây dựng, tình huống đọc bản vẽ, tình huống cơ bản, không gian trung gian, hình học qua hành động

Résumé

La formation professionnelle visée par cette communication est celle des métiers du bâtiment. Une activité de base dans cette profession est de prendre des décisions par une lecture « adéquate » de plans pour effectuer des tracés dans l'espace du chantier. Nous faisons l'hypothèse que certaines des prises de décisions dans cette situation de lecture tracé nécessitent des connaissances liés à l'espace : la géométrie euclidienne issue d'une modélisation de l'espace apparaît comme une première référence épistémologique pour l'analyse de ces connaissances. Un deuxième modèle de référence du côté de ce qui conditionne les pratiques sera formulé en termes de situation fondamentale de lecture tracé. Ces références épistémologiques permettent de formuler une géométrie en acte dont nous présentons ici quelques éléments.

Mots clés: Mathématiques pour la formation professionnelle, métiers du bâtiment, situation de lecture tracé, situation fondamentale, Meso-espace, géométrie en acte.

1. Đào tạo nghiệp vụ, một vấn đề xã hội mẫu chốt

Ta hãy xét một ví dụ về những gì đang diễn ra ở Pháp sau trung học cơ sở: 20% học sinh có bằng tú tài công nghệ và 33% có bằng tú tài chuyên nghiệp. Hình 1 thể hiện lộ trình giáo dục phổ thông, giáo dục chuyên nghiệp và công nghệ; các mũi tên biểu diễn sự chuyển đổi có thể giữa các lộ trình đào tạo khác nhau.

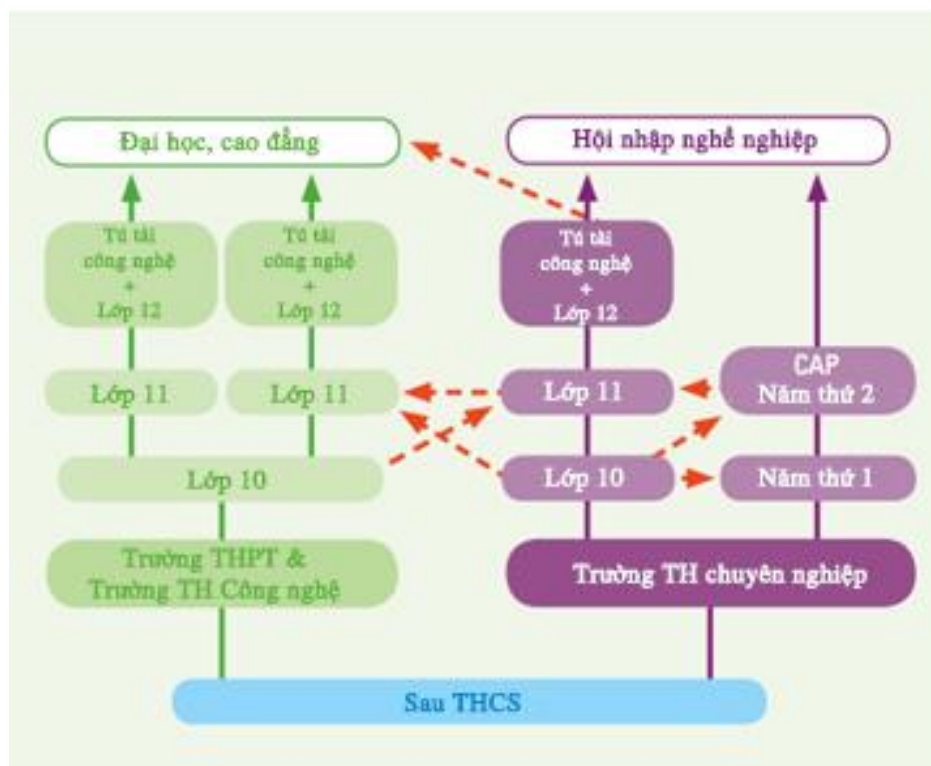
Theo quan điểm đào tạo nghiệp vụ, có hai hướng giảng dạy tri thức toán đối lập nhau:

– dạy những tri thức thực dụng có hàm lượng toán học dùng được ngay cho nghề nghiệp. Một ví dụ là nước Anh, nơi mà việc đào tạo nghiệp vụ ban đầu được thực hiện phần lớn trong công ty. Nguy cơ của việc đào tạo này là khi một số lĩnh vực kinh

* Ê-kíp Metah, LIG, Đại học Grenoble Alpes

tế biến mất thì các tri thức thực dụng liên quan cũng biến mất. Những tri thức này phải được xây dựng lại khi có nhu cầu mới.

– dạy những tri thức tổng quát, thậm chí phổ quát. Chẳng hạn ở Pháp, có thể xem toán học dạy trong các trường chuyên nghiệp như sự thu nhỏ của chương trình toán phổ thông (Bessot et al. 2000). Việc đào tạo này có thể khiến học viên khó thích nghi với văn hóa của công ty.



Hình 1. Lộ trình giáo dục phổ thông và chuyên nghiệp ở Pháp

Hơn nữa, các quan niệm và tiến trình có hàm lượng toán học thâm nhập sâu vào tác nghiệp và sự vận hành của môi trường lao động đến nỗi học viên chỉ xem nó như đặc thù của nghề nghiệp. Vì vậy, để trả lời câu hỏi “Loại toán nào cho giáo dục chuyên nghiệp” khác với dư luận, cần có một khảo sát khoa học luận về thực hành nghiệp vụ.

Những kiến thức nào mang bản chất toán học được ẩn giấu trong tác nghiệp của một nghề nào đó?

Những kiến thức này vận hành với những điều kiện nào?

Những vấn đề đặc thù nào mang hàm lượng toán học thường gặp?

Những câu hỏi này hướng đến một chủ đề nghiên cứu còn ít được khai thác theo quan điểm didactic. Ở đây, chúng tôi chọn nghề xây dựng làm lĩnh vực khảo sát khoa học luận.

2. Một khảo sát về nghề xây dựng

Phần lớn tình huống nghề xây dựng dựa vào việc đọc bản thiết kế để thực hiện các đường vẽ tại không gian công trường. Chúng tôi gọi những tình huống là *tình huống đọc – vẽ*.



Hình 2. Tình huống đọc bản vẽ

Việc lắp ghép một số thành phần của công trình phải tính đến việc lắp ghép sau đó các thành phần khác. Vì vậy, khi cần lắp đặt một sàn bê tông đúc sẵn, phải vẽ trước trên đó những chỗ lắp ống nước và hệ thống điện; tương tự, việc lắp ghép một bức tường đúc sẵn phải tính đến vị trí của cửa sổ và cửa ra vào. Trong nghề xây dựng, việc dự kiến này gọi là *chừa chỗ*.

Dạng kiểm tra thứ nhất là trung tâm của khảo sát. Không có kiểm tra thực tế, kiểm tra ban đầu được thực hiện thông qua những kiến thức trong đó có kiến thức gắn với không gian và các dụng cụ đã sử dụng. Đối với chúng tôi, cần ưu tiên quan sát việc hình thành quan niệm ở công nhân trong quá trình *chừa chỗ*.

Bản chất của các kiến thức được sử dụng? Chúng được tổ chức như thế nào? Mối quan hệ giữa những kiến thức này với các dụng cụ có mặt tại công trường?

Nhiệm vụ *đọc – vẽ* dẫn đến những kiến thức liên quan đến không gian. Chúng tôi cho rằng hình học Euclide, phát sinh từ việc mô hình hóa không gian, là một tham chiếu để phân tích những kiến thức này (Hadamard 1988). Vì vậy, chúng tôi lựa chọn nghiên cứu những kiến thức này trong mối liên hệ với hình học tham chiếu. Chúng tôi giả định rằng các kiến thức được khu biệt và tổ chức thành một cấu trúc riêng, gắn với các ràng buộc và điều kiện của các tình huống thiết chế nghề nghiệp.

Chúng tôi đặc trưng hóa tập hợp các tình huống *đọc – vẽ* bằng *tình huống cơ bản đọc – vẽ* (Bessot et al.1993, tr. 120; Brousseau 1998, tr. 80):

Cho bản vẽ (có ghi kích thước) của một bộ phận dạng f , có n chỗ chừa dạng r và vị trí chỗ chừa xác định bằng các số chỉ khoảng cách. Với các dụng cụ, hãy vẽ trên một tấm phẳng bộ phận này và các chỗ chừa.¹

Tấm phẳng phụ thuộc vào nơi *đọc – vẽ*:

- Tại nhà máy, tấm phẳng là một bàn khuôn có chiều rộng bắt buộc 2,50 m để có thể chuyên chở bằng xe tải đến công trường.
- Tại các xưởng tiền chế gần công trường, tấm phẳng là một bảng *phù hợp*.
- Tại chính công trường.

¹ Chữ in nghiêng là các biến tình huống, nghĩa là những điều kiện của tình huống có thể nhận những giá trị khác nhau.

Trên công trường, *đọc – vẽ* là nhiệm vụ thường gặp nhưng khó quan sát vì nhiều yếu tố, đặc biệt là vì điều kiện thời tiết và lịch làm việc của công trường. Vì vậy, chúng tôi quyết định khảo sát *trường hợp chế tạo tấm sàn và tường đúc sẵn tại nhà máy*.

Việc đúc trước các bộ phận xây dựng tại nhà máy (tường hoặc sàn) cho thấy lợi ích kinh tế của việc tạo ra những bộ phận *gần như* hàng loạt. Những bộ phận này sau đó được chở đến công trường và chỉ còn phải lắp ghép chúng vào phần còn lại của tòa nhà. Lợi ích của việc đúc sẵn nằm ở thời gian và chi phí đúc.

Chúng tôi nhắc lại dưới đây tình huống cơ bản tương ứng với những điều kiện riêng biệt của nhà máy chế tạo cấu kiện đúc sẵn:

Cho bản vẽ của một tấm sàn *dạng f*, có n chỗ chừa *dạng r* và *vị trí chỗ chừa xác định bằng các số chỉ khoảng cách*. Với các dụng cụ, hãy vẽ **trên một bản khuôn rộng 2,5m** tấm sàn này và các chỗ chừa.²

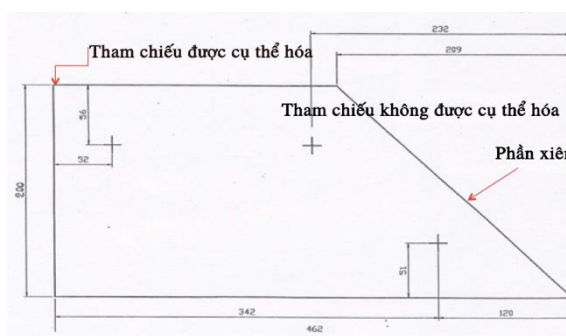
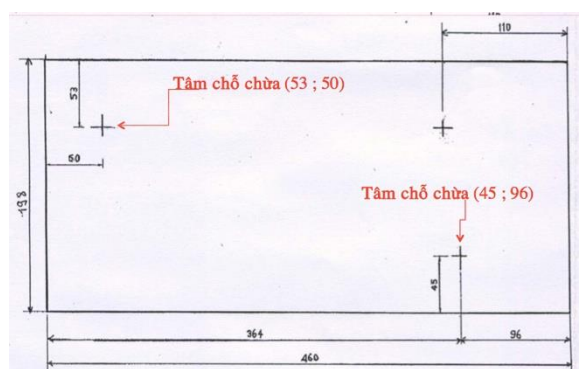
Khái niệm bước nhảy thông tin (Brousseau, 1986) cho phép chúng tôi phân tích độ phức tạp của các tình huống *đọc – vẽ*:

Sau khi đã tìm thấy một tình huống cơ bản, bước nhảy thông tin [...] trước tiên gồm chọn lựa giá trị của các biến sao cho kiến thức [...] cho phép hình thành các chiến lược hiệu quả... và kế tiếp là thay đổi giá trị các biến nhằm làm tăng độ phức tạp của nhiệm vụ mà không thay đổi quy tắc chơi (tài liệu đã dẫn, tr. 23).

Các biến và giá trị của chúng ra đời từ việc phân tích các phiếu ghi sự cố kỹ thuật của nhà máy: phần lớn sai lầm liên quan đến việc tấm sàn không có dạng chữ nhật và việc định vị tâm chỗ chừa trên bản khuôn không định hướng theo hai phương ngang, dọc có ghi khoảng cách (xem bảng 1 và hình 3).

Tình huống \ Biến	Dạng tấm sàn	Định vị tâm chỗ chừa trên bản khuôn
1	Chữ nhật	Tham chiếu được cụ thể hóa trên bản vẽ
2	Không phải chữ nhật	Tham chiếu không được cụ thể hóa trên bản vẽ

Bảng 1. Các biến và giá trị của tình huống cơ bản



Bản vẽ tấm sàn đúc sẵn 1 - Tình huống 1 Bản vẽ tấm sàn đúc sẵn 2 - Tình huống 2

Hình 3. Ví dụ về bản vẽ hai tấm sàn đúc sẵn - tình huống 1 và tình huống 2

² Chữ **in đậm** là giá trị đã định của “tâm phẳng”.

3. Hình học qua hành động

Trước hết, chúng tôi mô tả rất ngắn gọn ở đây thực nghiệm tiến hành trong khuôn khổ khảo sát (đọc chi tiết trong Bessot & Laborde 2005).

Đầu tiên, chúng tôi quan sát và quay phim hoạt động của hai nhóm hai người theo thứ tự trong hai tình huống *đọc – vẽ* của bảng 1 (bản vẽ 1 và 2). Sau đó, để biết rõ lý do của một số hành động, chúng tôi tổ chức cuộc trò chuyện với một thành viên của mỗi nhóm: trong buổi trò chuyện, chúng tôi dựa vào trích đoạn chọn lọc của tập phim đã quay để phỏng vấn mỗi người về hành động của chính họ và hành động của nhóm kia. Hình học qua hành động của hai nhóm công nhân mà chúng tôi phát biểu dưới đây còn được bổ sung bằng dữ liệu thu thập được trong quá trình thực nghiệm.

Loại hình học này không chỉ được mô tả bằng những kiến thức lý thuyết của hình học Euclide. Nó còn phản ánh những kiến thức liên quan đến khía cạnh vật chất của tình huống. Tuy nhiên, các đối tượng lý thuyết của hình học Euclide tạo thành những công cụ mô hình hóa hiệu quả cho hình học qua hành động: một bộ phận của hình học Euclide có nguồn gốc từ việc mô hình hóa không gian vật chất và khó lòng bỏ qua những quan niệm cơ bản cũng như những thuật ngữ liên kết (vuông góc, song song, ...). Nó cũng cung cấp cho chúng ta một công cụ đánh giá không chỉ về sự hợp thức mà còn về sự nhất quán của các định lý qua hành động đã xác định.

3.1. Kiến thức không gian gắn với sự phối hợp hai “không gian”

Tình huống *đọc – vẽ* đòi hỏi sự phối hợp hai không gian có đặc trưng khác nhau: không gian trung gian chứa các nét vẽ trên tấm sàn và không gian nhỏ của bản thiết kế (Brousseau 2000)³.

3.1.1. *Không gian trung gian các nét vẽ ở bên trong bàn khuôn là một không gian mà ở đó, chủ thể di chuyển để thực hiện các nét vẽ bằng cách đọc bản thiết kế: bất kỳ một di chuyển nào và bất kỳ nét vẽ nào đều cũng có thể kiểm tra bằng thị giác. Trong không gian này, bàn khuôn và biên của tấm sàn – một khi đã vẽ xong, cung cấp các phương tham chiếu được giả định là vuông góc.*

Để vẽ một chỗ chứa cụ thể, phải định vị không gian địa phương trong không gian tổng thể. Khi đã hoàn thành một nét vẽ và muốn thực hiện một nét vẽ mới, người công nhân phải di chuyển trong không gian trung gian để chuyển đổi không gian địa phương. Bước chuyển đổi giữa địa phương và tổng thể – đặc trưng của không gian trung gian – đặt ra *vấn đề về kết dính các không gian địa phương cách xa nhau.*

3.1.2. Không gian nhỏ của bản thiết kế và sự phối hợp với không gian trung gian của công trường

Đặc thù cơ bản của hình học qua hành động trong tình huống *đọc – vẽ* nằm trong việc thiết lập mối liên hệ giữa hai hệ quy chiếu không gian, một hệ gồm các số chỉ khoảng cách được ghi trên bản thiết kế, hệ kia là không gian các nét vẽ (bàn khuôn và/

³ Một loại tình huống không gian thứ ba là *không gian lớn*: “Những tình huống mà trong đó chủ thể phải đưa ra những quyết định liên quan đến một lãnh thổ quá lớn để có thể nhìn bao quát, đặt ra cho anh ta – giống như tài xế taxi – những vấn đề, trong đó có việc ghép những tấm bản đồ hoặc hình ảnh nhỏ rồi dán lại. Để nhận ra và tìm lại một địa điểm, xây dựng lộ trình, xác định hình dạng của lãnh thổ..., cần phát triển những quan niệm và phương tiện chuyên biệt”. Các giải pháp sẽ khác nhau tùy theo đó là toàn bộ quả đất hoặc một vùng thành thị, nông thôn, rừng, **trong lòng** đất, trên biển hay trên không” (Brousseau 2000, p. 6).

hoặc biên tấm sàn đúc sẵn). Việc thiết lập mối liên hệ này có thể nảy sinh vấn đề trong nhiệm vụ *đọc – vẽ* và biến động trong quá trình tác nghiệp (Weill-Fassina 1993, tr.62).

Các quan sát chứng tỏ rằng việc đọc các số chỉ khoảng cách trên bản thiết kế tổ chức nên hoạt động vẽ trong không gian trung gian. Chẳng hạn, việc đo đạc các nét vẽ trong không gian trung gian được thực hiện ở một vị trí bên trong bản khuôn, tương ứng với vị trí đã ghi các khoảng cách trên bản thiết kế.

3.2. Điểm và đường trong hình học qua hành động

3.2.1. “Điểm” và hai loại quan niệm qua hành động (Vergnaud 1990):

– Loại thứ nhất: *điểm là một đoạn thẳng* song song với một phương tham chiếu và có độ dài đủ nhỏ để vẽ được bằng tay. Một thành viên của các nhóm hai người được quan sát đã nói về điểm song song.

– Loại thứ hai: *điểm là giao* của một đường tham chiếu với một điểm loại một hoặc là giao của hai điểm loại một song song với phương tham chiếu.

Hai loại điểm này (hình 4) có chức năng khác nhau. Một điểm loại hai chỉ có thể được tạo ra từ một hoặc hai điểm loại một. Một điểm loại một là một đoạn thẳng phụ được vật chất hóa. Không gian các nét vẽ là một không gian tiến triển, hình thành từ hoạt động vẽ mà mục đích cuối cùng là vẽ được biên của tấm sàn và tâm chỗ chừa.



Hình 4. Hai loại “điểm”

Một điểm loại hai làm phát sinh một nét vẽ thường trực trong khi một điểm loại một làm phát sinh một nét vẽ sẽ biến mất khi vẽ một điểm loại hai. Nó không phải là hình ảnh của một nét vẽ trong bản thiết kế.

Nét vẽ xác định chỗ chừa trong không gian trung gian của công trường phải là hình ảnh *trung thực* của chỗ chừa trong bản thiết kế. Từ đó suy ra một tiêu chuẩn hợp thức của nét vẽ xác định chỗ chừa: “*Nếu hai điểm loại một không cắt nhau để tạo thành một điểm loại 2, nét vẽ bị sai*”.

Nét vẽ trong hình 5 được nhóm thực hiện nhận ra là sai. Chúng ta sẽ thấy lý do của sự sai lầm này trong phần sau.



Hình 5. Một nét vẽ xác định tâm chỗ chừa bị sai

3.2.2. Quan niệm qua hành động: đường thẳng

Một đường thẳng là một *đoạn thẳng không thể vẽ được bằng tay*, là hình ảnh của một đoạn thẳng trên bản vẽ: đường kích thước, biên tấm sàn.

Nó làm phát sinh hai quan niệm qua hành động:

- đường thẳng tham chiếu (biên của tấm sàn) được vẽ ra, nối các điểm loại một hoặc loại hai;
- hai điểm loại một được xếp thẳng hàng (có một phần không vẽ ra nhưng có thể vật chất hóa bằng dụng cụ như thước thẳng hoặc thước cuộn).

Trong loại hình học này, hai điểm loại một không phải bao giờ cũng thẳng hàng (hình 6).



Hình 6. Điểm loại một không thẳng hàng

Sau đây là định lý qua hành động về sự thẳng hàng của hai điểm loại một: “*Nếu hai điểm loại một cùng cách đều một đường thẳng tham chiếu D thì chúng thẳng hàng và đường thẳng nối chúng song song với D*” (hình 7).



Hình 7. Hai điểm loại một thẳng hàng

3.3. Kiến thức gắn với dụng cụ của công trường

Đối với những vấn đề xây dựng trong không gian trung gian được xem xét ở đây, các công cụ đóng vai trò trung tâm giống như trong hình học Euclide. Tương tự như trong *Cơ bản* của Euclide, *compas công trường* bảo đảm cho nhiều điểm cùng cách đều một điểm cho trước. Việc sử dụng ê-ke công trường hỗ trợ cho sự vuông góc của hai đường thẳng. Các dụng cụ vừa tạo ra, vừa đảm bảo một số tính chất không gian. Nhưng trái với thước thẳng của hình học Euclide giúp vẽ những đường thẳng lý tưởng không có bề dày và không giới hạn ở hai đầu, các dụng cụ vẽ của nghề xây dựng mang tính vật chất và có những ảnh hưởng nhất định đến nét vẽ.

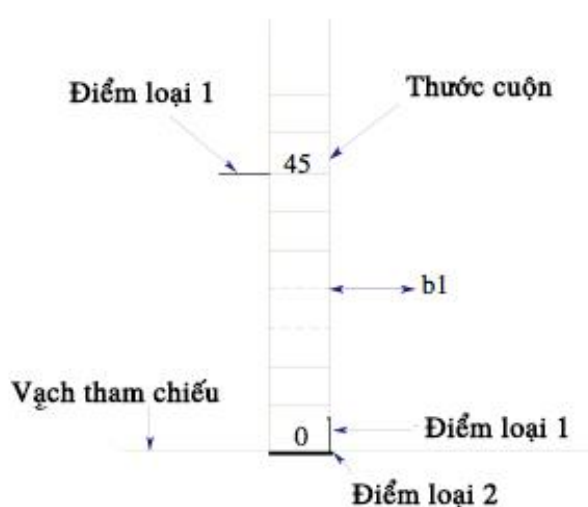
Chúng tôi sẽ minh họa điều này bằng ví dụ về *thước cuộn* và *bút chì công trường*.

Thước cuộn, một vật thể được chia vạch cm, có ba biên chức năng: hai biên “dài” song song và một biên ngắn bằng kim loại khắc vạch số không (xem hình 8). Trong hình học qua hành động, thước cuộn phải thực hiện đồng thời hai sự trùng khít được kiểm tra qua tri giác: biên ngắn trùng khít với đường tham chiếu và *một trong hai biên dài* (b1) phải trùng khít với một đường tham chiếu khác hoặc với một điểm loại một. Sự trùng khít của biên ngắn với đường tham chiếu bảo đảm sự vuông góc của thước cuộn với đường này nhưng *kém hoàn hảo* so với ê-ke.

Bút chì công trường phục vụ cho việc kẻ bằng tay một điểm loại một, với một khoảng cách cho trước, bằng cách kéo dài bằng mắt vạch chia của thước cuộn. Tất cả các vạch chia đều song song với vạch 0 nên điểm loại một thu được song song với đường thẳng tham chiếu.

Ta hãy quay lại với sai lầm trong việc vẽ tâm chỗ chừa (hình 5).

Hai điểm loại một không cắt nhau vì không phân biệt hai biên song song của thước cuộn. “Việc vẽ hai điểm loại một để xác định tâm chỗ chừa phải được thực hiện từ cùng một phía của biên dài (ký hiệu $b1$)”. Quy tắc này là một kiến thức về dụng cụ giúp định hướng tạm thời thước cuộn. Việc vi phạm sự định hướng này (chọn biên khác) dẫn đến việc thu được hai điểm loại một lệch nhau một khoảng bằng chiều rộng thước cuộn (hình 8).



Hình 8. Ba biên của thước cuộn

Kết luận

Khảo sát khoa học luận đã làm rõ sự vận hành của một loại hình học qua hành động, gắn với sự đa dạng của các không gian liên quan và gắn với các dụng cụ dùng để vẽ. Loại hình học này kết nối:

- các kiến thức lý thuyết của hình học Euclide như “điểm”, “đường thẳng”, “song song”, hiện diện trong hành động và phát biểu;
- các kiến thức không gian cho phép định vị và di chuyển trong không gian trung gian của công trường nhờ việc phối hợp không gian nhỏ của bản vẽ tấm sàn đúc sẵn với không gian trung gian;
- các kiến thức về dụng cụ được thể hiện qua từ ngữ như ê-ke (vuông góc) nhưng cũng bao hàm cả những quy tắc ngầm ẩn về sử dụng.

Quan hệ phức hợp giữa hình học lý thuyết và hình học *đọc – vẽ* trong lĩnh vực xây dựng nêu lên vấn đề về bản chất và vị trí của hình học lý thuyết tham chiếu trong các tình huống đào tạo tác nghiệp *đọc – vẽ* cũng như trong việc giảng dạy toán cho những nghề này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bessot A. & Verillon P. (1993) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.
2. Bessot A., Ridgway J. (éds) (2000) *Education for Mathematics in the Workplace*. Kluwer Academics Publishers.
3. Bessot A. Dorier J-L., Déprez S. Eberhard M. (2000) *Pertinence et utilité de savoirs mathématiques dans des cursus éducatifs non strictement mathématiques*. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, n° 13. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01528036>
4. Bessot A. & Laborde C. (2005) Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment. In C. Castela & C. Houdement (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Année 2005. (pp. 39-76) Paris : Editions ARDM et IREM de Paris 7.
5. Brousseau G. (1998) *Théories des situations didactiques*. Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.
6. Brousseau G. (2000) Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. *Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques* : Université de Crète. 67-83. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/>
7. Hadamard J. (1988) *Leçons de géométrie*. Réimpression de la 13ème édition, Armand Colin 1947, 1ère édition 1898, Paris : Editions Jacques Gabay.
8. Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol.10 n°2-3, 133-170.
9. WEILL-FASSINA A. & RACHEDI Y. (1993) Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation, In Bessot A. & Vérillon P. (eds.) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. (pp.57-86). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

MỘT MÔ HÌNH KHOA HỌC LUẬN ĐỂ NGHIÊN CỨU VỊ TRÍ CỦA HÌNH HỌC “TÍNH TOÁN” Ở THPT NHƯ MỘT VẤN ĐỀ ĐẶT RA CHO VIỆC THIẾT KẾ CHƯƠNG TRÌNH

Nguyễn Ngân Giang*, Maggy Schneider**

Tóm tắt

Sử dụng các mô hình lý thuyết như lý thuyết tình huống (TSD) của Brousseau và lý thuyết nhân học trong Didactic (TAD) của Chevallard, chúng tôi đã tiến hành một nghiên cứu sơ bộ về lịch sử hình học và chương trình giảng dạy hình học, cũng như phân tích giá trị kí hiệu và giá trị công cụ của các biểu diễn hình học để chứng minh các tính chất của hình học « tính toán ». Trên cơ sở này, chúng tôi đã xây dựng một mô hình khoa học luận cũng như một thực nghiệm sư phạm với các học sinh và các sinh viên sư phạm.

Résumé

Les cadres théoriques mobilisés sont, d'une part, la TSD de Brousseau et la TAD de Chevallard. Une étude préalable de l'histoire de la géométrie et de son enseignement est menée, de même qu'une analyse des valences sémiotique et instrumentale de plusieurs formalismes susceptibles de prouver des propriétés géométriques de manière calculatoire. Sur cette base, nous avons construit un Modèle Epistémologique de Référence et l'avons traduit au moyen d'une ingénierie didactique dont nous avons testé la faisabilité dans une classe et la recevabilité auprès d'un public de futurs enseignants.

Mục đích của chúng tôi là nghiên cứu vai trò của hình học « tính toán » trong chương trình giảng dạy ở THPT. Hình học tính toán ở đây được hiểu là hình học giải tích và hình học vectơ.

Mô hình lý thuyết của chúng tôi bao gồm lý thuyết về tình huống didactique (TSD) của Brousseau (1998) và lý thuyết nhân học didactique (TAD) của Chevallard (1991 và 1992) được kết hợp hài hòa và bổ trợ lẫn nhau.

Chúng tôi xây dựng một mô hình khoa học luận tham chiếu (MER)¹ theo định nghĩa của Gascon (1993) nhằm hình thành khái niệm vectơ thông qua việc sử dụng các tính chất trong hình học tổng hợp và hình học giải tích. Mô hình này cung cấp chìa khóa không chỉ nhằm đánh giá những thất bại của chương trình học hiện hành mà còn nhằm đánh giá tiềm năng của các thực nghiệm sư phạm.

Để xây dựng mô hình này, chúng tôi sẽ nghiên cứu bức tranh toàn cảnh của hình học trong lịch sử toán nhằm hiểu rõ sự phụ thuộc của hình học vào đại số tuyến tính. Sau đó chúng tôi sẽ đánh giá những thăng trầm của cuộc cải cách toán học hiện đại để hiểu vị trí của hình học vectơ ở Bỉ, ở Pháp cũng như ở Việt Nam trong chương trình phổ thông những năm 70 cho đến nay. Chúng tôi sử dụng biểu diễn « bi-point » được hình thành bởi Burali-Forti và Macolongo như là « bước đệm » từ cấu trúc hình học giải tích sang mô hình vectơ.

1. Hình học trong lịch sử toán học

1.1. Những chỉ trích liên quan đến hình học Euclide

Để hiểu được hình học cơ sở như một lý thuyết suy luận mà chúng ta biết ngày nay, cần phải bắt đầu từ tác phẩm *Eléments* của Euclide, ở đó mọi kiến thức hình học

* NCS, học bổng 911 của Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam

** GS.TS, Đại học Liège

¹ Mô hình khoa học luận tham chiếu là một « mô hình thay thế » đóng vai trò như tài liệu tham khảo cho việc diễn giải mô hình chiếm ưu thế trong các tổ chức nghiên cứu về nó.

phải được chứng minh từ các tiên đề và định đề trước đó. Mặc dù vậy, vẫn có nhiều chỉ trích xoay quanh tác phẩm này:

– **Các định nghĩa không có vai trò thao tác trong lập luận suy diễn:** Các định nghĩa của Euclide « khác với các định nghĩa được tìm thấy trong các văn bản toán học của ngày hôm nay, các khái niệm tồn tại trước khi đặt tên, chứ không phải tồn tại bằng cách đặt tên. »

– **Vai trò của hình vẽ:** Như Kline (1972) nói: « *Hình học Euclide được yêu cầu cung cấp các chứng minh chính xác của các định lý được mô tả trực giác bằng hình vẽ, nhưng nó lại đưa ra các chứng minh trực giác dựa trên các hình vẽ chính xác.* » (tr. 1007).

– **Hình học của các đại lượng dựa trên việc dựng các hình « có thể chồng lên nhau »** Trong hình học Hy Lạp cổ điển, mới chỉ xuất hiện khái niệm số tự nhiên, do đó Euclide sử dụng thuật ngữ « *A so với B như m so với n* » hay « *A so với B như C so với D* ». Đối với mỗi quan hệ « *có cùng độ dài* » Euclid thực hiện điều này thông qua việc « *chồng được lên nhau* » của hai hình. Tuy thế, chúng ta không rõ đây là một định nghĩa về sự bằng nhau của hai hình hay là một tiêu chuẩn được công nhận và chúng ta rơi vào một vòng luẩn quẩn giữa các thuật ngữ được đưa ra. Để hiểu rõ, chúng ta cần đợi sự xây dựng hệ thống số thực cũng như khái niệm nhóm đối xứng và bất biến của chương trình của Erlangen. Trước khi đi vào cụ thể, chúng ta sẽ tìm hiểu vai trò của Hilbert đối với hình học của Euclide.

1.2. Sự hoàn thiện hình học Euclide của Hilbert

Một trong những dự án của Hilbert là khắc phục những « lỗ hổng » của hình học Euclide bởi tác phẩm « *Nền tảng của hình học* » (1899). Hilbert đã chuyển từ những gì có liên quan đến trực giác sang những gì mang tính tiên đề và cấu trúc. Các tiêu chí « *chân lý* » được thay thế bằng tiêu chí « *không có mâu thuẫn* ». Các tiên đề tương đẳng, tỷ lệ, thứ tự và tính liên tục khắc phục những khiếm khuyết của hình học Euclide. Tác phẩm của Hilbert nhấn mạnh đến vai trò của cấu trúc luận, giống như chương trình của Erlangen và chúng ta sẽ xem xét sau đây.

1.3. Chương trình Erlangen

Năm 1872, Felix Klein đề xuất chương trình Erlangen với mục đích phân loại hình học theo các nhóm đối xứng của chúng, chương trình này đã có sự ảnh hưởng tổng hợp sâu rộng trong lĩnh vực toán học cho đến ngày nay. Chú ý rằng, cũng giống như Hilbert, Klein nhấn mạnh đến vai trò của cấu trúc luận và nó được nghiên cứu cụ thể bởi Nicolas Bourbaki.

1.4. Cấu trúc luận của Nicolas Bourbaki

Trong thế kỷ 20, các nhà toán học tập trung nghiên cứu bản chất cấu trúc của toán học. Lấy cảm hứng từ các tác phẩm của Hilbert, Nicolas Bourbaki tập trung công việc của mình trên các tiên đề, để xây dựng lý thuyết cơ bản riêng của mình để trở thành nền tảng của tất cả các nhánh của toán học. Bourbaki đề nghị xây dựng lại và suy nghĩ lại tất cả các môn toán từ các khái niệm về cấu trúc cơ bản mà họ gọi là « *cấu trúc mẹ* » và toàn bộ các nhánh của toán học sẽ được biểu diễn bằng cách kết hợp và làm giàu các tiên đề mới.

Mặc dù có một số chỉ trích về các khái niệm cấu trúc, công việc của Nicolas Bourbaki hoàn toàn đổi mới tầm nhìn về toán học. Công việc này đã đóng một vai trò quan trọng trong sự phát triển của giáo dục toán học ở trường trung học mà chúng tôi sẽ bàn đến sau.

Trước đó, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng quan điểm của Bourbaki về toán học mang đến một cái nhìn mới về hình học như một chương của đại số tuyến tính, một lý thuyết « đa nghĩa » cung cấp đầy đủ các công thức cần thiết để nghiên cứu các đối tượng hình học.

1.5. Sự phụ thuộc của hình học vào đại số tuyến tính

Hình học giải tích: thành công và chỉ trích

Trong lịch sử, mối quan hệ giữa đại số và hình học bắt đầu với sự xuất hiện của hình học giải tích. Những người đầu tiên sử dụng công cụ giải tích trong nghiên cứu hình học là Descartes và Fermat vào thế kỷ 17. Các phương pháp phân tích nhanh chóng đạt được nhiều thành công bởi sự đơn giản trong việc giải quyết nhiều vấn đề của hình học. Tuy nhiên, bên cạnh sự thành công này, cũng có những lời phê bình khác nhau với phương pháp giải tích. Thứ nhất, những tính toán nặng nề và phức tạp làm mất ý nghĩa hình học của vấn đề và do đó làm mất đi vai trò của trực giác hình học. Thứ hai là chỉ trích ý tưởng sử dụng các con số trong việc giải quyết một vấn đề hình học, và sự mơ hồ trong việc lựa chọn hệ thống tọa độ.

Sự tìm kiếm công thức độc lập với việc lựa chọn hệ tọa độ

Trong số những người chỉ trích phương pháp giải tích, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) mong muốn xây dựng một toán tử đại số-hình học mới có tác dụng trực tiếp trên các yếu tố hình học, chẳng hạn như điểm. Sau đó, Mobius công bố tác phẩm « *Calcul barycentrique* », một hình thức hoạt động đại số trên các điểm của không gian. Song song đó, năm 1835, Bellavitis xuất bản « *Calcul des Equipollences* », trong đó, lần đầu tiên khái niệm về vectơ được định nghĩa như là một lớp tương đương. Đây là lần đầu tiên các thực thể đại số được đại diện cho đối tượng hình học.

Sự xuất hiện của đại số tuyến tính như một lý thuyết tiên đề đa nghĩa

Lý thuyết mở rộng của Hermann Grassmann là một bước ngoặt trong lịch sử của đại số tuyến tính vì nó giới thiệu một cái nhìn mới về hình học mà mở rộng các khái niệm mà bây giờ chúng ta gọi là hình học afin, hình học vectơ và hình học xạ ảnh. Bằng cách kết hợp các kết quả của Grassmann, Peano là một trong những nhà toán học đầu tiên đã tiên đề hóa đại số tuyến tính. Quan điểm này cho phép chúng ta xem xét lý thuyết đại số tuyến tính như một lý thuyết tiên đề « đa nghĩa » chứa cả khái niệm không gian hàm và không gian vectơ. Việc tiên đề hóa đại số tuyến tính cho thấy lợi ích trong mối quan hệ với hình học với thông qua tìm kiếm để xây dựng một tính toán hình học nội tại, không phụ thuộc vào hệ tọa độ.

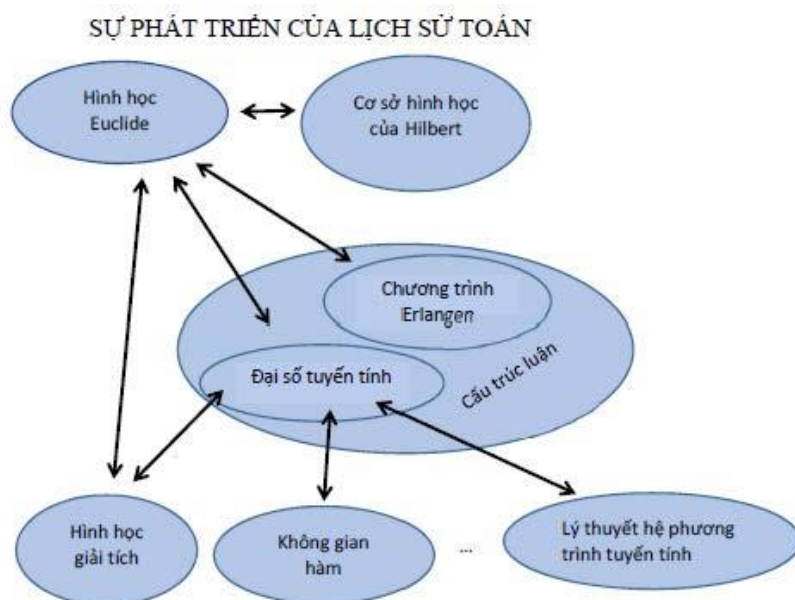
Phù hợp với quan điểm này về việc tiên đề hóa đại số tuyến tính, cần nhấn mạnh đến một « *phép biện chứng không thể tránh khỏi nhằm kết hợp Đại số, đặc biệt là Đại số tuyến tính và Hình học. Các câu hỏi về Hình học cơ sở và việc xác định các đối* »

tượng tuyến tính dẫn đến cơ sở của đại số và tuyến tính. Đổi lại, nền tảng này mở ra khả năng suy nghĩ các vấn đề đại số theo cách hình học. » Dunia (2013, tr. 164).

Sự tuyến tính hóa hình học và sự hình học hóa đại số

Đây là thuật ngữ mà Bkouche (1986) giải thích: « [...] sự tuyến tính hóa hình học cho phép sự hình học hóa đại số tuyến tính cũng như các lĩnh vực khác có liên quan đến tuyến tính» (R. Bkouche 1986, tr. 489). Trong khi đó, Dieudonné (1964), trong lời nói đầu của cuốn sách « *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* », tin rằng hình học cơ sở vẫn là một phương tiện thuận lợi tiếp cận hình học hiện đại, bao gồm phép toán vectơ cho dù đại số tuyến tính có trở thành « con đường hoàng kim » để nghiên cứu hình học cơ sở.

Chúng ta có thể tóm tắt phần này trong sơ đồ dưới:



Sơ đồ 1

2. Sự phát triển của việc giảng dạy hình học ở phổ thông

2.1 Cuộc cải cách của toán học hiện đại

Trước cải cách của toán học hiện đại, hình học được giảng dạy trong trường trung học là hình học Euclid và sách giáo khoa cũng có những hạn chế như đã phân tích trong tác phẩm *Eléments* của Euclide, cơ bản là thiếu một nền tảng cho các chứng minh chặt chẽ trên cơ sở tiên đề. Nói cách khác, đó là hình học « *tiên đề tự nhiên* » theo định nghĩa của Houdement và Kuzniak (2006) trong phân tích của họ về thực tiễn giảng dạy. Vì lý do này, đầu những năm 50, Bỉ và đặc biệt là Pháp, các nhà toán học đang bắt đầu tìm kiếm một cuộc cải cách toàn diện của giáo dục.

Tại thời điểm này, như đã giải thích tại Mục I, các nhà toán học thấy rõ mối quan hệ giữa hình học và đại số tuyến tính và đề xuất giảng dạy đại số tuyến tính ở trung học bởi vì nó thống nhất hình học tổng hợp và hình học giải tích, đồng thời nó cung cấp một nền tảng chặt chẽ để nghiên cứu hình học cơ sở. Theo Houdement và Kuzniak (2006), các mô hình giáo dục Hình học sẽ tập trung vào phương pháp tiên đề, nơi các hình vẽ chỉ đóng vai trò công cụ trực quan.

Những chỉ trích về cải cách toán học hiện đại xuất hiện ngay sau đó, đặc biệt liên quan đến việc giảng dạy hình học. Cùng lúc đó, Krygowska (1975) chỉ ra rằng định nghĩa mới của vectơ như là một phần tử của không gian vectơ không liên quan gì đến giảng dạy trong vật lý cũng như không có liên quan đến trực giác hình học trong việc nghiên cứu phép toán vectơ. Tương tự như vậy, Bkouche Charlot và Rouche (1991) nhấn mạnh câu hỏi đáng báo động, về ý nghĩa của chương trình toán học đang được giảng dạy đối với học sinh.

Tại Bỉ, tác phẩm của GEM (1985) lên án sự thái quá của thời đại, đặc biệt là sự trừu tượng của các khái niệm đối với học sinh.

Về cơ bản, sự sai sót này là kết quả của việc thiếu các nghiên cứu didactic một cách nghiêm túc tại thời điểm này.

2.2. Sau cải cách và những chỉ trích liên quan

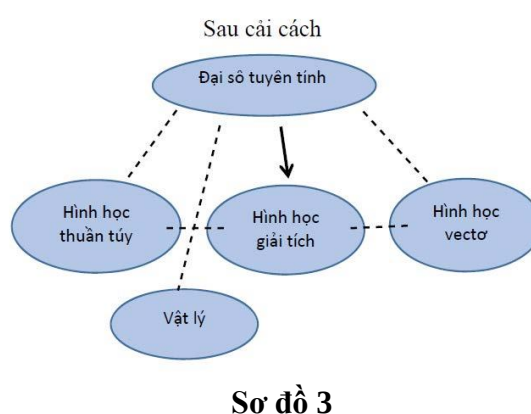
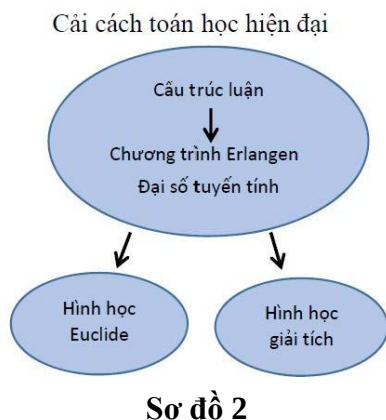
Sau cải cách, chúng ta quay trở lại mô hình hình học « *tiên đề tự nhiên* » với khái niệm « *l'îlot déductif* »² mà Choquet (1964) đề xuất để giới thiệu cho học sinh.

Phép toán vectơ xuất hiện và có tính thuyết phục nhất định

Hình học giảng dạy sau cải cách là một sự pha trộn của hình học tổng hợp, hình học giải tích và hình học vectơ. Phép toán vectơ được trình bày chính thức trong chương trình học, như một công cụ giải quyết vấn đề hình học cũng như vật lý. Nhưng trong thực tiễn giảng dạy, phép toán vectơ tập trung chủ yếu vào các khía cạnh kỹ thuật - lý thuyết trong khi việc giải quyết các bài toán sẽ được thực hiện với hình học giải tích. Đại số tuyến tính do đó vẫn còn được tham khảo nhiều trong thực tiễn giảng dạy. Đối với các khái niệm về vectơ, nó được giới thiệu một cách « *ngây thơ* », gắn với khái niệm về sự tịnh tiến hoặc thông qua ba đặc điểm – hướng, phương và độ dài.

Tất cả những yếu tố này cho thấy sự trở lại của hình học « *tự nhiên* » theo nghĩa của Houdement và Kuzniak nơi thuộc tính tương đẳng, tác động và thứ tự vẫn được dạy theo kinh nghiệm và trực giác. Cách tiếp cận này không mang đến sự thuận lợi cho học sinh trong việc tiếp cận phép toán vectơ, khi có nhiều nghiên cứu didactic đã chỉ ra sự khó khăn của học sinh trong việc tiếp cận khái niệm vectơ, như Lê Thị Hoài Châu (1997), Bittar (1998) và Pressiat (1999). Chúng ta có thể tóm tắt phần này II với sơ đồ 2 và 3 dưới đây:

CHUYỂN DỊCH DIDACTIQUE



² « *L'îlot déductif* » là một tổ chức toán học suy diễn bao gồm nhiều tính chất toán học mà một số được chọn như tiên đề có sẵn.

Việc đánh giá này đã khiến chúng tôi xây dựng một mô hình khoa học luận, trong đó sử dụng biểu diễn « *bi-point* » như là « bước đệm » từ cấu trúc hình học giải tích sang mô hình vector.

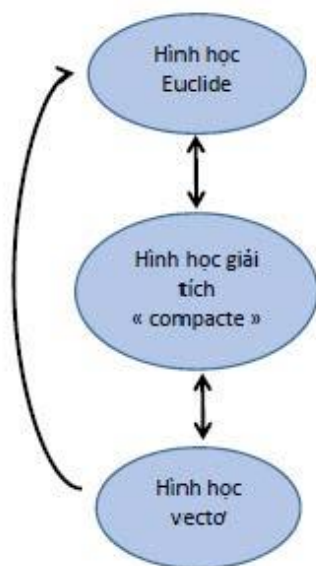
3. Biểu diễn « *bi-point* » như bước đệm từ cấu trúc hình học sang mô hình vector

3.1 Mô hình MER

Mô hình khoa học luận đề xuất ở đây được xác định bởi tham chiếu đến « *praxéologies modélisation* »³ và « *praxéologies déduction* »⁴ phân biệt bởi Schneider (2008).

Tại đây, các đối tượng được xây dựng trước là những đối tượng hình học cơ bản: điểm, đường thẳng và mặt phẳng. Các phương pháp chứng minh chủ yếu dựa trên kết quả của hình học Euclide dựa trên mô hình « *tiên đề tự nhiên* » mà học sinh đã biết trước: các trường hợp bằng nhau của hai tam giác và định lý Thales. Đối với hình học trong không gian, chúng tôi xây dựng một hệ thống các tính chất hình học hữu ích cho phần mở rộng trong không gian.

Như vậy, mục đích của chúng tôi là xây dựng một biểu diễn « *tính toán* » cho phép chứng minh các tính chất hình học. Như đã nêu, đó là biểu diễn « *bi-point* » của hình học giải tích « *compacte* ». Sơ đồ 4 minh họa mối quan hệ biện chứng giữa các dạng hình học trong mô hình MER của chúng tôi.



Sơ đồ 4

3.2. Biểu diễn « *bi-point* » trong lịch sử

Nhắc lại rằng, Leibniz, Bellavitis, Grassmann, Burali-Forti và Marcolongo mong muốn vượt qua những tính toán cồng kềnh trên các tọa độ và tạo ra một công thức tính

³ « *Praxéologie modélisation* » là một mô hình toán học bao gồm một hệ thống các đối tượng được xây dựng sẵn. Các đối tượng này đóng vai trò công cụ để giải quyết các nhiệm vụ toán học liên quan nhưng chúng không phải các đối tượng toán học trong một lý thuyết toán học theo định nghĩa của các nhà toán học.

⁴ « *Praxéologie déduction* » là một tổ chức toán học suy diễn mà ở đó các nhiệm vụ toán học khác hoàn toàn so với các nhiệm vụ toán học của « *Praxéologie modélisation* ». Nó liên quan đến việc tái cấu trúc các khái niệm để đưa ra các lập luận suy diễn, cảm sinh ra các hệ lý thuyết tiên đề hay các định lý đã được chứng minh trước đó, nhằm xây dựng một hệ tiên đề đơn giản và đầy đủ cũng như sắp xếp hợp lý thứ tự các định lý.

toán thể hiện các tính chất hình học nội tại, tức là không phụ thuộc vào sự lựa chọn hệ tọa độ.

Trong tác phẩm kinh điển *Ausdehnungslehre* (1844), Grassmann đưa ra biểu diễn $B - A$, chính là biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AB}$ của Bellavitis, và đưa ra công thức tổng hai vec tơ như sau :

$$(C - B) + (B - A) = C - A$$

Phát triển ý tưởng này, vào năm 1970, Dan Pedoe xuất bản cuốn sách có tên « *Geometry, a comprehensive course* » ở đó ông biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OP}$ bởi P và vec tơ $\overrightarrow{PQ}$ bởi $Q - P$. Biểu diễn này giúp giải quyết các vấn đề trong hình học afin. Ông còn muốn phát triển biểu diễn này trong hình học Euclide và kí hiệu tích vô hướng của hai vectơ A và B trong hệ tọa độ vuông góc bởi $A \cdot B^2$, độ dài vectơ A bởi $A \cdot A$ hoặc A^2 và tính trực giao của $B - A$ và $C - D$ được định nghĩa bởi công thức $(D - C)(B - A) = 0$. Ông đưa ra sau đó một ví dụ nổi tiếng, đường tròn Euler, sử dụng kí hiệu này.

Mô hình khoa học luận của chúng tôi được tiến hành tương tự, tuy vậy chúng tôi sử dụng biểu diễn bi-point trong hình học afin và sử dụng song song biểu diễn bi-point với biểu diễn vectơ trong hình học mê-tric. Chúng tôi phát triển mô hình này trong phần tiếp theo.

3.3. Một cách tiếp cận biểu diễn « bi-point » để xây dựng mô hình MER

Cách tiếp cận sử dụng khái niệm « *praxéologie modélisation* » giải thích bởi « *style heuristique* » của Lakatos (1984). Chúng tôi biểu diễn các công thức đại số bởi kí hiệu « *bi-point* » trong mặt phẳng và trong không gian, cụ thể :

1. $ABCD$ là một hình bình hành (có thể dẹt) khi và chỉ khi $B - A = C - D$ (1)

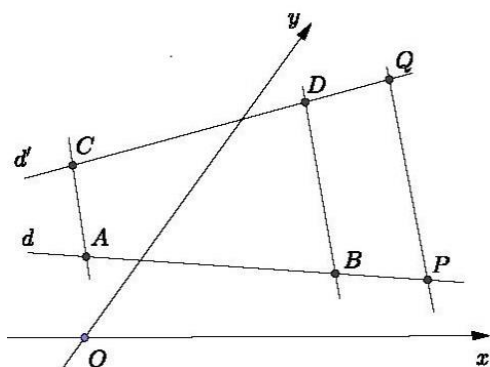
2. P thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi tồn tại k sao cho $P = A + k(B - A)$ (2)

Giá trị k cho biết vị trí của P trên đường thẳng AB .

3. Trên hình 1, các điểm A, B và P trên đường thẳng d , và C, D và Q trên đường thẳng d' , thỏa mãn

$$P = A + k(B - A) ; \quad Q = C + k(D - C)$$

với cùng một giá trị k .



Hình 1

Cụ thể, giáo viên giao cho học sinh các nhiệm vụ với các số liệu cụ thể nhằm:

1. Xác định đỉnh thứ tư D của hình bình hành $ABCD$ từ ba đỉnh A, B và C .

2. Xác định tọa độ của điểm P trên đường thẳng AB mà khoảng cách từ P đến A gấp đôi từ P đến B.

Đề ý rằng, với nhiệm vụ thứ hai, cần chú ý đến thứ tự của các điểm trên đường thẳng và trên thực tế, trên đường thẳng AB, tồn tại hai điểm P thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chúng tôi cũng chứng minh sự độc lập của hai công thức trong (1) và (2) đối với việc lựa chọn hệ tọa độ, ví dụ công thức

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$$

trong công thức hình bình hành, có thể được tổng quát hóa bởi công thức

$$B - A = C - D.$$

Tính chất bất biến của (1) và (2), so với hệ tọa độ được chọn, dẫn đến việc định nghĩa lớp tương đương và định nghĩa vectơ bởi lớp tương đương. Từ đó, chúng tôi có thể chứng minh các tính chất khác trong hình học sử dụng biểu diễn « *bi-point* ».

Kết luận

Tóm lại, chúng tôi đã tiến hành nghiên cứu lịch sử toán học cũng như lịch sử giảng dạy toán học để xây dựng một mô hình khoa học luận tham chiếu. Mô hình này đóng vai trò nghiên cứu mối quan hệ biện chứng giữa hình học tổng hợp, hình học giải tích và hình học vectơ. Chúng tôi cũng tiến hành xây dựng một dự án giảng dạy và đã được thực nghiệm tại các trường phổ thông của Bỉ. Các phân tích chi tiết được trình bày trong luận án của Nguyễn Ngân Giang.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bkouche, R. et Groupe inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques (1982), *La Rigueur et le calcul : Documents historiques et épistémologiques (Collection Formation des maîtres en mathématiques)*, CEDIC-Nathan Paris.
2. Bkouche, R., Charlot, B., Rouche, N. (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : A. Colin.
3. Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
4. Chau, Le Thi Hoai (2001), *Difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur pour des élèves de première année de lycée en France et au Viet-Nam*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 21, n°1.2, p. 157-188.
5. Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigne*, Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.
6. Chevallard,, Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12/1, p. 72-112.

7. Gascon, J. (1993), *Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée»*, Petit x 37, p. 43-63.
8. Groupe enseignement mathématiques (GEM) (1985), *Une géométrie pour tous les jours*, Louvain-la-Neuve.
9. Houdement, C., Kuzniak, A. (2006), *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*, Annales de didactique et de sciences cognitives, p. 175-193.
10. Kahane, J-P. (1999), *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*.
11. COJEREM Dirⁿ Schneider, M. (1995), *Des situations pour enseigner la géométrie (guide méthodologique)*. Bruxelles : Be boeck-Wesmael.
12. Pressiat, A. (1999), *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs »*, Thèse de doctorat, L'Université de Paris VI.
13. Schneider, M. (2010), *Traité de didactique des mathématiques*, Presses Universitaires de Liège.

CÁC TÌNH HUỐNG TRANH LUẬN KHOA HỌC XOAY QUANH MỘT SỐ CHƯƠNG NGẠI TRI THỨC LUẬN CỦA KHÁI NIỆM GIỚI HẠN

*Lê Thái Bảo Thiên Trung**

Tóm tắt

Những nghiên cứu trước đây đã xác định các chương ngại tri thức luận và các quan điểm tri thức luận của khái niệm giới hạn. Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu những tình huống dạy học đặt học sinh (HS) đối mặt với hai chương ngại bằng hình thức tranh luận khoa học. Chương ngại thứ nhất xoay quanh câu hỏi “Một giới hạn có đạt tới hay không?” đã được Cornu (1983) chỉ ra. Chương ngại thứ hai xuất phát từ nghiên cứu của chúng tôi (Le Thai Bao T. T, 2010), theo đó, quan điểm « xấp xỉ x » là một chương ngại đối với quan điểm « xấp xỉ $f(x)$ ».

Từ khóa: chương ngại tri thức luận, tranh luận khoa học, đồ án dạy học, giới hạn hàm số

Résumé

Les résultats des travaux précédents ont mis en avant certains obstacles épistémologiques et points de vue épistémologiques concernant la notion de limite. Dans nos recherches récentes, nous tentons de concevoir et analyser des débats scientifiques confrontant les élèves aux deux obstacles suivants. Le premier obstacle autour de la question « une limite est-elle ou non atteinte ? » a été mis en évidence par Cornu (1983). Le deuxième vient de notre hypothèse dans notre étude (Le Thai Bao T. T. 2010): la problématique d'« approximation x » est candidate à être un obstacle épistémologique à la problématique d'« approximation $f(x)$ ».

Mots clés: obstacle épistémologique, débat scientifique, ingénierie didactique, limite de fonction

1. Chương ngại tri thức luận của khái niệm giới hạn

Để thực hiện một phân tích tri thức luận, ngoài việc xác định các thời điểm lịch sử đánh dấu sự nảy sinh, tiến triển và cả bước lùi xoay quanh một đối tượng tri thức, ta cần xác định các vấn đề, câu hỏi được đặt ra liên quan đến tri thức trong thời điểm lịch sử và cách thức các nhà toán học thời ấy tìm cách trả lời. Theo Brousseau (1989), phân tích tri thức luận còn cho phép xác định những khó khăn mang bản chất tri thức luận (được gọi là những chương ngại tri thức luận) mà người học buộc phải trải qua trong quá trình lĩnh hội tri thức. Chương ngại tri thức luận thường gây ra những khó khăn và sai lầm có thể dự đoán được.

Cornu (1983) đã thực hiện một phân tích tri thức luận nhằm xác định các chương ngại tri thức luận của khái niệm giới hạn:

“Các chương ngại này giải thích một số chậm trễ, một số sai lầm; nhưng chúng không chỉ là mặt tiêu cực. Chúng thường là những nhân tố cho sự tiến bộ, người ta phải xây dựng các phương tiện để vượt qua chương ngại.” (trang 57)

Đọc giả có thể tìm đọc đầy đủ các chương ngại về giới hạn của Cornu (1983), trong bài báo này, chúng tôi chỉ tập trung vào chương ngại thể hiện sự khó khăn khi trả lời câu hỏi “một giới hạn có đạt tới hay không?”

* TS, Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

1.1. Chương ngại “Một giới hạn có đạt tới hay không?”

Khi nghiên cứu các giới hạn dạng $0/0$ xuất hiện trong bài toán vận tốc tức thời, Newton đã mô tả giới hạn của tỉ số giữa số gia quãng đường với số gia thời gian là “*trạng thái cuối cùng của đại lượng vận tốc trước khi các số gia biến mất*”. Câu hỏi đặt ra cho quá trình nhận thức: liệu ta có đạt được giới hạn này hay không? Cornu (1983) đã nghiên cứu hiệu ứng của chương ngại này ở HS qua hệ thống câu hỏi trên các dãy số. Chẳng hạn, câu hỏi 1 của tác giả như sau:

“1 – Đây là một số : 0,3
và một số khác : 0,33
và một số nữa : 0,333
... vv ... : 0,3333
0,33333

.....

$\frac{1}{3}$ có trong dãy này không?

Có số nào trong dãy lớn hơn $\frac{1}{3}$ không?

Ta có thể tìm thấy một số $a < \frac{1}{3}$, lớn hơn mọi số trong dãy này không?

Dạng viết 0,3333... có nghĩa là gì? Nó có biểu diễn cho một số nào không? Là số nào?

[...]” (trang 144)

Câu trả lời của HS cho thấy họ khó chấp nhận $\frac{1}{3}$ là giới hạn của dãy trên. Nhiều giải thích cho thấy HS tin rằng dạng viết thập phân vô hạn tuần hoàn 0,3333... là giới hạn và cũng là giá trị cuối cùng của dãy trên, hơn nữa giá trị này nhỏ nghiêm ngặt hơn $\frac{1}{3}$.

Với giới hạn hàm số, chương ngại này sẽ gây ra khó khăn cho HS khi đứng trước câu hỏi: nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ thì có tồn tại giá trị nào của x sao cho $f(x) = L$ hay không?

1.2. Chương ngại: bước chuyển từ quan điểm xấp xỉ x sang quan điểm xấp xỉ $f(x)$

Từ thời Hy Lạp Cổ đại, tư tưởng của khái niệm giới hạn đã xuất hiện trong các kĩ thuật tính xấp xỉ một đại lượng và cải thiện độ xấp xỉ (chẳng hạn, xấp xỉ diện tích hình thang cong bằng các hình chữ nhật và ngày càng nhiều hình chữ nhật). Từ nghiên cứu của mình năm 2010 (TLTK), chúng tôi tóm tắt hai quan điểm được tìm thấy trong lịch sử của khái niệm giới hạn được ẩn chứa trong kí hiệu hiện đại $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ như sau:

– *Quan điểm xấp xỉ x* : biến độc lập x càng lúc càng gần giá trị a kéo theo $f(x)$ càng lúc càng gần L . Nghĩa là: độ xấp xỉ (độ gần) của x với a sẽ kéo theo độ xấp xỉ của $f(x)$ với L .

– *Quan điểm xấp xỉ $f(x)$* : độ xấp xỉ của $f(x)$ tới L mà ta mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ của x tới a phải chọn. Quan điểm này chính là nội hàm của định nghĩa chính xác bằng ngôn ngữ ε, δ ngày nay.

Lịch sử của khái niệm giới hạn cho thấy, nhân loại phải mất hơn 2000 năm mới thể hiện chính xác khái niệm giới hạn bằng quan điểm xấp xỉ $f(x)$. Ngoài ra, nghiên cứu của chúng tôi năm 2010 cũng cho thấy, HS dễ dàng tiếp cận quan điểm xấp xỉ x nhưng

gặp khó khăn rất lớn khi chuyển sang quan điểm xấp xỉ $f(x)$. Như vậy bước chuyển từ quan điểm trực giác (xấp xỉ x) sang quan điểm đúng đắn (xấp xỉ $f(x)$) thực sự là một chương ngại tri thức luận. Chương ngại này cũng giải thích lí do tại sao nhiều nước trên thế giới (Pháp, Mỹ...) chỉ đặt mục tiêu truyền thụ quan điểm xấp xỉ x trong dạy học toán phổ thông.

2. Tranh luận khoa học

Trong bài báo trước đây (Lê Thái Bảo Thiên Trung, 2017), chúng tôi đã trình bày định nghĩa, lợi ích và cách thức tiến hành một đề án dạy học bằng hình thức tranh luận khoa học. Để độc giả dễ theo dõi, chúng tôi tóm tắt lại một số điểm chính như sau:

- Theo Legrand (1993, 2000), mục tiêu của việc dạy học môn toán không phải là biến mọi HS thành nhà toán học, nhưng là phát triển trí tuệ của HS để họ hiểu và giữ lại những điều cốt lõi của môn học mà xã hội mong muốn. Ngoài ra, dạy học môn toán cần góp phần rèn luyện cho HS những thói quen giao tiếp trong cuộc sống cộng đồng, nhất là trong những tình huống xung đột giữa những điều có lí (theo lẽ thông thường) với những lí lẽ khoa học. Như vậy lớp học nên tổ chức như một cộng đồng khoa học và ở đó chân lí không đến từ sự phán quyết của giáo viên nhưng được người học tự xây dựng với nhau.

- Arsac và các cộng sự (1992) đã phát biểu các quy tắc tranh luận toán học cần hình thành và phát triển ở HS:

- + Một phát biểu toán học sẽ chỉ hoặc đúng hoặc sai.
- + Một phản ví dụ đủ để bác bỏ một phát biểu.
- + Trong toán học, để tranh luận người ta dựa vào một số tính chất hay định nghĩa đã được phát biểu một cách rõ ràng và được thừa nhận.
- + Trong toán học, người ta không thể quyết định tính hợp thức của một phát biểu bằng cách dựa vào sự kiện là đa số những người có mặt tin rằng phát biểu ấy đúng.
- + Trong toán học, có những ví dụ xác nhận một phát biểu nào đó không đủ để chứng tỏ rằng phát biểu đó đúng.
- + Trong toán học một điều được ghi nhận trên hình vẽ không đủ để chứng tỏ rằng một phát biểu hình học là đúng.

- Tranh luận khoa học được thực hiện theo quy trình: Làm việc cá nhân → Nghiên cứu theo nhóm và soạn thảo áp phích → Tranh luận chung trong lớp → Thể chế hóa.

3. Tổ chức tranh luận khoa học từ chương ngại thứ nhất

3.1. Kết quả thực nghiệm lần thứ nhất

Cũng trong nghiên cứu của mình năm 2017, chúng tôi đã trình bày những điểm đạt được và những điểm cần cải thiện khi xây dựng và thực nghiệm một tình huống tranh luận khoa học xoay quanh câu hỏi:

Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ thì $f(2)$ có luôn luôn bằng 5 không?

Giải thích rõ câu trả lời của bạn.

Thực nghiệm cho thấy, chương ngại tri thức luận đã làm xuất hiện những câu trả lời đối lập nhau. Điều này làm cho cuộc tranh luận trở nên tự nhiên. Một nhóm HS đã tự xây dựng phản ví dụ để thuyết phục được cả lớp rằng: *Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ thì không nhất thiết phải tồn tại x sao cho $f(x) = 5$* . Quy tắc tranh luận “Một phản ví dụ đủ để bác bỏ một phát biểu” đã trở thành lí lẽ thuyết phục cả lớp. Tuy nhiên, thực nghiệm còn cho thấy cần phải dự kiến thêm trong phân tích tiên nghiệm sự xuất hiện của một số quy tắc tranh luận khác để giúp giáo viên có những quyết định sư phạm hợp lí hơn. Chính vì vậy, chúng tôi đã tiến hành bổ sung phân phân tích tiên nghiệm và tiến hành lần thực nghiệm thứ hai.

3.2. Thực nghiệm lần thứ hai

Thực nghiệm đã được thực hiện trong một lớp học gồm 39 HS lớp 11 ở một trường Trung học phổ thông thuộc tỉnh Bình Dương (ngày 29/03/2017). Với phương pháp luận của đề án dạy học, kết quả thực nghiệm chỉ phản ánh những quan sát trên tập hợp HS đã chọn và không mang tính suy diễn cho một tập hợp lớn hơn. Vì điều kiện thực tế không cho phép chọn mẫu ngẫu nhiên như yêu cầu của thống kê suy diễn. Lớp học này không phải là lớp đặc biệt của trường và được chọn chỉ theo tiêu chí đã học khái niệm giới hạn hàm số. Câu hỏi để tranh luận được thay đổi so với thực nghiệm lần 1 như sau:

Em hãy cho biết phát biểu sau đúng hay sai: “Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ thì $f(2) = 5$ ”.

Giải thích rõ câu trả lời của em.

Về phương diện tranh luận toán học, chúng tôi đã dự kiến hình thành và phát triển ở HS ba quy tắc tranh luận toán học:

- Một phát biểu toán học sẽ chỉ hoặc đúng hoặc sai.
- Một phản ví dụ đủ để bác bỏ một phát biểu.
- Trong toán học có những ví dụ xác nhận một phát biểu nào đó không đủ để chứng tỏ rằng phát biểu đó đúng.

Giáo viên (GV) chia lớp thành 9 nhóm, mỗi nhóm 4 HS.

Sau khi làm việc cá nhân, HS nghiên cứu theo nhóm để soạn áp phích. Kết quả của các áp phích như sau: 2 nhóm trả lời “Phát biểu đúng”; 3 nhóm trả lời “Phát biểu lúc đúng lúc sai”; 4 nhóm trả lời “Phát biểu sai”.

GV bắt đầu cuộc tranh luận với một áp phích “Đúng”, rồi đến một áp phích “lúc Đúng lúc Sai” của nhóm 9:

“TH1: Giả sử $f(x) = x + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$f(2) = 5$$

$\Rightarrow$ Đúng.

$$TH2: \text{Giả sử } f(x) = \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$f(2) = \text{MATH ERROR?}^1$$

$\Rightarrow$ Sai.

$\Rightarrow$ Phụ thuộc vào hàm số mới có thể kết luận được”.

Sự xuất hiện của câu trả lời này đã cho phép cả ba quy tắc tranh luận toán học (xác định trong phân tích tiên nghiệm) xuất hiện và phát triển ở HS:

“HS1: Trong một mệnh đề mà nó khẳng định nếu tất cả các ví dụ đều đúng thì mệnh đề đó mới đúng, còn nếu có một mệnh đề có cái sai thì mệnh đề mình đưa ra nó cũng sai... kéo theo sai.

HS2: $\lim f(x)$ khi x tiến tới 2 bằng 5 và $f(2)$ cũng bằng 5 thì có thể đúng khi nó không ở dạng vô định. Nhưng nếu $f(2)$ ở dạng vô định thì $f(2)=5$ thì sai. Mà phát biểu của mình ở dạng nếu... thì... câu đó như khẳng định thì mình phải chọn... cho nó là sai. $\lim f(x)$ khi x tiến tới 2 bằng 5 thì có thể $f(2)$ không bằng 5.

GV: Vậy em có ý kiến giống ý kiến của Phương [HS2] là nó đúng hay sai là tùy thuộc vào hàm số...có trường hợp không đúng thì phát biểu đó sai...vậy cuối cùng phát biểu đó đúng hay sai nè?

Nhiều HS: sai...

Các HS còn lại xì xào tranh luận khi nào đúng... sai.”

Sự xung đột giữa lí lẽ đời thường “Một phát biểu có thể lúc đúng lúc sai” và quy tắc tranh luận toán học “Một phát biểu toán học sẽ chỉ hoặc đúng hoặc sai” đã xảy ra. Chúng ta cũng thấy rằng quy tắc tranh luận toán học này không dễ dàng được tất cả HS trong lớp chấp nhận.

4. Tổ chức tranh luận khoa học từ chương ngại thứ hai

4.1. Bổ sung quan điểm xấp xỉ x và giới thiệu phần mềm Geogebra

Các nghiên cứu của chúng tôi cho thấy: hai quan điểm xấp xỉ của khái niệm giới hạn rất ít được đề cập trong các sách giáo khoa hiện hành của Việt Nam và hoàn toàn vắng bóng nơi những HS được điều tra; với yêu cầu giải thích ý nghĩa của kí hiệu giới hạn, hầu hết HS viết một chỉ dẫn để tính giới hạn. Vì vậy trong buổi thực nghiệm thứ nhất (45 phút), chúng tôi giới thiệu quan điểm xấp xỉ x cho một lớp học gồm 24 HS đã học khái niệm giới hạn bằng các hoạt động trên bảng số và đồ thị (HS được dạy cách vẽ và một số thao tác trên đồ thị trong môi trường Geogebra ứng với một biểu thức hàm số cho trước).

Trong khuôn khổ của bài báo, chúng tôi chỉ giới thiệu các câu hỏi đặt ra cho học sinh trong buổi thứ nhất:

¹ Học sinh ghi thông báo xuất hiện trên màn hình máy tính bỏ túi khi tính $f(2)$.

Câu 1) Tính giá trị của $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ trong bảng sau (ghi lại kết quả vào phiếu học tập) và dự đoán $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

X	$f(x)$	x	$f(x)$
1		-1	
0.1		-0.1	
0.00001		-0.00001	
0.0000001		-0.0000001	

Câu 2) Vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, sau đó phóng to đồ thị về phía trục tung và dự đoán $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

Câu 3) So sánh hai kết quả trên và đưa ra dự đoán cuối cùng về $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$ Nêu nhận xét.

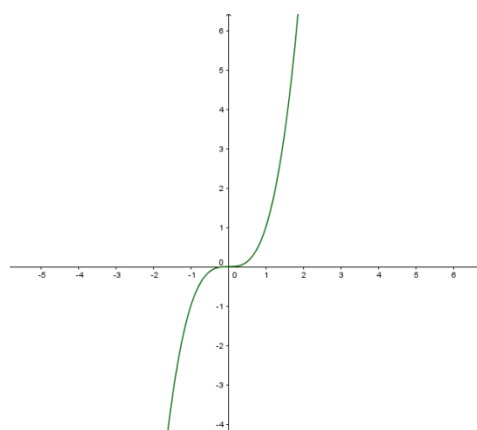
4.2. Kết quả thực nghiệm xoay quanh chương ngại thứ hai

Từ một hàm số trong tác phẩm của Stewart (2012, trang 108-109), giáo trình Giải tích thể hiện quan điểm dạy học khám phá và được sử dụng phổ biến ở Mỹ hiện nay, chúng tôi xây dựng thành một tình huống dạy học phù hợp với hình thức tranh luận khoa học.

Tranh luận khoa học được thực nghiệm trong buổi tiếp theo (90 phút) với cùng một lớp học như buổi thứ nhất. Lớp học được chia thành 6 nhóm (mỗi nhóm gồm 4 HS và một Laptop với phần mềm Geogebra). Câu hỏi để tổ chức tranh luận như sau:

Cho hàm số $f(x) = x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$ có bảng số và đồ thị như sau:

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101



Bạn Nam phát biểu: “Từ bảng số và đồ thị, ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10000} \right) = 0$ ”.

Theo em, phát biểu của Nam có đúng không? Giải thích rõ câu trả lời của em.

(Được sử dụng phần mềm Geogebra nhưng không được sử dụng máy tính bỏ túi.)

– Kết quả làm việc cá nhân cho thấy đa số HS trong lớp (21/24 HS) cho rằng “Nam đúng”. Ba HS còn lại lưỡng lự và giải thích: “Cần tính thêm một số giá trị thì mới chắc chắn được, do các số này chưa phải gần bằng 0 lắm”. Điều này cho phép sự tranh luận diễn ra khi HS nghiên cứu theo nhóm và giải thích cho sự xuất hiện những áp phích có nội dung xung đột nhau.

– Kết quả nghiên cứu theo nhóm cho thấy 4 nhóm trả lời “Nam đúng” và 2 nhóm trả lời “Nam sai”. Sự xuất hiện các câu trả lời đối lập cho phép cuộc tranh luận diễn ra một cách tự nhiên.

– Khi tranh luận trong lớp, GV bắt đầu bằng áp phích “Nam đúng” với giải thích rõ ràng nhất rồi tiến đến so sánh với áp phích trả lời “Nam không đúng”.

Nam Đúng. Đồ thị trục x và trục y có giao điểm là 0.
Khi quan sát bảng số liệu x giảm từ 1 đến 0,0
 $x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$ giảm từ 1,00028
đến 0,000101

Nhóm 1

Phát biểu của Nam không đúng!
Vì: Khi $x \rightarrow 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10000} \right) = \frac{1}{10.000}$
Hàm số chỉ tiến gần 0.

Nhóm 3

Hai nhóm này không thể thuyết phục nhau bằng quan điểm xấp xỉ x:

“HS_N3: Tại vì theo bảng này thì con số nhỏ nhất ở cột bên phải là một con số gần bằng 0,0001.

HS_N1: Nó phải bằng 0 chứ, cứ tính thêm mấy giá trị nó sẽ ra vậy, mà không thấy càng ngày càng nhiều số 0 hả? Sau dấu phẩy hai ba số 0.

HS_N3: Đúng không thầy? Tại thầy không cho xài máy tính bỏ túi nên con không biết!.

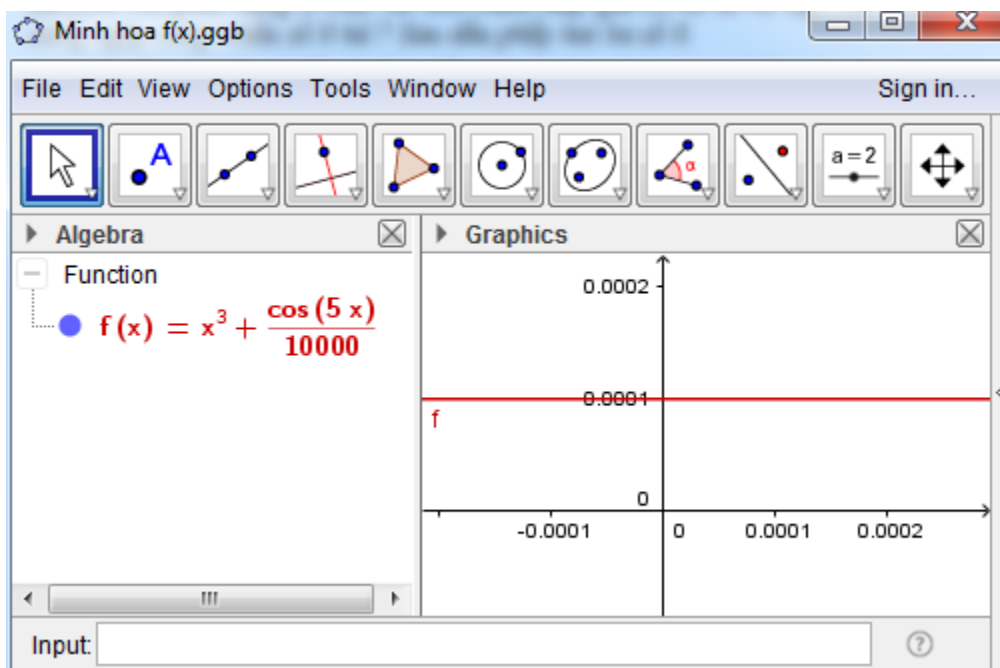
HS_N1: Dùng cái phần mềm máy tính nó cũng ra, nhóm tui tính rồi gần bằng 0”.

GV đề nghị các nhóm thử phóng to đồ thị đã vẽ trên phần mềm Geogebra:

Đây là đoạn trao đổi của HS nhóm 1:

“HS1: Sao hồi nãy tính thêm nó ra gần bằng 0?

HS2: Nhìn kĩ đi nó gần bằng 0,0001 chứ, tại tụi mình cứ cho rằng từ hai số 0 đứng sau dấu phẩy là bằng 0”.



HS nhận ra hạn chế của quan điểm *xấp xỉ* x và xây dựng được một quy tắc tranh luận toán học:

GV: Vậy tại sao ban đầu thầy thấy rất nhiều bạn đồng ý với Nam nhỉ?

HS: Tại vì cái bảng và cái hình lừa mình quá thầy!

GV: Tức là bảng số và đồ thị không đáng tin để đưa ra dự đoán về giới hạn sao?

HS: Cũng không hẳn... tụi em vẫn thường cho x gần 0 để tính giới hạn khi x tiến tới 0... chỉ là trong trường hợp này cái lim nó “gần 0” thôi chứ chưa phải là “0”.

GV: Như vậy, có thể phát biểu ý tưởng em vừa nói thế nào?

HS: Khi x tiến gần về 0 mà $f(x)$ cũng gần 0 chưa đủ kết luận giới hạn bằng 0!

GV: Ủ! Thế ban đầu thầy thấy gần như cả lớp đồng ý với Nam phải không? Như vậy đa số có thiếu thiếu số không?

HS: Không rồi!

GV: À. Vậy trong toán học, ta không thể quyết định một phát biểu là đúng dựa vào sự kiện mà đa số cho rằng nó đúng nhé!”

Quan sát đồ thị phóng to cho phép HS chuyển từ việc xem xét x gần 0 sang việc xem xét $f(x)$ gần 0,0001. Tuy nhiên cơ hội để tiếp tục thực hiện bước chuyển sang quan điểm *xấp xỉ* $f(x)$ của khái niệm giới hạn đã bị bỏ qua. Chẳng hạn, ta có thể đặt vấn đề: “*làm sao chắc chắn giới hạn là 0,0001 khi x tiến về 0?*”. Như vậy, để cải thiện đồ án dạy học này, nhà nghiên cứu cần phải dự kiến thêm trong phân tích tiên nghiệm những câu hỏi tiếp theo để giúp GV đưa ra các quyết định sư phạm hợp lý hơn.

5. Kết luận

Nghiên cứu các chương ngại tri thức luận nhằm tổ chức phát triển bản chất của tri thức là một nhiệm vụ rất đặc trưng của trường phái Didactic Toán. Hình thức tranh luận khoa học có thể đóng góp hiệu quả cho định hướng dạy học phát triển năng lực

người học của nước ta, đặc biệt là các năng lực cần thiết cho cuộc sống cộng đồng như hợp tác, giao tiếp và phản biện.

Nghiên cứu của chúng tôi cho thấy việc tổ chức tranh luận khoa học xoay quanh các chương ngại tri thức luận rất phù hợp để đáp ứng hai yêu cầu trên (một yêu cầu của hệ thống giáo dục và một yêu cầu của chuyên ngành). Bởi vì ta có thể dự kiến sự xuất hiện các câu trả lời khác nhau, đặc biệt là các trả lời sai. Điều này cho phép đặt người học vào một tình huống gợi vấn đề có tính xung đột nhận thức. Một tình huống như vậy sẽ rất thu hút HS, làm cho việc ủy thác tình huống (nghĩa là, khiến vấn đề trong tình huống trở thành vấn đề của chính HS) diễn ra hết sức tự nhiên. Nhờ đó, HS có cơ hội vừa phát triển các năng lực vừa chiếm lĩnh tri thức toán học một cách sâu sắc bằng cách tự xây dựng các chân lí toán học với nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Arsac G., Chapiron G., Colonna A., Germain G., Guichard Y., Mante M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège: une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Presses Universitaires Lyon.
2. Brousseau G. (1989). *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*, in *Construction des savoirs, obstacles, conflits*. Édition : Agence d'Arc inc., Montréal.
3. Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse, Université Scientifique Et Médicale De Grenoble.
4. Legrand M. (1993). *Débat scientifique en cours de mathématiques*, *Repères IREM*, n°10. Topiques Editions.
5. Legrand M. (2000). *Scientific debate in mathematics course. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. La lettre de la Preuve, ?
6. Le Thai Bao T. T. (2010). *Notion de limite et décimalisation des nombre réels au lycée*. Édition Universitaire Européenne.
7. Lê Thái Bảo Thiên Trung (2016). *Dạy học toán bằng tranh luận khoa học*. Tạp chí Khoa học, tập 14, số 1. Đại học Sư phạm TP HCM
8. Stewart J. (2012). *Calculus: Early Transcendentals, 7th edition*. Brooks/Cole Cengage Learning.

XEM XÉT SỰ CHUYỂN HÓA SỰ PHẠM KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN Ở GIẢI TÍCH LỚP 12 TRONG SỰ GẮN KẾT VỚI DẠY HỌC VẬT LÝ

Ngô Minh Đức*

Tóm tắt

Phần đầu bài báo trình bày các nghĩa, các quan niệm về tích phân xuất hiện trong lịch sử và những lựa chọn có thể thực hiện để đưa khái niệm này vào dạy học. Phần tiếp theo phân tích sự chuyển hóa sự phạm của tích phân trong sách giáo khoa toán và những ứng dụng của khái niệm này xuất hiện trong sách giáo khoa vật lý. Kết quả cho thấy sự chuyển hóa sự phạm đã ảnh hưởng như thế nào đến sự nối khớp trong dạy học toán – vật lý ở trường phổ thông hiện nay với trường hợp của khái niệm tích phân.

Từ khóa: Chuyển hóa sự phạm, dạy học toán và vật lý, tích phân.

Abstract

The first part of the report presents the significances, notions of integral throughout history and the decisions that can be executed in order to put this concept into education. The next part analyzes the didactic transposition of integral in mathematics textbook and the applications of this concept in physics textbook. The conclusion suggests in what way has the didactic transposition affected the connection between teaching mathematics and physics in highschool concerning integral concept.

Keywords: Didactic transposition, teaching mathematics and physics, integral.

1. Mở đầu

Chuyển hóa là sự biến đổi từ dạng này sang dạng khác. Quá trình đưa một tri thức toán học từ lúc được phát minh trong lịch sử trở thành tri thức giảng dạy trong nhà trường đã phải trải qua những biến đổi mà Didactic Toán gọi đó là chuyển hóa sự phạm (didactic transposition). Để thấy được sự chuyển hóa này, một phân tích tri thức luận sẽ chỉ ra các đặc trưng của tri thức ở thể chế tạo ra nó. Tiếp theo đó, một phân tích thể chế sẽ cho thấy cuộc sống của tri thức ấy trong những thể chế dạy học nhất định.

Báo cáo của chúng tôi trình bày về sự chuyển hóa sự phạm của khái niệm tích phân khi nó được đưa vào giảng dạy trong nhà trường phổ thông. Phần đầu bài báo trình bày những vấn đề làm nảy sinh khái niệm cùng các nghĩa của nó như là một phần kết quả rút ra từ nghiên cứu tri thức luận. Vì gắn với nhiều đặc trưng nên khái niệm tích phân có những cách khác nhau để tiếp cận cũng như để định nghĩa. Việc phân tích sự lựa chọn của sách giáo khoa (SGK) toán khi đưa vào giảng dạy khái niệm này sẽ chỉ ra một mặt xích của sự chuyển hóa sự phạm và những ràng buộc phải tuân theo khi khái niệm tích phân đóng vai trò của một tri thức cần dạy.

Phân tích tri thức luận cũng cho thấy được mối liên hệ mật thiết của tích phân và các động lực đến từ vật lý. Để biết mối quan hệ này có được thể hiện trong chương trình giáo dục phổ thông hay không, chúng tôi cho rằng cần phải vượt ra khỏi thể chế dạy học toán để đi vào tìm hiểu sự xuất hiện của tích phân trong thể chế vật lý với vai trò một công cụ. Tất cả các kết quả đạt được giúp chúng tôi nhận ra những ảnh hưởng mà quá trình chuyển hóa sự phạm nói trên tác động lên sự nối khớp với vật lý trong dạy

* NCS, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

học toán nói chung ở trường phổ thông hiện nay, nói riêng với trường hợp dạy học khái niệm tích phân.

2. Nghĩa của khái niệm tích phân

Một khái niệm có thể có nhiều nghĩa, gắn với những đặc trưng khác nhau và với các tình huống khác nhau mà khái niệm đó hiện diện như là một công cụ giải quyết. Theo tiến trình lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm, các nghĩa này sẽ dần xuất hiện.

2.1. Bài toán cầu phương và ý nghĩa hình học

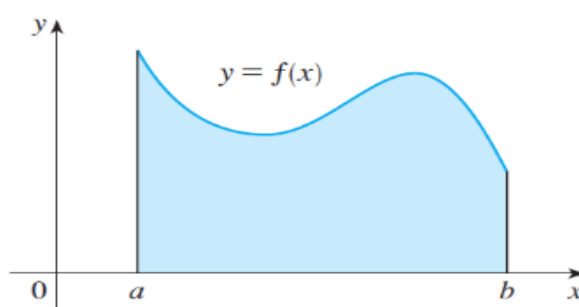
Bài toán cầu phương (tìm diện tích) các hình, đặc biệt là các hình có yếu tố cong chính là nguồn động lực chủ yếu hình thành nên những ý tưởng tiềm ẩn của khái niệm tích phân. Trong suốt hơn 2000 năm các nhà toán học đã phát minh ra nhiều phương pháp để giải quyết nó, tiêu biểu có thể kể đến là: Phương pháp dựa vào thuyết nguyên tử của Democritus, phương pháp vét cạn của Eudoxus và Archimedes, phương pháp các bất khả phân của Cavalieri, và những phát triển sau đó của Pascal và Fermat. Hai ý tưởng cơ bản của các phương pháp này là xấp xỉ hình đã cho bằng một dãy các hình có diện tích ngày càng gần với diện tích cần tính hoặc chia hình đã cho thành rất nhiều những diện tích nguyên tố (các bất khả phân) và tìm cách tính tổng của chúng.

Các phương pháp nói trên hình thành nên tư tưởng nền tảng cho khái niệm tích phân. Lúc này khái niệm chỉ hiện diện ngầm ẩn như là công cụ để giải quyết bài toán tính diện tích. Về sau Cauchy và Riemann định nghĩa tích phân một cách tường minh như là “*diện tích hình phẳng dưới đường cong*” và theo đó chúng ta có thể phát biểu ý nghĩa hình học của tích phân theo ngôn ngữ ngày nay như sau:

Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục không âm trên $[a; b]$ và đặt

$$S = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 < y < f(x)\}.$$

Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ bằng diện tích của S . Người ta cũng hay dùng cụm từ *diện tích hình phẳng dưới đường cong* để mô tả cho diện tích hình S nói trên.



2.2. Tích phân và mối quan hệ đảo ngược với đạo hàm

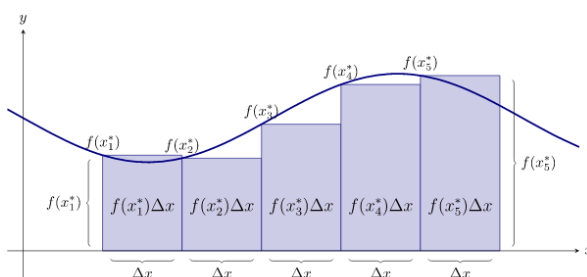
Trong lịch sử thì tích phân là khái niệm ra đời trước (có mầm mống từ thời cổ đại), còn đạo hàm thì mãi đến thế kỉ thứ 17 mới xuất hiện trong nỗ lực của các nhà toán học nhằm giải quyết bài toán xác định tiếp tuyến đường cong và tốc độ biến thiên của các đại lượng. Barrow là người đầu tiên đã nhận ra mối quan hệ đảo ngược giữa phương pháp giải hai loại bài toán: tìm tiếp tuyến và tính diện tích. Newton và Leibniz sau đó đã dựa trên mối quan hệ này để xây dựng Giải tích thành một hệ thống hoàn chỉnh với hai khái niệm cơ bản đạo hàm – tích phân và mối quan hệ ngược nhau giữa chúng. Mối quan hệ này ngày nay được gọi là định lý cơ bản của Giải tích và một thể

hiện của chúng là công thức Newton – Leibniz: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$.

Đặc trưng này đem lại cho tích phân một nghĩa mới: *phép toán ngược của đạo hàm* cùng với đó là một cách thức thuận tiện hơn để tính toán bằng cách đảo ngược quá trình lấy đạo hàm của một hàm số.

2.3. Tổng tích phân và nghĩa tổng quát của khái niệm

Quá trình tính diện tích một hình thang cong có thể bắt đầu từ việc chia nhỏ, sau đó xấp xỉ các hình thang cong nhỏ bằng các hình chữ nhật tương ứng. Cuối cùng là lập tổng diện tích các hình chữ nhật đó: $\sum f(x)\Delta x$. Tổng này còn được gọi là tổng tích phân (hay tổng Riemann) và nó cho phép ta tính gần đúng diện tích hình ban đầu.



Việc hoàn thiện cơ sở lý thuyết giới hạn vào thế kỉ 18 mà công đầu là Cauchy đã đưa đến cho tích phân một định nghĩa chặt chẽ, cụ thể tích phân chính là giới hạn của tổng Riemann nói trên:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum f(x_i^*)\Delta x_i$$

Quá trình chia nhỏ (hay tổng quát hơn là phân hoạch), lập tổng và chuyển qua giới hạn có thể xem là tư tưởng nền tảng của khái niệm tích phân. Tư tưởng này cho phép vận dụng tích phân vào việc giải quyết rất nhiều các vấn đề khác nhau không những trong nội bộ toán mà còn trong các lĩnh vực khoa học khác và trong thực tế. Chúng tôi sẽ gọi tư tưởng nền tảng này của khái niệm tích phân là *nghĩa tổng quát* (nghĩa nền tảng) của nó.

2.4. Nghĩa vật lý của khái niệm tích phân

Sự tiến triển của khái niệm tích phân trong lịch sử có một mối quan hệ mật thiết với những động lực đến từ vật lý. Chính nhu cầu giải quyết những vấn đề khác nhau trong vật lý đã thúc đẩy các nhà khoa học vượt ra khỏi bài toán tính diện tích ban đầu để vận dụng tư tưởng tích phân vào nhiều tình huống khác. Có thể kể đến những trường hợp tiêu biểu như: Oresme (Thế kỉ 14) và Galileo (1638) khi tính quãng đường đi trong chuyển động thẳng biến đổi đều. Stevin (1585) sử dụng tư tưởng cơ bản của tích phân trong bài toán xác định trọng tâm vật rắn. Euler (1760) sử dụng tích phân để tính toán các đại lượng vật lý như tâm quán tính, moment quán tính, ... Coriolis (1835) đưa ra khái niệm công và định nghĩa công của lực trong trường hợp tổng quát (quãng đường không thẳng và lực biến đổi) như là một tích phân.

Việc ứng dụng nghĩa tổng quát của tích phân vào các vấn đề vật lý khác nhau đem đến cho khái niệm này những nghĩa mới rất phong phú trong các tình huống tương ứng mà chúng tôi gọi chúng là các *nghĩa vật lý*. Chẳng hạn như độ dời¹ của chất điểm

¹ Nếu vận tốc trong chuyển động thẳng là luôn dương thì độ dời này sẽ bằng với quãng đường đi được.

chuyển động thẳng: $s(t) = \int_{t_0}^t v(t)dt$, moment quán tính: $I = \int r^2 dm$, công của lực biến đổi: $A = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds, \dots$

3. Các cách tiếp cận khái niệm tích phân và sự lựa chọn của SGK toán

3.1. Những cách định nghĩa tích phân trong lịch sử

Từ khi xuất hiện tường minh với vai trò của một khái niệm toán học, tích phân đã có một số cách định nghĩa khác nhau. Dưới đây là ba trong số chúng²:

Định nghĩa của Newton: Newton định nghĩa tích phân theo mối quan hệ đảo ngược với đạo hàm. Cụ thể hơn, ông đặt ra bài toán tìm đại lượng y như là một hàm số của x khi biết tốc độ biến thiên (đạo hàm) của y theo x . Việc xác định y từ phương trình $\frac{y}{x} = \varphi(x)$ chính là bài toán mà hiện nay chúng ta gọi là *bài toán lấy tích phân*³ (được giải bằng phép lấy nguyên hàm).

Định nghĩa của Leibniz: Trong khi Newton sử dụng tốc độ biến thiên để xác định các tích phân bất định, diện tích, và thể tích thì Leibniz dùng tổng các vô cùng bé (các vi phân) để thực hiện chúng. Ông gọi “tích phân” như là tổng vô hạn các vô cùng bé – nói riêng trong bài toán tính diện tích chính là tổng các hình chữ nhật vô cùng bé dựng trên các khoảng vô cùng bé của trục hoành. Leibniz sau đó cũng đưa ra kí hiệu $\int$ để chỉ các tổng vô hạn này.

Định nghĩa của Cauchy và Riemann: Hai ông sử dụng khái niệm “diện tích dưới đường cong” để định nghĩa tích phân. Cụ thể, nếu cho $f(x)$ là một hàm không âm trên $[a; b]$, đặt $S = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 < y < f(x)\}$. Tích phân được định nghĩa chính là diện tích của hình S này. Giới hạn của tổng Riemann sau đó sẽ được dùng để tính S và thông qua đó để xác định tích phân.

3.2. Các định nghĩa có thể sử dụng để giảng dạy tích phân

Như vậy, bởi vì gắn với những đặc trưng khác nhau nên có nhiều cách để định nghĩa tích phân. Chúng tôi nhận thấy có ba cách mà SGK có thể lựa chọn để định nghĩa khái niệm này:

Định nghĩa tích phân theo nguyên hàm

Khai thác mối quan hệ đảo ngược giữa tích phân với đạo hàm, có thể định nghĩa tích phân theo khái niệm nguyên hàm thông qua công thức Newton – Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ với } F(x) \text{ là một nguyên hàm nào đó của } f(x).$$

Theo cách này, định lí cơ bản của giải tích trở thành một định nghĩa và nhờ vậy nghĩa *phép toán ngược của đạo hàm* được thể hiện một cách rõ ràng. Định nghĩa theo cách này cũng mang đến một phương thức thuận tiện để tính toán tích phân khi ta chỉ cần đảo ngược quy trình lấy đạo hàm thay vì phải tính các giới hạn phức tạp. Muốn

² Định nghĩa tích phân theo độ đo của Lebesgue chúng tôi không đề cập bởi nó vượt quá những nội dung có thể đưa vào giáo dục toán phổ thông.

³ Newton dùng kí hiệu $\dot{y}$ để biểu thị cho việc lấy đạo hàm.

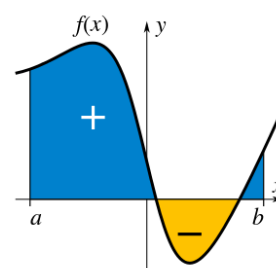
vậy, khái niệm đạo hàm phải được giảng dạy trước và nguyên hàm sẽ là bước trung gian để định nghĩa và tính toán các tích phân xác định⁴. Trong trường hợp này, học sinh (HS) có thể sẽ quan niệm tích phân như một kiểu nguyên hàm có cận và là một khái niệm đảo ngược với đạo hàm (giống như mối quan hệ giữa phép cộng và phép trừ, hay giữa hàm số mũ và hàm số logarit).

Ở một khía cạnh khác, việc định nghĩa tích phân theo công thức Newton – Leibniz sẽ đi ngược lại với tiến trình hình thành tự nhiên trong lịch sử và có thể làm mất đi bản chất của khái niệm. Hệ quả của sự lựa chọn sự phạm này là tư tưởng nền tảng chia nhỏ, lập tổng và chuyển qua giới hạn (*nghĩa tổng quát*) của khái niệm tích phân rất khó xuất hiện. Điều này sẽ làm cho việc ứng dụng tích phân vào vật lý gặp khó khăn bởi vì các *nghĩa vật lí* sẽ khó mà hình thành nếu không có *nghĩa tổng quát* làm cơ sở.

Định nghĩa tích phân theo diện tích

Theo cách này, tích phân được định nghĩa là diện tích của hình phẳng giới hạn dưới đường cong với quy ước về dấu (dấu âm nếu diện tích nằm dưới trục hoành).

Định nghĩa này mang đến cho học sinh một cách hiểu rất “trực quan” về tích phân: tích phân chỉ đơn giản là diện tích của hình tạo bởi đồ thị hàm số và trục hoành với giới hạn hai đầu là khoảng lấy tích phân. Theo đó *nghĩa hình học* của khái



niệm tích phân sẽ dễ dàng hiện diện và một số quy tắc hay định lí (chẳng hạn $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$) sẽ có được sự giải thích hình học dễ hình dung. Việc tính toán diện tích (hay tích phân) này sau đó có thể được thực hiện bằng cách đảo ngược phép tính đạo hàm đối với hàm số $f(x)$ hoặc tính giới hạn tổng Riemann hoặc tính trực tiếp nếu hình cần tính diện tích là hình đơn giản (tam giác, hình thang, hình tròn,...).

Định nghĩa tích phân bằng giới hạn tổng Riemann

Định nghĩa này có thể xem là “chính thống” trong nhiều giáo trình giảng dạy tích phân ở đại học. Bước đầu tiên là thiết lập tổng Riemann (có thể thông qua bài toán tính diện tích) và sau đó tích phân được định nghĩa như là giới hạn của tổng này:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Định nghĩa theo cách trên làm tách biệt khái niệm tích phân ra khỏi đạo hàm và vì thế, mối quan hệ đảo ngược giữa tích phân và đạo hàm trở thành một định lý (định lý cơ bản của giải tích). Việc trình bày định nghĩa tích phân theo giới hạn tổng Riemann có thể phức tạp hơn cách định nghĩa bằng nguyên hàm nhưng ở một điểm nhìn khác, nó đem lại cơ hội cho *nghĩa tổng quát* được xuất hiện. Thật vậy, định nghĩa theo kiểu này phải trải qua ba quá trình: phân hoạch, lập tổng, và cuối cùng là chuyển qua giới hạn, mà đây lại chính là tư tưởng cơ bản của tích phân cho phép ứng dụng nó vào các vấn đề khác trong vật lí.

⁴ Việc tính tích phân theo nguyên hàm không phải lúc nào cũng làm được bởi vì có nhiều hàm số không có nguyên hàm sơ cấp chẳng hạn: $y = \frac{\sin x}{x}$; $y = e^{-x^2}$.

3.3. Sự lựa chọn của SGK toán

Những phân tích trên cho thấy cách định nghĩa tích phân theo nguyên hàm đem đến một cách thức thuận tiện trong việc trình bày khái niệm và trong các thao tác tính toán. HS chỉ cần hiểu tích phân như một phép toán đảo ngược của đạo hàm và có thể tiến hành tính tích phân bằng một quá trình ngược lại với phép lấy đạo hàm. Trong lúc đó, định nghĩa theo cách thứ hai và thứ ba (theo diện tích hoặc theo giới hạn tổng Riemann) lại phù hợp cho những ứng dụng của tích phân trong hình học và các lĩnh vực khoa học khác (đặc biệt là vật lý). Đây cũng là lúc thể chế dạy học toán phải thực hiện sự chọn lựa của mình: Dạy học tích phân để ứng dụng trong nhiều vấn đề của khoa học và thực tiễn hay dạy tích phân để thuận lợi cho việc trình bày khái niệm và cho các thao tác tính toán? Chúng ta sẽ phân tích sự lựa chọn này của SGK toán 12 ban nâng cao (NC).

Tiến trình dạy học các khái niệm cơ bản của giải tích lần lượt là: giới hạn, đạo hàm, nguyên hàm và cuối cùng là tích phân. SGK toán 12 ban NC đã sử dụng cách định nghĩa thứ nhất: định nghĩa tích phân theo nguyên hàm và bài toán gợi ra lý do xuất hiện cho nguyên hàm là một bài toán vật lý:

Bài toán mở đầu: Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm t là $v(t)=160-9,8t$ (m/s) (coi $t=0$ là thời điểm đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm t (SGK 12 NC, tr 136).

Vì vận tốc là đạo hàm của hàm số quãng đường nên bài toán trên dẫn tới nhiệm vụ tìm một hàm số khi biết trước đạo hàm của nó. Tình huống vật lý này (tìm quãng đường khi biết vận tốc) đem đến cho nguyên hàm ý nghĩa công cụ và đó cũng là lý do để nó xuất hiện.

Tương tự như vậy, trước khi định nghĩa khái niệm tích phân, SGK cũng đưa ra hai bài toán dẫn đến sự ra đời khái niệm là bài toán tính diện tích hình thang cong và tìm quãng đường đi của một vật trong một khoảng thời gian xác định. Việc giải quyết hai bài toán này đi đến nhu cầu phải tính toán hiệu $F(b) - F(a)$ trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho. Và thế là tích phân được định nghĩa theo hiệu nói trên:

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của f từ a đến b và kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$ (SGK 12 NC, tr 148).

Việc chọn lựa định nghĩa này “*làm khái niệm tích phân trở nên ngắn gọn và dễ hiểu hơn so với định nghĩa bằng giới hạn của tổng tích phân*” (Trần Lương Công Khanh, 2002, tr.68). Tuy nhiên điều chúng tôi quan tâm là HS sẽ hiểu gì về khái niệm. Nếu chỉ quan niệm đơn giản tích phân là hiệu $F(b) - F(a)$ hay như một kiểu “nguyên hàm có cận” thì làm thế nào để hiểu được các ứng dụng đa dạng của tích phân trong vật lý. Để thấy rõ hơn về điểm này, chúng tôi khảo sát các bài toán có ngữ cảnh vật lý sử dụng công cụ tích phân xuất hiện trong SGK NC 12. Có tất cả 1 ví dụ và 4 bài tập, tuy nhiên cả 5 bài toán này đều chỉ tập trung vào một kiểu nhiệm vụ duy nhất là tính quãng đường khi cho trước hàm số vận tốc. Kỹ thuật chung để giải quyết kiểu nhiệm vụ này là dựa vào công thức: $S = \int_a^b v(t)dt$ (công thức được dẫn ra trong hoạt động 3 trang 150).

Về nguyên tắc, bất cứ một đại lượng vật lý nào được tính theo đạo hàm của đại lượng khác thì luôn có thể đặt bài toán ngược lại trong đó cần sử dụng phép toán tích phân. Việc định nghĩa tích phân theo nguyên hàm khiến cho nó chỉ được ứng dụng trong vật lý ở những bài toán ngược theo kiểu như vậy. Cách tiếp cận khái niệm tích phân của SGK thông qua các bài toán vật lý mở đầu, hay sự xuất hiện của những kiểu nhiệm vụ gắn với vật lý cho thấy sự quan tâm đến việc ứng dụng tích phân vào lĩnh vực này. Tuy nhiên, những ràng buộc đến từ sự lựa chọn sự phạm làm cho việc ứng dụng tích phân vào vật lý chỉ dừng lại ở bài toán tính quãng đường (một kiểu bài toán tìm đại lượng khi biết trước đạo hàm của nó).

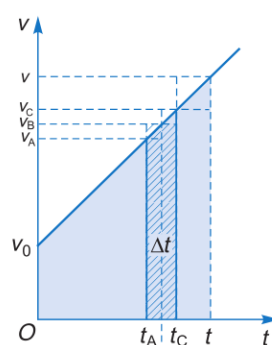
4. Ứng dụng của tích phân trong SGK vật lý

Tích phân có thể được ứng dụng trong chương trình vật lý phổ thông theo hai hướng chính: Hướng thứ nhất là vận dụng *nghĩa phép toán ngược của đạo hàm* trong bài toán tìm đại lượng khi cho trước tốc độ biến thiên của nó. Hướng thứ hai là sử dụng *nghĩa tổng quát* trong các bài toán phải trải qua quá trình chia nhỏ, lập tổng và chuyển qua giới hạn. Trong khi hướng ứng dụng đầu tiên bị những ràng buộc thể chế (đạo hàm chỉ được đưa vào dạy ở cuối năm lớp 11) ngăn cản thì việc ứng dụng *nghĩa tổng quát* của khái niệm tích phân được SGK vật lý lớp 10 và 11 thực hiện xuyên suốt trong nhiều tình huống khác nhau. Dưới đây chúng tôi sẽ phân tích 3 trong số các tình huống như vậy:

Bài toán xác định độ dời trong chuyển động thẳng biến đổi đều (SGK Vật lý 10 NC, tr. 26 – 27)

Như đã biết, chúng ta có thể tính được quãng đường bằng cách lấy tích vận tốc và thời gian nếu vận tốc là không đổi. Thế nhưng, trong chuyển động thẳng biến đổi đều với gia tốc a , vận tốc lại là một hàm số biến thiên theo thời gian: $v = v_0 + at$ nên việc xác định quãng đường trở nên khó khăn với HS. Để giải quyết bài toán này, đầu tiên SGK Vật lý đã chia khoảng thời gian t thành những khoảng Δt rất nhỏ.

Chuyển động trong khoảng thời gian $t_C - t_A = \Delta t$ có thể coi như chuyển động đều với vận tốc v_B bằng trung bình cộng của v_C và v_A , tức là bằng $\frac{v_C + v_A}{2}$. Độ dời Δx trong khoảng thời gian đó $\Delta x = \frac{v_C + v_A}{2} \Delta t$, bằng diện tích hình thang nhỏ gạch chéo trên Hình 5.3. Độ dời trong khoảng thời gian t_0 đến t bằng tổng tất cả các độ dời Δx ...đúng bằng diện tích hình thang vuông có các cạnh đáy t ; t_0 và chiều cao t : $x - x_0 = \frac{v + v_0}{2} t$ (SGK vật lý NC, tr. 26).



Hình 5.3 Đồ thị vận tốc theo thời gian và cách tính độ dời

Cách làm của SGK là xem chuyển động trên khoảng Δt rất nhỏ là thẳng đều với vận tốc là trung bình cộng v_C và v_A (điều này không được giải thích). Độ dời trong khoảng thời gian này tính bằng vận tốc nhân thời gian và được biểu diễn bằng diện tích hình chữ nhật tương ứng. Diện tích này về mặt hình học sẽ bằng diện tích hình thang nhỏ gạch chéo. Lập tổng các độ dời – tương ứng là tổng tất cả các diện tích nguyên tố

để được diện tích hình thang vuông lớn. Độ dời lúc này sẽ được tính theo diện tích hình dưới đồ thị hàm vận tốc.

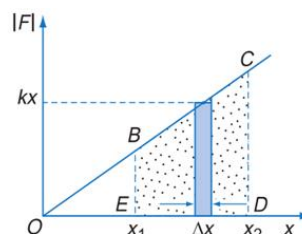
Có một điểm đáng lưu ý trong cách giải này đó là SGK đã thừa nhận một cách mập mờ rằng chuyển động trong khoảng thời gian Δt rất nhỏ là thẳng đều mà không xem xét nó như một quá trình xấp xỉ. Việc thừa nhận này đã tránh đi bước chuyển qua giới hạn trong việc chứng minh độ dời tổng cộng là diện tích hình phẳng dưới đồ thị.

Thật ra, bài toán tìm độ dời có thể được giải quyết bằng phép toán nguyên hàm nếu biết trước hàm số vận tốc và vì thế có thể được giải quyết một cách đơn giản khi HS được học khái niệm tích phân trong chương trình toán lớp 12. Tuy nhiên, ở một số tình huống khác trong vật lí chúng ta buộc phải đi qua con đường lập tổng tích phân và bài toán tìm công của lực biến đổi là một trường hợp như vậy.

Bài toán tính công của lực đàn hồi (SGK Vật lí 10 NC, tr. 169 – 170)

Khi lực tác động F là không đổi và cùng chiều với quãng đường dịch chuyển s thì công được tính bằng công thức quen thuộc: $A = F \cdot s$. Tuy nhiên trong bài toán này, lực đàn hồi $F = -kx$ lại biến đổi theo độ biến dạng x nên để tính công SGK đã tiến hành như sau: “chia nhỏ độ biến dạng toàn phần thành những đoạn biến dạng vô cùng nhỏ sao cho tương ứng với độ biến dạng này lực đàn hồi được coi là không đổi” Mỗi công trong những độ biến dạng “vô cùng nhỏ” này được gọi là công nguyên tố và được tính bởi: $\Delta A = F\Delta x = -kx\Delta x$. Tương tự như tình huống trước, SGK tiếp tục sử dụng phương pháp đồ thị để tính công này:

Trên Hình 36.2, công nguyên tố được biểu diễn bằng diện tích dải chữ nhật màu xanh có hai cạnh là kx và Δx . Cộng tất cả các diện tích nguyên tố trong phạm vi giới hạn trên trục x từ giá trị x_1 đến giá trị x_2 ta được công toàn phần...có giá trị bằng diện tích hình thang BCDE, cũng bằng hiệu diện tích hai tam giác OCD và OBE...



Hình 36.2 Đồ thị để tính công của lực đàn hồi

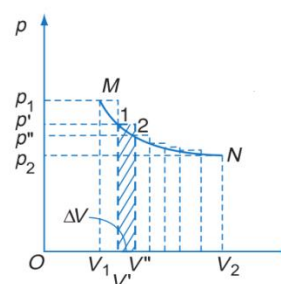
Việc chia thành các khoảng “vô cùng nhỏ” (SGK dùng từ *vô cùng nhỏ* thay cho từ *rất nhỏ* trong cách giải bài toán tìm độ dời) như là một cách ngấm ẩn cho quá trình chuyển qua giới hạn sau các bước chia nhỏ và lập tổng. Ngoài ra, giống như bài toán trên, đồ thị hàm lấy tích phân vẫn là đường thẳng nên có thể chứng minh bằng hình học rằng, quá trình tính tổng diện tích các hình chữ nhật nguyên tố sẽ thu được kết quả là diện tích hình thang BCDE. Như vậy vì nhiều lí do, việc xem xét theo hướng xấp xỉ khi lập tổng trước khi chuyển qua giới hạn vẫn bị các tác giả SGK tránh đi.

Bài toán tính công của khí lí tưởng (SGK Vật lí 10 NC, tr. 294 – 295)

Trên hệ tọa độ $p - V$, đồ thị của áp suất p theo thể tích V được biểu diễn bởi đường cong MN trên hình 59.2. Để tìm công của khí lí tưởng trong trường hợp này, SGK tiếp tục bắt đầu bằng quá trình chia nhỏ:

Chia đoạn thể tích từ V_1 đến V_2 thành các đoạn ΔV rất nhỏ. Lúc này đoạn chéo 12 gần như trùng với đoạn cong 12 của đường cong MN...

Công ΔA được biểu thị bằng diện tích hình thang nằm bên dưới đoạn đường biểu diễn 12 (Hình 59.2) Diện tích hình thang này gần đúng bằng diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong MN, trục hoành và hai đường song song với trục tung ứng với các giá trị V' và V'' . Nếu ΔV càng bé thì hai diện tích của hai hình thang nói trên càng gần bằng nhau hơn.



Hình 59.2 Biểu thị công trên hệ tọa độ $p-V$

Ở cả ba bài toán, SGK luôn thay thế diện tích hình chữ nhật nguyên tố bằng diện tích hình thang nguyên tố tương ứng. Chỉ riêng trong bài toán này vì đồ thị là đường cong nên SGK buộc phải đưa vào sự gần đúng giữa diện tích hình thang và diện tích hình thang cong nguyên tố tương ứng. Một nhận xét được gắn kèm vào đó là quá trình thay thế này sẽ càng gần đúng nếu như ΔV càng bé, và đây cũng là lập luận ngầm ẩn thay thế cho bước chuyển qua giới hạn. Công toàn phần A sau đó sẽ được biểu thị bởi diện tích hình thang cong MNV_2V_1 vì nó là tổng của các diện tích hình thang nguyên tố nói trên. Đáng lưu ý là ở cuối trình bày của chứng minh này, SGK vật lí 10 còn đưa vào nhận xét: “*Suy luận trên được chứng minh chính xác bằng toán học, song phải dùng đến một số kiến thức thuộc chương trình lớp 12*” Điều này cho thấy những mong đợi của SGK vật lí dành cho SGK toán lớp 12 (thời điểm tích phân được đưa vào) trong việc làm sáng tỏ cơ sở toán học (*nghĩa tổng quát*) cho các ứng dụng của tích phân vào vật lí. Tuy nhiên, với sự chuyển hóa sự phạm của khái niệm tích phân trong SGK toán 12 NC thì điều này khó mà thực hiện được.

5. Kết luận

Phân tích tri thức luận đối với khái niệm tích phân đã chỉ ra các đặc trưng khác nhau thể hiện qua các nghĩa mà nó thể hiện trong tiến trình lịch sử. Cũng trong tiến trình lịch sử này vật lí đóng vai trò vô cùng quan trọng khi vừa là bối cảnh, vừa là động lực để tích phân hình thành và phát triển. Theo chiều ngược lại, việc ứng dụng tư tưởng của tích phân (*nghĩa tổng quát*) đem đến một công cụ hiệu quả để giải quyết nhiều vấn đề trong vật lí (*nghĩa vật lí*). Điều này cho thấy sự cần thiết phải hình thành được *nghĩa tổng quát* của tích phân nếu muốn cho HS hiểu rõ các ứng dụng của khái niệm này trong các vấn đề của vật lí phổ thông.

Các đặc trưng tri thức luận của tích phân còn giúp đem đến nhiều cách khác nhau để định nghĩa khái niệm này. Định nghĩa tích phân theo nguyên hàm mặc dù giúp làm rõ mối quan hệ đảo ngược của nó với đạo hàm và đem đến một cách thức đơn giản để trình bày khái niệm. Tuy nhiên *nghĩa tổng quát* của tích phân thể hiện qua quá trình chia nhỏ, lập tổng và chuyển qua giới hạn lại khó có cơ hội xuất hiện. Định nghĩa theo diện tích tuy rằng cho thấy khía cạnh trực quan của tích phân nhưng lại không thích hợp với tư tưởng “đại số hóa” trong việc thiết kế SGK nhiều năm trở lại đây. Cuối cùng, định nghĩa tích phân bằng giới hạn tổng Riemann vốn là phù hợp nhất với việc hình thành *nghĩa tổng quát*, tuy nhiên cái giá phải trả lại là sự phức tạp tăng lên trong việc trình bày định nghĩa cũng như khó khăn trong việc giải thích mối quan hệ đảo ngược của tích phân với đạo hàm.

Phân tích của chúng tôi trong bài báo này không nhằm mục đích trả lời câu hỏi nên chọn cách định nghĩa nào. Thay vào đó, chúng tôi muốn tìm hiểu xem với mỗi sự lựa chọn sự phạm của SGK, nghĩa nào của tích phân có thể vắng mặt và sự vắng mặt ấy tạo ra những ảnh hưởng gì. Theo đó, sự lựa chọn định nghĩa tích phân theo nguyên hàm của SGK Toán có thể khiến cho *nghĩa tổng quát* không có cơ hội xuất hiện. Trong khi đó, tư tưởng nền tảng này của tích phân lại được vận dụng thường xuyên trong các bài toán của SGK Vật lí (dù cho bước chuyển qua giới hạn được tiến hành ngầm ẩn). Sự chuyển hóa sự phạm của khái niệm tích phân trong SGK Toán đã làm vắng mặt đi tư tưởng nền tảng của nó, vốn là tiền đề cho các ứng dụng quan trọng của tích phân trong thực tiễn cũng như trong các lĩnh vực khác. Ràng buộc này làm cho những mong đợi của SGK Vật lí muốn làm rõ cơ sở toán học cho các lập luận của mình đã không được đáp ứng. Trong khi ấy, SGK toán 12 lại bỏ qua cơ hội được “quay trở lại” với các ứng dụng của tích phân trong vật lí lớp 10 và 11, hay thậm chí đã bỏ qua những tình huống thuận lợi có thể đem lại nghĩa đầy đủ cho khái niệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications, Inc.
2. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (chủ biên) (2011). *Giải tích 12 (Nâng cao)*. Nxb Giáo dục Việt Nam.
3. Klisinskā, A. (2009). *The fundamental theorem of calculus: A case study into the didactic transposition of proof*. Doctoral thesis. Lulea: Lulea University of Technology.
4. Lê Thị Hoài Châu. (2004). *Khai thác lịch sử toán trong dạy học khái niệm tích phân*. Tạp chí khoa học ĐHSP TPHCM, (2).
5. Ngô Minh Đức. (2013). *Khái niệm đạo hàm trong dạy học Toán và Vật lí ở trường phổ thông*. Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
6. Nguyễn Thế Khôi (Tổng chủ biên), Phạm Quý Tư (chủ biên) (2012). *Vật lí 10 (Nâng cao)*. Nxb Giáo dục Việt Nam.
7. Oliveira, A. R. O. (2013). *A History of the Work Concept: From Physics to Economics*. Springer, Amsterdam.
8. Trần Lương Công Khanh (2002). *Nghiên cứu didactic về những khó khăn chính của học sinh khi tiếp thu khái niệm tích phân*. Luận văn Thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.

LỢI ÍCH CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN ĐỐI VỚI DẠY HỌC ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH: TRƯỜNG HỢP KHÔNG GIAN VECTOR

Nguyễn Ái Quốc*, Nguyễn Thị Thanh Thanh**

Tóm tắt

Bài báo trình bày một phân tích tri thức luận nhằm làm rõ những nét chính của quá trình hình thành và phát triển của khái niệm không gian vector, mối liên hệ của nó với một số lĩnh vực toán học khác, đồng thời chỉ ra các đặc trưng tri thức luận và xác định các chướng ngại mà sinh viên phải vượt qua khi học tập tri thức không gian vector.

Từ khóa: phân tích tri thức luận, không gian vector, đặc trưng tri thức luận, chướng ngại.

Abstract

This paper not only presents an epistemological analysis in order to highlight the main stages of the genesis and the development of the vector space's theory, its relations with the other mathematical disciplines, but also mentions the formulation of its epistemological characteristics and the identification of obstacles that students must overcome in learning this knowledge.

Keywords: epistemological analysis, vector space, epistemological characteristic, obstacle.

1. Đặt vấn đề

1.1. Lý do chọn đề tài

Không gian vector (KGV) là khái niệm cơ bản của nhiều lĩnh vực toán học khác nhau, đặc biệt là của Đại số tuyến tính, được xây dựng trên một hệ tiên đề. Dựa vào KGV, người ta còn xây dựng được Hình học Euclide, Hình học afin, Hình học xạ ảnh, Hình học giả Euclide, ... hay không gian định chuẩn trong Giải tích hàm. Khái niệm KGV hiện diện một cách ngầm ẩn trong môn Toán ngay từ những năm đầu bậc trung học cơ sở cho đến năm cuối bậc trung học phổ thông thông qua việc nghiên cứu các tập số nguyên, hữu tỷ, số thực, số phức và các vector hình học.

Khái niệm KGV được dạy cho sinh viên khoa sư phạm Toán ở năm thứ nhất hệ đại học và cao đẳng. Thực tế giảng dạy cho thấy họ gặp không ít khó khăn khi tiếp cận khái niệm KGV, chẳng hạn việc xác định hạng và chiều. Những khó khăn này tồn tại dai dẳng qua nhiều thế hệ sinh viên. Việc nghiên cứu tri thức luận của khái niệm KGV cho phép xác định các đặc trưng và chướng ngại tri thức luận mà sinh viên phải vượt qua trong học tập tri thức này.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Phân tích tri thức luận của KGV và phân tích quá trình dạy học tri thức này ở bậc đại học để tìm câu trả lời cho các câu hỏi sau:

– KGV được hình thành và phát triển như thế nào? Nó có mối liên hệ với các lĩnh vực toán học khác ra sao?

* TS, Đại học Sài Gòn

** ThS, Đại học Đồng Nai

- Các đặc trưng tri thức luận của KGVТ là gì?
- Những khó khăn có thể xuất hiện trong quá trình dạy học KGVТ là gì?

2. Phân tích tri thức luận về KGVТ

2.1. KGVТ trong lịch sử: các giai đoạn nảy sinh và phát triển

2.1.1. Phương trình tuyến tính: Xây dựng các khái niệm đầu tiên

Năm 1750 là thời điểm quan trọng vì sự xuất bản của hai công trình nghiên cứu cốt yếu trong lịch sử khái niệm KGVТ: “*Introduction à l’analyse des courbes algébriques*” của Gabriel Cramer và “*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*” của Leonhard Euler. Trong tác phẩm thứ nhất, Cramer xây dựng khung lý thuyết định thức và trong tác phẩm thứ hai, Euler tập trung vào nghịch lý của Cramer liên quan đến các đường cong đại số:

(1) Hai đường cong đại số phân biệt bậc m và n có mn điểm chung. Biết rằng một vài điểm có thể là bội, phức, hay vô cực, nhưng các nhà toán học cũng đã biết các ví dụ mà đối với chúng những điểm này hoàn toàn đơn giản và thực.

(2) $n(n + 3)/2$ điểm là điều kiện cần và đủ để xác định một đường cong duy nhất bậc n . [9, tr. 228]

Nghịch lý xuất hiện khi n lớn hơn 2 vì khi đó $n(n + 3)/2 \leq n^2$, vì thế có vẻ hai đường cong đại số có thể có nhiều điểm chung hơn đủ để xác định mỗi đường trong chúng. Thật vậy, với $n = 2$, có một đường cong duy nhất đi qua năm điểm bất kỳ và hai đường cong giao nhau tại bốn điểm là điều bình thường. Nhưng với $n = 3$, thì hai đường cong bậc ba bất kỳ giao nhau tại chín điểm, và theo mệnh đề (2) có một đường cong duy nhất bậc ba đi qua chín điểm cho trước bất kỳ. Ở đây có sự mâu thuẫn, vì có ít nhất hai đường cong bậc ba đi qua chín điểm đã cho.

Cũng trong năm 1750, Euler đã xác định được bản chất của vấn đề. Trong công trình của mình, sau một phân tích chặt chẽ tình huống, Euler giải thích rằng trong một số trường hợp, mệnh đề (2) có thể không đúng, vì n phương trình có thể không đủ để xác định n giá trị. Ông đưa ra một số ví dụ để cho thấy rằng một phương trình có thể chứa trong một hay một số phương trình khác. Văn bản này rất lạ vào thời điểm đó vì các nhà toán học nói về các phương trình tuyến tính chỉ để phát triển các phương pháp giải các phương trình đó.

Tiếp cận của Euler có chất lượng hơn và văn bản của ông là một trong những văn bản đầu tiên nêu lên và chỉ ra vấn đề phụ thuộc của các phương trình tuyến tính, mặc dù vấn đề giải các phương trình đó vẫn còn quan trọng, và đánh dấu sự khác biệt so với định nghĩa hiện đại của phụ thuộc tuyến tính. Thấy vậy, ông bắt đầu bằng trường hợp hai phương trình: “ $3x - 2y = 5$ và $4y = 6x - 10$ ”. Ông cho rằng không thể xác định hai ẩn x và y bằng cách loại x vì một phương trình sẽ mất đi và phương trình duy nhất còn lại không cho phép suy luận gì thêm.

Euler tiếp tục đưa ra ví dụ một hệ gồm ba phương trình ba ẩn trong đó có hai phương trình đồng dạng hay có một phương trình là nhân đôi của tổng hai phương trình khác mà việc xác định ba ẩn là không thể. Ông cũng đưa ra ví dụ một hệ gồm bốn

phương trình bốn ẩn trong đó có hai phương trình là tổng của hai phương trình trong ba phương trình còn lại và chỉ ra rằng không thể xác định hai trong bốn ẩn đó.

Sau những ví dụ này, Euler nhận định rằng để xác định n đại lượng chưa biết, cần có đủ n phương trình cho các mối liên hệ lẫn nhau của chúng và phải thêm hạn chế là các phương trình phải khác nhau hoàn toàn hay không có phương trình nào chứa trong các phương trình khác.

Theo Dorier, Euler đã giới thiệu khái niệm phụ thuộc bao hàm hơn là phụ thuộc tuyến tính. Tất nhiên, hai khái niệm này trùng hợp nhau khi áp dụng cho các phương trình tuyến tính, và sự phân biệt có thể dường như không cần thiết, nhưng phụ thuộc bao hàm được nhúng vào trong ngữ cảnh của các phương trình và không thể chuyển sang các tình huống khác như các bộ n thứ tự. [9, tr. 230]

Mặt khác, định nghĩa của Euler rất gần với trực giác và phù hợp với mục đích của ông. Khi nghiên cứu trường hợp $n = 4$, ông đã phát triển các luận cứ trong đó người ta có thể nhận ra một trực giác thực nghiệm về khái niệm hạng.

Khoảng từ năm 1840 đến 1879, trong lý thuyết định thức, khái niệm hạng được hình thành. Trong ngữ cảnh các phương trình tuyến tính, hạng là một đại lượng bất biến xác định kích thước tập nghiệm (số nhỏ nhất các phần tử sinh/số lớn nhất các nghiệm độc lập) và bằng một quá trình đối ngẫu, xác định số các quan hệ phụ thuộc (số nhỏ nhất mô tả tập nghiệm/số lớn nhất các phương trình độc lập).

Năm 1875, trong bài báo tựa đề: "*Über das Pfaffsche Problem*", Georg Ferdinand Frobenius có ý tưởng gốc ban đầu là đưa ra một định nghĩa chung cho sự độc lập các phương trình và bộ n thứ tự mà không sử dụng định thức.

Vào năm 1879, trong bài báo tựa đề "*Über homogene totale Differentialgleichungen*", lần đầu tiên Frobenius sử dụng thuật ngữ hạng. Ông định nghĩa hạng m của một định thức con bậc m không bằng không tất cả và mọi định thức con bậc $m+1$ đều triệt tiêu.

Năm 1905, trong bài báo tựa đề "*Zur Theorie der linearen Gleichungen*", có thể thấy khái niệm hạng đã đạt đến sự trưởng thành trong lý thuyết định thức, trong đó Frobenius đưa ra bản báo cáo có cấu trúc hoàn chỉnh về các kết quả lý thuyết của việc nghiên cứu các phương trình tuyến tính.

Như vậy, việc nghiên cứu các phương trình tuyến tính và lý thuyết định thức ở đây trình bày bối cảnh trong đó các khái niệm lý thuyết đầu tiên về sự phụ thuộc, hạng, và tính đối ngẫu liên quan đến khái niệm KGVN được tạo ra và áp dụng trong không gian hữu hạn chiều.

2.1.2. Khái niệm vector trong Hình học

Mối quan hệ giữa lý thuyết không gian vector và hình học dường như hiển nhiên đối với nhiều người, vì việc sử dụng biểu diễn hình học để minh họa các ý tưởng vector, vì việc sử dụng một từ vựng chung trong hai lĩnh vực, và bởi vì hình học vector là một phương pháp rất mạnh.

Phương pháp giải tích, do Rene Descartes giới thiệu trong "*Géométrie*" của ông và do Pierre de Fermat giới thiệu trong "*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*", đã tổ chức hình học theo các tiêu chí khác nhau. Phương trình của một đường là bậc một, nó

đã trở thành cấp độ thứ nhất. Chẳng hạn, việc thay đổi tọa độ, tiện lợi trong nghiên cứu các bất biến để phân loại các đường cong, đã đưa ra một khung lý thuyết cho nghiên cứu các phép biến đổi tuyến tính. Do đó, với việc sử dụng phương pháp giải tích trong hình học, tính chất tuyến tính đã trở thành điểm xuất phát hay vấn đề trung tâm trong nhiều bài toán.

Ngay từ năm 1679, trong bức thư gửi cho Christian Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz đã chỉ trích phương pháp giải tích và đã cố gắng, mặc dù không thành công, tạo ra một giải tích hình học nội tại mà ông gọi là "*hình học của tình huống*".

Trong cùng khoảng thời gian này, August Ferdinand Möbius và Giusto Bellavitis đã phát triển hai hệ thống phân tích hình học khác nhau có hiệu lực cho ba chiều cũng như cho hai chiều, làm cơ sở cho hình học vectơ.

Möbius là một trong những nhà toán học đầu tiên phác thảo khái niệm đoạn thẳng định hướng. Trong chương thứ nhất của tác phẩm "*Barycentrische Calcul*" mà các nguyên tắc của nó được biết đến lần đầu tiên vào khoảng 1818, ông đã chỉ ra một đoạn thẳng từ điểm A đến điểm B bằng ký hiệu AB và phát biểu rằng $AB = -BA$.

Vào năm 1862, Möbius viết tác phẩm "*Über geometrische Addition und Multiplication*" mà được xuất bản vào năm 1887, trong đó ông định nghĩa phép cộng các đoạn thẳng không cộng tuyến, phép nhân với một số bất kỳ và hai loại tích đoạn thẳng mà được trực tiếp lấy cảm hứng từ công trình nghiên cứu của Grassman.

Với tác phẩm "*Calcolo delle Equipollenze*", Giusto Bellavitis được xem là nhà toán học đầu tiên đã định nghĩa phép cộng vectơ trong không gian vào năm 1833. Ông cũng định nghĩa phép nhân các đoạn thẳng định hướng đồng phẳng. Tuy nhiên, ông đã thất bại khi khái quát hóa tích của các đoạn thẳng định hướng trong không gian. Sự khái quát này đã được hoàn thành bởi nhà toán học Ailen, William Rowan Hamilton.

Mặc dù Hamilton từ lâu đã quan tâm đến sự khái quát hóa biểu diễn hình học ba chiều của số phức, nhưng mãi đến năm 1843 ông mới phát minh ra số quaternion.

Về lâu dài, tuy việc xây dựng hệ thống phép tính hình học có vẻ ảnh hưởng trên sự phát triển của phân tích vectơ nhiều hơn là trên lý khái niệm KGVTV, nhưng tầm quan trọng lịch sử của nó được đánh giá cao. Việc sử dụng các thuật ngữ hình học trong lý thuyết tổng quát của KGVTV là một bằng chứng cho điều đó và nhấn mạnh mối liên hệ đặc quyền giữa hình học và đại số tuyến tính.

2.1.3. Đại số tuyến tính trong các trao đổi biện chứng giữa Hình học và Đại số

Từ phát minh của phương pháp giải tích, mối liên hệ mới giữa đại số và hình học được phát triển: sự tiến triển của hai lĩnh vực được kết nối nội tại trong một quá trình biện chứng. Theo nghĩa này, việc sử dụng phương pháp giải tích trong hình học sinh ra sự sáng tạo của hầu hết các công cụ đại số mà tràn thông qua nghiên cứu các phép thể tuyến tính, chẳng hạn thay đổi tọa độ.

Ngày nay, khái niệm phép biến đổi hình học áp dụng cho toàn bộ không gian hay mặt phẳng và thực sự đã được xây dựng đầy đủ qua tác phẩm "*Erlangen Program*" của Felix Klein. Nhiều bài toán trong hình học giải tích dẫn đến việc áp dụng thay đổi tọa độ và nghiên cứu phép các phép thể tuyến tính giống các phép biến đổi tuyến tính. Việc sử dụng các phép thể tuyến tính không chỉ xuất hiện trong hình học mà còn xuất

hiện trong nghiên cứu các dạng bậc hai với hệ số nguyên trong nhiều bài toán số học và giải phương trình vi phân.

Năm 1770, trong “*Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*”, Euler đã nghiên cứu các vấn đề có thể được giải thích bằng thuật ngữ các phép thế tuyến tính trực giao.

Từ 1773 đến 1775 trong tác phẩm “*Recherche d'arithmétique*”, Joseph Louis Lagrange đi đến nghiên cứu tác động của các phép thế tuyến tính với các hệ số nguyên trong một dạng bậc hai hai biến khi ông nghiên cứu tính chất của các số là tổng của hai bình phương.

Vào khoảng 1798, trong tác phẩm “*Disquisitiones arithmeticae*” của mình, Gauss đã nghiên cứu cùng một vấn đề với hai và ba biến. Ông giới thiệu ký hiệu rất giống một ma trận để đặc trưng hoá phép thế tuyến tính và hơn nữa thiết lập công thức kết hợp hai phép thế tuyến tính. Điều này đánh dấu một bước cơ bản hướng đến khái niệm ma trận. Tác phẩm này không chỉ giới thiệu một ký hiệu tượng trưng cho các phép thế tuyến tính mà còn sử dụng nó để biểu thị phép nhân.

Tuy nhiên, vào một thời điểm nhất định, khái niệm định thức không được xác định rõ ràng vì tách rời với khái niệm ma trận chính là nguồn gốc của nhầm lẫn. Chẳng hạn, điều này có thể là lý do tại sao trong khi tính chất không giao hoán của tích các ma trận đã không được chỉ ra, nhưng ngược lại biết rằng $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$.

Trong nửa sau thế kỷ 19, đại số tuyến tính vẫn chưa tồn tại như một lĩnh vực hợp nhất, nhưng hình học trong n chiều được phát triển trên cơ sở hình học giải tích và lý thuyết định thức và ma trận.

2.1.4. Tác phẩm “*Ausdehnungslehre*” của Grassmann: Một sự độc đáo tách biệt

Năm 1844, Hermann Grassmann xuất bản phiên bản đầu tiên của tác phẩm “*Lineale Ausdehnungslehre*” (lý thuyết tuyến tính mở rộng) mà tác giả công bố là phần thứ nhất của lý thuyết tổng quát “*die Ausdehnungslehre*” mà ông chưa bao giờ hoàn thành. Nguồn gốc của “*Ausdehnungslehre*” khác nhau từ cả hai quan điểm toán học và triết học, nhưng hình học và bản chất của không gian thể hiện các nguồn tư duy quan trọng của Grassmann, mặc dù lý thuyết mở rộng của nó chứa nhiều viễn cảnh đầy tham vọng hơn.

Mặc dù không thành công, nhưng lý thuyết của Grassmann bao gồm các cơ sở cho một lý thuyết thống nhất về tính chất tuyến tính, như nó đã giới thiệu, với độ chính xác tuyệt đối và trong bối cảnh rất tổng quát, các khái niệm cơ bản như sự phụ thuộc tuyến tính, cơ sở và chiều.

Sự phụ thuộc tuyến tính và chiều cũng là những khái niệm trung tâm trong lý thuyết của Grassmann, vì chúng nằm trong khái niệm KGVTV hiện đại. Trong cả hai phiên bản lý thuyết, ông đưa ra chứng minh một kết quả tương đương với công thức về số chiều của tổng và giao của hai không gian con:

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$$

2.1.5. Các tiếp cận tiên đề đầu tiên

Năm 1888, Peano xuất bản phiên bản đọc ngắn gọn của riêng mình trên tác phẩm “*Ausdehnungslehre*” của Grassmann với tựa đề “*Calcolo geometrico*”. Trong một chương cuối nhỏ ở cuối bài báo này, ông đã đưa ra định nghĩa tiên đề về cái mà ông gọi là một hệ thống tuyến tính, mà theo thuật ngữ hiện đại là định nghĩa tiên đề đầu tiên của một không gian vectơ.

Các tiên đề của Peano rất giống các tính chất cơ bản của Grassmann, nhưng đóng góp của Peano rất quan trọng. Ông thực sự đưa ra các tính chất của các phép toán để mô tả cấu trúc, không giống như Grassmann đã suy ra chúng từ định nghĩa của các phép toán trên tọa độ.

Năm 1909, Burali-Forti và nhà toán học người Ý, Roberto Marcolongo, xuất bản tác phẩm “*Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto et alia fisica-matematica*” mở ra sự trình bày tiên đề của các hệ thống tuyến tính.

Dù vậy, định nghĩa của Burali-Forti và Marcolongo đưa ra ít phù hợp hơn so với mô hình định nghĩa tiên đề của Peano (một số tiên đề thừa và một số khác thì thiếu), cũng như không cung cấp nhiều hơn các kết quả và ứng dụng đáng kể, tuy nhiên công trình của họ quan trọng vì lần đầu tiên nó được giới thiệu trong một tác phẩm trong khi nó chỉ xuất hiện trong cuốn sách của Peano ở một chương nhỏ cuối cùng.

Trong ấn bản đầu tiên của “*Raum-Zeit-Materie*” vào năm 1918, Hermann Weyl cũng đưa ra một định nghĩa tiên đề về cái mà ông gọi là các đa tạp vectơ tuyến tính. Định nghĩa của ông gần với công thức cơ bản của Grassmann năm 1862 hơn so với định nghĩa của Peano. Tuy nhiên, tiếp cận của Weyl về khái niệm chiều không khác nhiều so với của Peano ngoại trừ lưu ý của ông cho thấy tập trung vào các bất biến liên quan đến số chiều.

Mặc dù câu hỏi về sự bất biến của số các phần tử trong một cơ sở của trường mở rộng đã được xem xét kỹ trong một thời gian, nhưng nó đã được Richard Dedekind đưa ra và quan tâm giải quyết vào năm 1893 trong lần bổ sung thứ 11 cho ấn bản thứ tư của tác phẩm “*Vorlesungen über Zahlentheorie*” của Gustav Peter Lejeune-Dirichlet. Trong phần bổ sung này, một đoạn văn tạo thành một tiếp cận cấu trúc tuyến tính rất tổng quát và cho nó một dạng rất hiện đại vào lúc đó.

Dedekind đã mở ra định nghĩa và các tính chất của sự độc lập tuyến tính mà ông gọi là tính tối giản. Sau đó, ông đã định nghĩa một không gian Ω là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của một tập tối giản của n phần tử trong một trường A . Ông gọi n phần tử này là một cơ sở của Ω và định nghĩa tọa độ của một phần tử thuộc Ω . Ngay sau đó, ông giới thiệu ba tính chất mà ông đã chứng minh là đặc trưng của Ω :

I. Các số của Ω tự tái sinh qua phép cộng và trừ, nghĩa là, tổng và hiệu bởi hai số bất kỳ nằm trong Ω .

II. Bất kỳ tích của một số trong Ω với một số trong A là một số thuộc Ω .

III. Có n số độc lập trong Ω , nhưng $n+1$ số như thế thì phụ thuộc.

Trong phần bổ sung cuối cùng này, Dedekind cũng nghiên cứu các đặc tính của mô-đun, và đặc biệt là các cơ sở của chúng, nhưng điều này vượt quá phạm vi nghiên

cứu hiện thời. Phương pháp tiếp cận của Dedekind rất gần với việc trình bày tiên đề hiện đại của các kết quả sơ bản trên KGVTV giới hạn hữu hạn.

Năm 1910, công trình nghiên cứu “*Algebraische Theorie der Körper*” đánh dấu một giai đoạn quan trọng trong lịch sử của đại số hiện đại và được dùng như một tác phẩm tham khảo ít nhất một phần tư thế kỷ. Trong công trình chính này, Steinitz đưa ra một định nghĩa chính xác về sự phụ thuộc tuyến tính trên một trường R , và xác định sự mở rộng hữu hạn bậc n . Ernst Steinitz giới thiệu những kết quả nghiên cứu gần với định nghĩa tiên đề của khái niệm tổng quát về sự phụ thuộc mà các khái niệm về chiều và cơ sở có thể được suy ra từ đó.

2.1.6. Phương trình vi phân và giải tích hàm

Phương trình vi phân là điểm có lợi ích quan trọng trong toán học kể từ thế kỷ 18, và nghiên cứu chúng đã trở thành điểm xuất phát của cái được gọi là Giải tích hàm vào khoảng cuối thế kỷ này. Hơn nữa, nghiên cứu phương trình vi phân tuyến tính đóng một phần quan trọng trong lý thuyết hóa tính chất tuyến tính.

Vào giữa thế kỷ 18, Jean le Rond D'Alembert, Lagrange và Euler đã nhận thấy rằng nghiệm chung của một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất bậc n có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của một tập hợp n nghiệm “*cơ bản*”.

Hơn nữa, sự phát triển trong nghiên cứu các phương trình vi phân và vi phân từng phần đã dẫn đến các vấn đề phức tạp liên quan đến tính tuyến tính. Trong khuôn khổ này, trong nhiều lần xuất hiện, người ta có thể phát hiện các phương pháp hay khái niệm không rõ ràng và ngầm ẩn nhiều hơn hay ít hơn là các thành phần thiết yếu của đại số tuyến tính. Chẳng hạn, ngay từ năm 1770, Lagrange giới thiệu một phương pháp sử dụng cái mà ngày nay được gọi là *toán tử liên hợp*. Ông cũng đã sử dụng một cách ngầm ẩn một số công cụ của tính đối ngẫu để giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Năm 1822, trong tác phẩm “*Théorie analytique de la chaleur*” của mình, khi giải các phương trình vi phân bằng các chuỗi lũy thừa, Joseph Fourier đã sử dụng các phương pháp để giải hệ vô hạn đếm được các phương trình tuyến tính có vô hạn ẩn đếm được. Tuy nhiên, việc thiếu hiểu biết về sự hội tụ của các chuỗi lũy thừa đã không cho phép ông đưa ra nghiệm đúng của bài toán. Nhưng công việc này đã đưa ra nguyên tắc cơ bản của phương pháp: nghiên cứu hệ con hữu hạn vuông bậc n và sau đó cho n tiến đến vô cực.

Sau đó, nhiều nhà toán học khác đã nghiên cứu hệ vô hạn các phương trình tuyến tính như Henri Poincaré, David Hilbert, Frrdrick Riesz, Erhard Schmidt, Jacques Hadamard, Maurice Frrchet, nhưng họ chỉ xem xét các điều kiện giới hạn khác nhau trên các chuỗi lũy thừa đảm bảo sự hội tụ của định thức vô hạn. Tuy nhiên, một số nhà toán học bắt đầu cảm thấy sự không chính xác của một số phương pháp đã trở nên kỹ thuật cao và khó thao tác. Họ đã thay đổi cách tiếp cận vấn đề bằng cách xem xét các KGVTV hàm nhiều hơn và tổng quát hơn mà cuối cùng dẫn đến sự tiên đề hóa giải tích hàm.

Riesz là người đã có những bước đi quyết định nhất theo hướng này trong một bài báo tựa đề “*Über lineare Funktionalgleichungen*” vào năm 1916 và được dịch sang tiếng Đức vào năm 1918. Đây là một trong những văn bản đầu tiên đưa ra một định nghĩa tổng quát của một phép tuyến và một KGVTV con đóng của các hàm.

In 1921, Eduard Helly xem xét một không gian vector chuỗi chuẩn tổng quát và do đó cũng đã đánh dấu một giai đoạn mới trong tiên đề hóa giải tích hàm. Sau cùng, bước quyết định hướng tới tiên đề hóa được thực hiện độc lập bởi Stefan Banach trong luận án của mình được bảo vệ năm 1920 và xuất bản năm 1922, và Hans Hahn trong hai bài báo xuất bản năm 1922 và 1927. Cấu trúc cơ bản được xác định trong tác phẩm của Banach cũng như của Hahn, là cái mà ngày nay chúng ta gọi là một không gian Banach, tức là một không gian vector định chuẩn hoàn toàn.

Năm 1932, Banach xuất bản bài báo tựa đề “*Théorie des opérateurs linéaires*”, trong đó ông đưa ra khung tham chiếu chung và hầu hết các kết quả của giải tích hàm tiên đề và đại số tuyến tính chiều vô hạn. Cuốn sách này là một thành công to lớn và nhanh chóng mở ra một kỷ nguyên mới trong hai lĩnh vực toán học.

Năm 1930 và 1931, van der Waerden xuất bản tập một và tập hai lần xuất bản thứ nhất của cuốn “*Moderne Algebra*”. Trong lần xuất bản thứ nhất, đại số tuyến tính tập trung vào cấu trúc môđun, mặc dù hầu hết các khái niệm và kết quả đầu tiên như tổ hợp tuyến tính, sự phụ thuộc, cơ sở và chiều đã được thiết lập trong chương trước về mở rộng trường. Nhưng trong lần xuất bản sau, vị trí của đại số tuyến tính và KGVТ trở nên quan trọng và trung tâm hơn. Việc nghiên cứu về hệ phương trình tuyến tính sau đó đã được trình bày như là một ứng dụng của khái niệm KGVТ và vai trò của các định thức bị giảm đáng kể.

Việc xuất bản gần như đồng thời ấn bản đầu tiên của hai tác phẩm “*Moderne Algebra*” và của “*Théorie des opérateurs linéaires*” đã đánh dấu hai sự kiện trọng đại trong lịch sử toán học hiện đại, điều này rất cần thiết trong sự thống nhất lý thuyết tiên đề KGVТ hữu hạn chiều hay chiều vô hạn.

2.2. Một số kết quả thu được từ việc phân tích lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm KGVТ

2.2.1. Sự hợp nhất và lý thuyết hóa của khái niệm KGVТ

Sự hình thành khái niệm *hạng* được thực hiện chủ yếu thông qua các hệ phương trình tuyến tính và vẫn gắn liền với khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính. Đặc biệt, khái niệm *hạng* trong các lý thuyết tiên đề KGVТ là một sự tổng hợp của các mối quan hệ giữa các khái niệm tập sinh và sự phụ thuộc, có thể được giới thiệu trước ý tưởng về tính đối ngẫu.

Sự khái quát hóa các vấn đề hình học trên các không gian có số chiều lớn hơn ba đã gia tăng sự liên kết các vấn đề tuyến tính. Các mô hình trong R^n , với việc sử dụng các công cụ và khái niệm kế thừa từ lý thuyết định thức và sự sử dụng từ vựng hình học cũng như sự biểu diễn trực quan, dần dần hình thành nền tảng lý thuyết cho vấn đề tuyến tính bất kỳ. Quá trình này rất quan trọng đối với sự phát triển xa hơn nữa của khái niệm KGVТ, trong đó thống nhất các vấn đề của sự tuyến tính cả bên trong và bên ngoài hình học. Phân tích nêu trên nhấn mạnh sự khác biệt về bản chất của những đóng góp từ hình học và từ lý thuyết định thức đến sự hình thành của lý thuyết các KGVТ và cho thấy các lý thuyết là kết quả của một sự tổng hợp của cả hai.

Phép thế tuyến tính và phép biến đổi tuyến tính được tạo ra qua mối quan hệ biện chứng giữa hình học và đại số. Sự tác động và giá trị của phương pháp giải tích đối với

việc giải quyết những vấn đề trong hình học đã làm nảy sinh những sáng tạo công cụ đại số ma trận thông qua phép thể tuyến tính.

Sự ra đời lý thuyết của Grassmann đóng một vai trò quan trọng trong sự phát minh lý thuyết tiên đề KGV_T, nó chứa đựng các cơ sở cho một lý thuyết thống nhất về tính chất tuyến tính với độ chính xác cao và trong một bối cảnh rất tổng quát đối với các khái niệm cơ bản như sự phụ thuộc tuyến tính, cơ sở và chiều.

Hệ thống tiên đề đầu tiên của KGV_T của Giuseppe Peano nhanh chóng trở thành một khung tham chiếu được sử dụng trong nhiều nhánh của toán học cũng như trong nhiều ngành khoa học khác vào ba thập niên đầu của thế kỷ 20, không chỉ phục vụ như một cơ sở cho các khám phá mới mà còn giúp làm mới các phép chứng minh hay các phương pháp trong những lĩnh vực khác của toán học. Do đó, khái niệm KGV_T về bản chất là một lý thuyết thống nhất và khái quát hóa cao.

2.2.2. *Mối liên hệ giữa KGV_T với những lĩnh vực toán học khác*

Lý thuyết định thức: việc giải quyết các vấn đề liên quan các phương trình tuyến tính và lý thuyết định thức đã làm nảy sinh những khái niệm cơ bản của khái niệm KGV_T. Điều này cho thấy mối liên hệ mật thiết giữa khái niệm KGV_T với lĩnh vực này.

Hình học: Việc sử dụng các thuật ngữ hình học trong lý thuyết tổng quát về KGV_T là bằng chứng về mối liên hệ này và nhấn mạnh các mối quan hệ đặc quyền giữa hình học và đại số tuyến tính.

Lý thuyết của Mobius cung cấp một đại số các điểm, tuy mục tiêu của ông không phải để trình bày một “cấu trúc” đại số trong tất cả các chi tiết của nó, thay vì muốn chỉ ra một công cụ để giải quyết các bài toán hình học và vật lý. Chính ông đã truyền cảm hứng cho Christian Von Staudt trong phát minh hệ tọa độ xạ ảnh, mà giải phóng hình học xạ ảnh khỏi một khảo sát metric bất kỳ và cho phép hiểu biết tốt hơn bản chất của các tính chất xạ ảnh.

Có thể thấy những vấn đề liên quan đến hình học giải tích đã dẫn đến ứng dụng các thay đổi của hệ tọa độ và các nghiên cứu về phép thể tuyến tính là tương tự như của phép biến đổi tuyến tính. Hơn nữa, việc sử dụng phép thể tuyến tính không chỉ xuất hiện trong hình học mà còn ở lĩnh vực khác, chẳng hạn, trong nghiên cứu của hình dạng bậc hai với hệ số nguyên trong các bài toán khác nhau về số học và cách giải của các phương trình vi phân. Đặc biệt, Cesare Burali-Forti đã sử dụng những ý tưởng Grassmann khi viết về tác phẩm hình học vi phân.

Phương trình vi phân và giải tích hàm: Mối liên hệ giữa KGV_T với các phương trình vi phân và giải tích hàm thể hiện rõ qua vai trò của việc nghiên cứu các phương trình vi phân tuyến tính trong lý thuyết hóa sự tuyến tính, nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân thuần nhất tuyến tính bậc n có thể được trình bày như một tổ hợp tuyến tính của một bộ n nghiệm “cơ bản”.

2.2.3. *Đặc trưng tri thức luận của KGV_T*

Phân tích tri thức luận khái niệm KGV_T cho thấy quá trình hình thành và phát triển tri thức này tập trung trên một số yếu tố cơ bản và cốt lõi gắn liền với lý thuyết định thức và việc giải hệ phương trình tuyến tính. Từ đó, cho phép chúng tôi rút ra các đặc trưng tri thức luận của KGV_T sau đây:

- tổ hợp tuyến tính,
- độc lập tuyến tính - phụ thuộc tuyến tính,
- hạng - chiều,
- phép biến đổi tuyến tính.

2.3. Chương ngại trong học tập khái niệm KGV

Những chương ngại gắn liền với lịch sử phát triển của khái niệm KGV mà việc vượt qua nó đóng vai trò quyết định đối với quá trình xây dựng hệ tiên đề định nghĩa KGV hay các khái niệm liên quan, do đó trong học tập thì việc vượt qua những chương ngại này là điều không thể tránh khỏi. Phân tích tri thức luận của KGV cho phép chỉ ra một số khó khăn, trở ngại mà các nhà toán học đã trải qua trong một quãng thời gian dài, đặc biệt có liên quan đến sự trừu tượng hóa của KGV. Điều này hỗ trợ dự đoán những khó khăn, chương ngại có thể của sinh viên trong việc học tập khái niệm KGV.

Vì vậy, phân tích tri thức luận của KGV cho phép chúng tôi rút ra các khó khăn có thể của sinh viên khi tiếp cận tri thức này:

Khó khăn liên quan đến trừu tượng hóa:

– *kiểu hệ thống biểu đạt*: một đối tượng tri thức có thể có nhiều cách biểu đạt ngôn ngữ toán học như ngôn ngữ tự nhiên, ngôn ngữ ký hiệu hay ngôn ngữ đồ thị. Tuy nhiên, đối với cấu trúc KGV, có thể biểu đạt qua ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ ký hiệu. Như đã phân tích ở trên, do nhu cầu giải quyết các vấn đề thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau cũng như xây dựng một ngôn ngữ chung để thỏa mãn cho những nghiên cứu được thực hiện nên đòi hỏi các nhà toán học phải đưa ra một hệ thống biểu đạt phù hợp nhất, là sự tổng hòa của nhiều lĩnh vực. Chính vì vậy mà họ gặp không ít trở ngại.

– *Kiểu hệ thống tiên đề*: Hầu hết các khái niệm toán học trong thể chế trung học phổ thông đều được định nghĩa theo kiểu định danh hay bản chất, trong khi các khái niệm của KGV được định nghĩa bằng hệ tiên đề. Việc chuyển từ làm việc trên các tập hợp số cụ thể sang làm việc trên các hệ thống biểu đạt ký hiệu là một trong những nguồn gốc của các khó khăn mà sinh viên đại học gặp phải trong học tập KGV.

3. Kết luận

Việc phân tích tri thức luận cho thấy sự nảy sinh và phát triển của KGV trong lịch sử thể hiện qua sự hình thành và tiến triển của các khái niệm cơ bản như tổ hợp tuyến tính, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, hạng, chiều và phép biến đổi tuyến tính. Quá trình hình thành và phát triển này trải qua một số khó khăn liên quan đến khái niệm hạng – chiều, hệ vô hạn phương trình tuyến tính, vectơ hình học và sự trừu tượng hóa của KGV.

Quá trình hình thành và phát triển khái niệm KGV cho thấy tính hợp nhất và lý thuyết hóa của khái niệm KGV trong việc nghiên cứu lý thuyết của các lĩnh vực toán học khác như Hình học Euclide, Hình học affine, Hình học xạ ảnh, Hình học giả Euclide, Phương trình vi phân và Giải tích hàm.

Từ các kết quả chính của phân tích khoa học luận đối với khái niệm KGVТ nêu ra ở trên, câu hỏi đặt ra đối với nhà đào tạo là: tính hợp nhất và lý thuyết hóa của khái niệm KGVТ và các khó khăn xuất hiện trong lịch sử cần phải được tính đến như thế nào trong dạy học khái niệm KGVТ ở bậc đại học? Đây là hai câu hỏi bắt đầu cho một nghiên cứu tiếp theo mà bài báo không đề cập đến ở đây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Artigue, M. (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol.10, No.3, 241-286.
2. Bessot, A., & Comiti C., & Lê Thị Hoài Châu, & Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của Didactic toán*, Nxb Đại học Quốc gia TPHCM.4.
3. Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233-261.
4. Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registre sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
5. Gueudet, G. (2000). *Le rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Grenoble : Université Joseph-Fourier. Thèse préparée au sein de l'équipe Didactique Des Mathématiques, Laboratoire Leibniz-IMAG, Avec le soutien du Laboratoire de Didactique Des Mathématiques de l'Université de Rennes 1.
6. Moore, G. H. (1995). "The Axiomatization of Linear Algebra: 1875 -1940", *Historia Mathematica*, 22, 262 – 303.
7. Heffer, A. (2009). On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism. In Bart van Kerkhove (ed.), *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics*, Brussels, Belgium, World Scientific.
8. Mili, R. I. (2016). *Identification d'obstacles et de difficultés inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite*. Université de Montréal. Mémoire présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès arts en sciences de l'éducation, option didactique.
9. Dorier, J. L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory, *Historia Mathematica*, 22, 227 – 261.
10. Dorier, J. L. (2015). *Interactions entre recherches en histoire et en didactique des mathématiques pour l'élaboration d'une réflexion épistémologique sur les questions d'enseignement et d'apprentissage, l'exemple de l'algèbre linéaire*, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
11. Dorier, J. L., & Harel, G., & Hillel, J., & Rogalski, M., Robinet, J., & Robert, A., & Sierpiska, A. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage Éditions.
12. Christensen, J. (2012). *A Brief History of Linear Algebra*, Final Project Math 2270, Grant Gustafson, University of Utah.

13. Lê Thị Hoài Châu (2003). *Báo cáo tổng kết Đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ*, mã số B2001-23- 02.
14. Parraguez, M., & Oktaç, A. (2009). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory, *Linear Algebra and its Applications*, 432 (2010) 2112–2124.
15. Maracci, M. (2005). On some difficulties in vector space theory, CERME 4 *European Research in Mathematics Education IV Sant Feliu de guixol, Spain, February 17-21, 2005*, pp. 1778-1787.
16. Bourbaki, N. (1969). *Éléments d'Histoire des Mathématiques*. Hermann.
17. Rouche, N. (1989). *Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implication?* Actes du 7eme colloque inter-IREM: Epistémologie et histoire des mathématiques, (pp. 8-38), Besancon.
18. Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics – An Introduction*, 3rd Edition, Pearson Education, Inc.

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN TRONG DẠY HỌC ĐẠI SỐ CAO CẤP: TRƯỜNG HỢP NHÓM

Nguyễn Ái Quốc*, Nguyễn Thị Vân Khánh**

Tóm tắt

Nhóm là cấu trúc cơ bản trong các cấu trúc đại số, ngoài ra nhóm xuất hiện trong hầu hết các môn học thuộc Đại số cao cấp. Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận làm rõ quá trình hình thành, phát triển và trừu tượng hóa của khái niệm nhóm, xác định các đặc trưng tri thức luận của nhóm và một số chương ngại mà sinh viên ngành sư phạm Toán phải đương đầu trong quá trình học tập lý thuyết nhóm.

Từ khóa: tri thức luận, nhóm, trừu tượng hóa, đặc trưng tri thức luận, chương ngại.

Abstract

The group is the fundamental of the algebraic structures; moreover, the group appears in almost all of the disciplines of the abstract algebra. This paper presents an epistemological analysis of the groups' concept, which helps highlight the process of formation, development and abstraction of the group's concept, determine the epistemological characteristics of groups and the obstacles that the pedagogical students of mathematics must encounter in the learning process of group theory.

Keywords: epistemology, group, abstraction, epistemological characteristic, obstacle.

1. Đặt vấn đề

1.1. Lý do nghiên cứu

1.1.1. Sự cần thiết nghiên cứu khái niệm nhóm

Nhóm được xem là cấu trúc cơ bản trong các cấu trúc đại số như vành, miền nguyên hay trường. Cấu trúc nhóm gần như xuất hiện trong hầu hết các môn Đại số cao cấp như Đại số tuyến tính, Đại số đại cương, Số học, Lý thuyết số, Lý thuyết Galois, Lý thuyết module hay Cơ sở Đại số giao hoán, vì vậy việc nghiên cứu tri thức luận về nhóm thực sự cần thiết trong dạy học Đại số cao cấp ở bậc Đại học, hơn nữa các kết quả của phân tích tri thức luận sẽ là nền tảng để phân tích các nguyên nhân sai lầm và triển khai các tình huống cho phép vượt qua các chương ngại trong quá trình dạy học khái niệm nhóm.

1.1.2. Xuất phát từ các khó khăn của sinh viên khi tiếp cận khái niệm nhóm

Tháng 07/2016, một thực nghiệm khảo sát dưới dạng phỏng vấn trực tiếp được tiến hành trên 8 sinh viên Đại học ngành Sư phạm Toán của trường Đại học Sài Gòn và trường Đại học Đồng Nai về khái niệm nhóm thương. Các sinh viên này đã kết thúc học phần Đại số Đại cương trong 60 tiết trong 15 tuần. Mục đích của khảo sát là nhằm tìm hiểu khó khăn của sinh viên trong việc hiểu bản chất của các phần tử và phép toán của nhóm thương.

* TS, Đại học Sài Gòn

** ThS, Đại học Sài Gòn

Câu hỏi được đặt ra là: “Cho G là một nhóm và N là nhóm con chuẩn tắc của G . Bạn hãy cho biết mối quan hệ giữa:

- 1/ nhóm thương G/N và nhóm G ;
- 2/ các phần tử của G/N và của G ;
- 3/ phép toán trong G/N và trong G .”

Kết quả khảo sát cho thấy có 5 sinh viên không nhận thức rõ bản chất của các phần tử của nhóm thương G/N cũng như phép toán của nó.

Trong đó có 2 sinh viên cho rằng nhóm thương G/N là một nhóm con của G . Sinh viên thứ nhất giải thích đơn giản rằng bởi vì nhóm thương G/N cũng là một nhóm và các phần tử của nó lấy từ nhóm G ban đầu, và sinh viên thứ hai xem nhóm thương G/N là “tập hợp các lớp bên phải”, đúng hơn là tương ứng với GN là tích của các phần tử của G với các phần tử của N , do đó cũng là một phần tử của G . Còn về phép toán thì sinh viên thứ hai cho rằng hai phép toán trong G/N và G là trùng nhau.

Một sinh viên khác xem nhóm thương G/N là một nhóm con hay một tập con của G và nếu “nhân” G/N với N sẽ cho G .

Hai sinh viên còn lại đã liên kết khái niệm nhóm thương với khái niệm thương của số học. Trong hai sinh viên này, sinh viên thứ nhất xem nhóm thương G/N là “phép chia nhóm G cho nhóm con N ” và cho ví dụ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ là “nhóm được chia cho 2”; sinh viên thứ hai xem nhóm thương là tập hợp các thương của một phần tử thuộc nhóm ban đầu với một phần tử của nhóm con.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Trong nghiên cứu này, tri thức luận được sử dụng để phân tích lịch sử hình thành, phát triển và trừu tượng hoá của khái niệm nhóm, xác định các đặc trưng tri thức luận của nhóm và xác định một số chương ngại khi người học tiếp cận khái niệm nhóm.

2. Phân tích tri thức luận của khái niệm nhóm

Sự hình thành của khái niệm nhóm bắt đầu từ 1770 và kéo dài đến thế kỷ 20, nhưng phần lớn sự phát triển xảy ra vào thế kỷ 19. Một số đặc trưng toán học chung ở thế kỷ 19 liên quan đến quá trình hình thành và phát triển của khái niệm nhóm là:

- Sự quan tâm gia tăng đối với tính chính xác.
- Sự xuất hiện trừu tượng hóa.
- Sự hồi sinh của phương pháp tiên đề.
- Xem toán học như một hoạt động của con người, có thể không liên quan đến hay không có động cơ từ các tình huống vật lý.

Cho đến thế kỷ 18, đại số bao gồm phần lớn nghiên cứu việc giải các phương trình đa thức. Vào thế kỷ 20, đại số trở thành một nghiên cứu trừu tượng và hệ thống tiên đề. Quá trình chuyển đổi từ đại số cổ điển của các phương trình đa thức sang đại số hiện đại của các hệ thống tiên đề xuất hiện vào thế kỷ 19. Cùng với sự hình thành lý thuyết nhóm là sự xuất hiện các cấu trúc của vành giao hoán, trường, vành không giao hoán và không gian vector.

2.1. Năm giai đoạn chính của quá trình hình thành và phát triển khái niệm nhóm

Quá trình hình thành và phát triển khái niệm nhóm trải qua năm giai đoạn:

– *Các nguồn gốc của khái niệm nhóm* (1770 – 1880): có thể xem đây là giai đoạn sơ khai của nhóm, trong khoảng một thế kỉ, các nhà toán học đã gặp khó khăn khi nghiên cứu các bài toán trong Đại số trước khi khái niệm nhóm ra đời. Khởi đầu là Joseph Louis Lagrange sử dụng “nhóm” hoán vị để tìm nghiệm đa thức, sau đó vào khoảng giữa thế kỉ 19, khái niệm nhóm cũng được manh nha từ lý thuyết số, hình học và giải tích.

– *Sự phát triển lý thuyết “chuyên biệt” về nhóm* (1800 - 1880): thời kỳ này manh nha lý thuyết “đặc trưng” về nhóm, giai đoạn này xuất hiện một số thuật ngữ cũng như kỹ thuật chứng minh của các nhóm hoán vị, nhóm giao hoán hay nhóm biến đổi.

– *Xuất hiện sự trừu tượng trong khái niệm nhóm* (1850 - 1890): giai đoạn này hướng nghiên cứu khái niệm nhóm một cách tổng quát phát triển khá chậm, nó được tiếp nối gần cả một thế kỷ tính từ thời điểm khái niệm nhóm ngầm ẩn trong kết quả của Lagrange vào năm 1770. Giai đoạn này ta có thể thấy khá nhiều hướng nghiên cứu hướng đến việc xây dựng hệ tiên đề của khái niệm nhóm trừu tượng.

– *Sự củng cố của khái niệm nhóm trừu tượng, bình minh của khái niệm nhóm trừu tượng* (1900 - 1920): mặc dù khái niệm nhóm tổng quát đã được hình thành vào cuối những năm của thế kỷ 19 nhưng nó không được tiếp nối và thừa nhận trong các tài liệu, sách giáo khoa, các sách chuyên khảo và trong giáo trình giảng dạy. Các tài liệu chuyên khảo về hướng nghiên cứu khái niệm nhóm tổng quát chỉ bắt đầu xuất hiện vào những năm đầu của thế kỷ 20, sự xuất hiện của các tài liệu chuyên khảo này được xem là thời điểm ra đời của khái niệm nhóm trừu tượng.

– *Giai đoạn khái niệm nhóm được nghiên cứu phân rẽ* (sau năm 1920): đây là giai đoạn khái niệm nhóm được các nhà toán học phát triển theo nhiều hướng nghiên cứu, sự phân rẽ của khái niệm nhóm có thể nhận thấy rõ qua khá nhiều “lý thuyết” khác nhau.

Năm giai đoạn của quá trình hình thành và phát triển khái niệm nhóm được biểu diễn trong sơ đồ ở hình 1.

2.2. Các cột mốc quan trọng trong quá trình hình thành và phát triển khái niệm nhóm có ảnh hưởng đến Đại số hiện đại

Lagrange với phương trình đa thức: Khái niệm nhóm được phôi thai từ công trình nghiên cứu của Lagrange vào năm 1770 mang tên “*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*” tập trung vào việc giải các phương trình đại số. Một số câu hỏi “lý thuyết” liên quan đến sự tồn tại và bản chất của các nghiệm như: “có phải mọi phương trình đa thức đều có nghiệm?”, “Tồn tại bao nhiêu nghiệm?”, “Các nghiệm là thực, phức, dương, âm?”, và các câu hỏi liên quan đến phương pháp tìm nghiệm.

Trong bài báo, Lagrange trước tiên phân tích các phương pháp giải phương trình bậc ba và bậc bốn đã biết của Viète, Descartes, Euler và Bézout. Ông chỉ ra rằng nét đặc trưng chung của các phương pháp này là rút gọn các phương trình này thành các phương trình phụ gọi là *phương trình giải thức* có bậc nhỏ hơn bậc của phương trình ban đầu một bậc. Tiếp theo, ông cố gắng phân tích tương tự phương trình đa thức có bậc n tùy ý. Ông liên kết mỗi phương trình như thế với một “phương trình giải thức”

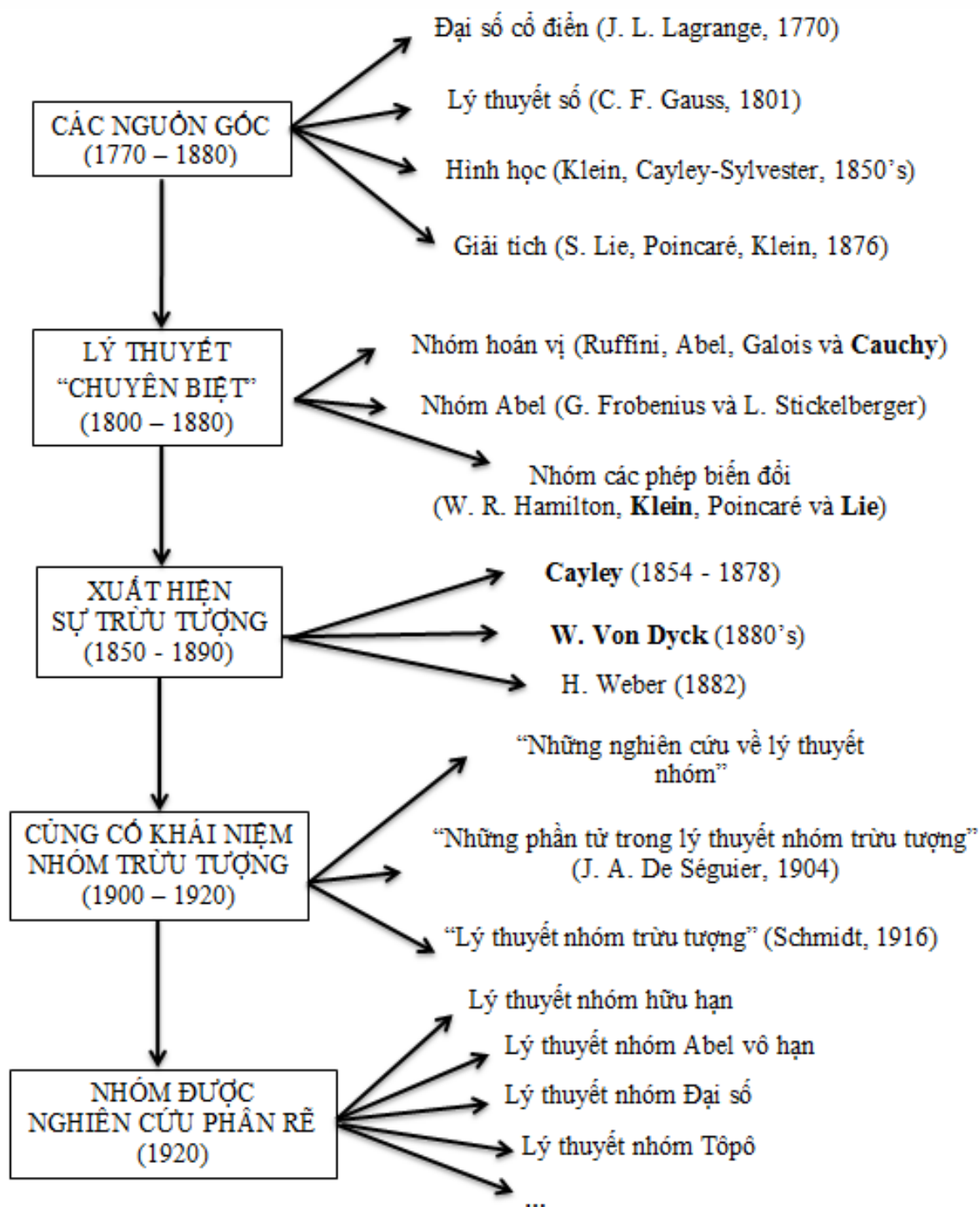
như sau: cho $f(x) = 0$ là phương trình gốc với các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chọn một hàm số hữu tỷ $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của các nghiệm và các hệ số của $f(x)$. Xét các giá trị khác nhau mà $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nhận được qua $n!$ hoán vị các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ của $f(x) = 0$. Nếu ký hiệu các giá trị đó là $y_1, y_2, \dots, y_k$ thì phương trình giải được cho bởi công thức $g(x) = (x - y_1) \cdot (x - y_2) \dots (x - y_k)$. Chẳng hạn, nếu $f(x) = 0$ là bậc 4 có các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 , thì $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$ có thể lấy giá trị $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4$, và hàm số này nhận ba giá trị khác nhau qua 24 hoán vị của bốn nghiệm đó. Do đó phương trình giải được của phương trình bậc bốn là một phương trình bậc ba. Tuy nhiên, khi thực hiện phân tích này cho phương trình bậc năm, Lagrange lại tìm được phương trình giải được bậc sáu.

Mặc dù không thành công trong việc giải quyết vấn đề khả năng giải được bằng đại số phương trình bậc năm, nhưng công trình của Lagrange là một cột mốc lịch sử. Đó là lần đầu tiên tính kết hợp được thực hiện giữa các nghiệm của một phương trình đa thức và các hoán vị của các nghiệm đó. Nghiên cứu các hoán vị của các nghiệm của một phương trình là nền tảng của lý thuyết tổng quát của Lagrange về các phương trình đại số. Mặt khác, ông cũng chứng tỏ rằng k chia hết $n!$ là nguồn gốc của định lý Lagrange trong lý thuyết nhóm. Mặc dù Lagrange nói về các hoán vị mà không xem xét sự hợp thành hay tính đóng của chúng, nhưng được xem là phôi thai của khái niệm nhóm hiện diện trong công trình của ông.

Gauss với dạng toàn phương nhị phân: Năm 1801, Gauss đã tóm tắt và thống nhất phần lớn lý thuyết số trước đó trong tác phẩm của ông với tựa đề: "*Disquisitiones Arithmeticae*". Công trình này đề ra các hướng nghiên cứu mới làm các nhà toán học bận rộn trong suốt một thế kỷ sau đó. Xét về mặt tác động trên lý thuyết nhóm, "*Disquisitiones Arithmeticae*" có thể được nói đã mở đầu lý thuyết nhóm Abel hữu hạn. Thật vậy, Gauss đã thiết lập nhiều tính chất quan trọng của nhóm Abel mà không sử dụng bất kỳ thuật ngữ nào của lý thuyết nhóm. Các nhóm này xuất hiện trong bốn hình thức khác nhau: nhóm cộng các số nguyên modulo m , nhóm nhân các số nguyên nguyên tố với m modulo m , nhóm các lớp tương đương của các *dạng toàn phương nhị nguyên*, (một dạng toàn phương nhị nguyên là một biểu thức có dạng $ax^2 + bxy + cy^2$ với a, b, c là các số nguyên), và nhóm các căn bậc n của đơn vị. Mặc dù các ví dụ này xuất hiện trong ngữ cảnh lý thuyết số, nhưng Gauss đã xử lý chúng như các nhóm Abel bằng cách sử dụng những gì chính là nguyên mẫu của các chứng minh đại số hiện đại.

Chẳng hạn, Gauss chứng tỏ rằng tất cả các số nguyên khác không modulo p (p là số nguyên tố) là lũy thừa của một phần tử đơn, nghĩa là nhóm Z_p^* của các số nguyên như thế là nhóm cyclic. Hơn nữa, ông chứng tỏ rằng số phần tử sinh của nhóm này bằng $\phi(p - 1)$, trong đó ϕ là hàm ϕ - Euler. Cho phần tử bất kỳ của Z_p^* , ông định nghĩa bậc của phần tử (không sử dụng thuật ngữ) và chứng tỏ rằng bậc của một phần tử là ước của $p - 1$. Sau đó ông sử dụng kết quả này để chứng minh "định lý nhỏ" của Fermat, phát biểu rằng $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ nếu p không chia hết a , như vậy dùng các ý tưởng lý thuyết nhóm để chứng minh các kết quả lý thuyết số. Tiếp theo, ông đã chứng tỏ rằng nếu t là một số nguyên dương chia hết $p - 1$, thì tồn tại một phần tử của Z_p^* có bậc là t , về cơ bản là định lý đảo của định lý Lagrange đối với nhóm cyclic.

Bài toán biểu diễn các số nguyên bằng các dạng toàn phương nhị nguyên xuất phát từ các nghiên cứu của Fermat vào thế kỷ 17. Định lý của ông phát biểu rằng mọi số nguyên tố dạng $4n + 1$ có thể được biểu diễn như tổng của hai bình phương $x^2 + y^2$.



Hình 1. Năm giai đoạn hình thành và phát triển khái niệm nhóm

Gauss đã dành phần lớn của tác phẩm “*Disquisitiones Arithmeticae*” cho một nghiên cứu đầy đủ các dạng toàn phương nhị nguyên và biểu diễn các số nguyên bằng chúng. Ông định nghĩa một phép cộng trên các dạng toàn phương nhị nguyên và chú thích rằng nếu K và K^1 là hai dạng đó thì ta có thể ký hiệu tổng của chúng là $K + K^1$. Sau đó ông chứng tỏ rằng tổng của chúng có tính kết hợp và giao hoán, tồn tại phần tử đơn vị, và mỗi dạng có một nghịch đảo, do đó thoả mãn mọi tính chất của một nhóm Abel. Tuy nhiên, mặc dù có những hiểu biết sâu sắc đáng chú ý này, không nên suy

luận rằng Gauss đã có khái niệm của một nhóm trừu tượng, hoặc thậm chí của một nhóm Abel hữu hạn.

Galois và Cauchy với các hoán vị: Galois là người đầu tiên sử dụng thuật ngữ “nhóm” theo nghĩa kỹ thuật để chỉ tập hợp các hoán vị đóng dưới phép nhân: “nếu trong cùng một nhóm có các phép thế S và T thì chắc chắn có phép thế ST ”. [20, tr. 111]

Ông nhận ra rằng các tính chất quan trọng nhất của một phương trình đại số được phản ánh trong các tính chất nào đó của một nhóm được kết hợp một cách duy nhất với phương trình mà ông gọi là “nhóm của phương trình”. Galois định nghĩa nhóm của một phương trình như sau:

“Cho trước một phương trình có m nghiệm là $a, b, c, \dots$ Sẽ luôn có một nhóm các hoán vị của các chữ $a, b, c, \dots$ có tính chất sau:

- 1) mọi hàm nghiệm bất biến dưới các phép thế của nhóm đều là hàm hữu tỷ.
- 2) ngược lại, mọi hàm nghiệm được biểu diễn như hàm hữu tỷ đều bất biến dưới các phép thế này” [12, tr. 80].

Người có đóng góp lớn cho lý thuyết hoán vị trong nửa đầu thế kỷ 19 là Cauchy. Trong hai bài báo lớn năm 1815 và 1844, ông đã mở đầu lý thuyết nhóm hoán vị như một chủ đề độc lập. Trong các công trình này, Cauchy đưa ra sự phát triển mang tính hệ thống đầu tiên của chủ đề nhóm hoán vị. Trong bài báo năm 1815, Cauchy không sử dụng tên đặc biệt cho tập hợp các hoán vị đóng dưới phép nhân. Tuy nhiên, ông đã nhận ra tầm quan trọng của chúng và đặt tên cho số các phần tử trong một tập đóng là “số chia biểu hiện”. Trong bài báo năm 1844, ông định nghĩa khái niệm nhóm các hoán vị sinh bởi một số phần tử nào đó:

“Cho một hay nhiều hơn các phép thế bao hàm một số hay tất cả các phần tử $x, y, z, \dots$ Tôi gọi tích của các phép thế này với chính chúng hay với bất kỳ một phép thế khác theo thứ tự tùy ý là phép thế dẫn xuất. Các phép thế đã cho cùng với các phép thế dẫn xuất tạo thành cái mà tôi gọi là một hệ các phép thế liên hợp.” [17, p.65]

Cayley với sự trừu tượng hóa lý thuyết nhóm: Một trong những phát triển đã đóng góp chính cho sự định hình khái niệm nhóm chính là Cayley (1821 – 1895). Trong một bài báo ngắn của ông tựa đề “Chú thích về Lý thuyết hoán vị” vào năm 1849 cho thấy rằng chính vào thời điểm đó, hay có lẽ sớm hơn, ông đã cố ý kết nối các ý tưởng của ông với các ý tưởng của Cauchy về hoán vị. Ông là nhà toán học đầu tiên trong lịch sử đã gợi ý rằng các nhóm có thể được biểu diễn một cách trừu tượng bằng bảng cấu thành nhóm và ông cũng chính là người đầu tiên đã đưa ra một định nghĩa tổng quát cho nhóm.

Các lợi ích toán học của Cayley bị ảnh hưởng mạnh mẽ bởi tình trạng chung của các nhà toán học Anh. Suốt thế kỷ 18, nền Toán học Anh bị cắt đứt khỏi lục địa châu Âu một phần là do tranh cãi ưu tiên liên quan đến phát minh phép tính tích phân của Gottfried Leibniz (1646-1716) và Isaac Newton (1643-1727). Bên lục địa, các kỹ thuật vi phân và ký pháp của Leibniz đã cho phép các nhà toán học có những bước tiến quan trọng trong sự phát triển tích phân, trong khi đó, ngược lại, nền toán học Anh lại bị trì trệ.

Tuy nhiên, vào đầu thế kỷ 19, bắt đầu có những thay đổi trong xã hội Anh là thành quả của Cách mạng Công nghiệp, và vai trò của các trường đại học trong việc thúc đẩy nghiên cứu và khoa học trở thành chủ đề quan tâm.

Năm 1812, Hiệp hội “*The Analytic Society*” được thành lập bởi một nhóm nhà toán học tại Cambridge. Khi các thành viên của Hiệp hội này bắt đầu du nhập các phương pháp thao tác trên các ký hiệu của lục địa châu Âu vào chương trình giảng dạy đại học, thì các mối quan tâm về nền tảng của đại số xuất hiện, bao gồm các câu hỏi về nghĩa của số âm và số ảo. Khái niệm *đại số biểu tượng* đã được phát triển để đáp lại những câu hỏi này và do đó đại số biểu tượng phần lớn là một sản phẩm của nền toán học Anh.

“Trái ngược với “*Đại số số học*” suy ra các luật của nó từ nghĩa thực sự của các phép toán trên các số, một “*Đại số biểu tượng*” bắt đầu với các luật hình thức cho một tập hợp cho trước các ký hiệu và các phép toán, và chỉ sau đó mới diễn giải chúng trong ý nghĩa cụ thể”. [2, tr. 38]

Năm 1854 Cayley, trong bài báo tựa đề “*Một nghiên cứu về lý thuyết nhóm như một sự phụ thuộc vào phương trình đặc trưng $\theta^n = 1$* ”, đã đưa ra định nghĩa trừu tượng đầu tiên của nhóm hữu hạn trong đó có thể hiện tính “đóng” của phép toán và sự hiện diện của phần tử 1 (đơn vị). Cayley định nghĩa một nhóm và giới thiệu bảng cấu thành nhóm như sau:

“Một tập hợp các ký hiệu 1, α , β ,... các phần tử khác nhau, và sao cho tích của bất kỳ hai trong các phần tử đó (không quan trọng thứ tự) hay tích của một trong các phần tử với chính nó, thuộc về tập hợp, được gọi là một nhóm. Sau đó, nếu toàn bộ nhóm được nhân với bất kỳ một ký hiệu, hoặc với nhân tử xa hơn hay nhân tử gần hơn, hiệu quả chỉ đơn giản là tái tạo nhóm, hay tương tự nếu các ký hiệu của nhóm được nhân với nhau để tạo thành một bảng, do đó:

		<i>Nhân tử xa hơn</i>			
		1	α	β	...
<i>Nhân tử gần hơn</i>	1	1	α	β	...
	α	α	α^2	$\beta\alpha$	
	β	β	$\alpha\beta$	β^2	
	$\vdots$				

Bảng 1. Bảng cấu thành nhóm

Mỗi hàng cũng như mỗi cột của hình vuông sẽ chứa tất cả các ký hiệu 1, α , β , ... Cũng sau đó tích của một số bất kỳ các ký hiệu, với hay không với sự lặp lại, trong bất kỳ thứ tự nào, là một ký hiệu của nhóm” [20, p.231]

Định nghĩa nhóm của Cayley không khác biệt hoặc mâu thuẫn với bất kỳ công trình nào trước đó của các nhà toán học. Điều này có thể thấy được trong các định nghĩa khác nhau của nhóm. Chúng giống nhau về mặt trừu tượng, nhưng vào thời điểm đó, chúng biểu thị cho các phép ngoại suy cụ thể khác nhau riêng biệt cho một môn học nhất định trong toán học. Khái niệm nhóm của Cayley, giống như đại số biểu tượng, không biểu thị cho bất cứ điều gì, và có thể được áp dụng cho hầu hết mọi thứ.

Tuy nhiên, định nghĩa trừu tượng của nhóm của Cayley đã không thu hút sự chú ý các nhà toán học vào thời điểm đó mặc dù ông thực sự nổi tiếng. Rõ ràng cộng đồng toán học không chuẩn bị cho sự trừu tượng hóa đó: nhóm hoán vị là các nhóm duy nhất được nghiên cứu nghiêm túc, và tổng quát hơn, tiếp cận hình thức toán học vẫn còn trong thời kỳ thơ ấu. Những công trình nghiên cứu của Caley đã phải mất một thời gian

dài để các nhà toán học đương thời, đặc biệt là Hamilton, chấp nhận vì đối với họ việc thao tác trên các ký hiệu toán học không có một ý nghĩa gì cả.

Sự ngập ngừng của các nhà toán học trong việc chấp nhận quan điểm trừu tượng hóa nhóm cho thấy rằng việc chuyển từ các nhóm cụ thể sang các nhóm trừu tượng và từ các nhóm trừu tượng sang khái niệm tổng quát của nhóm có thể là khó khăn cho sinh viên.

Mãi đến một phần tư thế kỷ sau, trong bốn bài báo ngắn năm 1878 về lý thuyết nhóm, Cayley quay trở lại quan điểm trừu tượng mà ông đã tiếp nhận vào năm 1854. Trong đó, ông công bố bài toán khái quát tìm tất cả các nhóm có bậc cho trước và chứng tỏ rằng bất kỳ nhóm hữu hạn đều đẳng cấu với một nhóm các hoán vị.

“Ông tin chắc rằng cách tiếp cận tốt nhất đối với lý thuyết nhóm là xem xét một vấn đề chung trong chủ nghĩa biểu tượng trừu tượng và sau đó suy ra từ nó các lý thuyết nhóm cụ thể” [14, tr. 32]. Nhiều nhà toán học đã đồng ý với tầm nhìn của Cayley về một lý thuyết nhóm được tái tạo và được định nghĩa lại một cách trừu tượng. Chẳng hạn, Von Dyck đã nhìn thấy nhóm như là “các phép toán rời rạc được áp dụng cho một đối tượng nhất định, trong khi bỏ qua hình thức biểu thị cụ thể của các hoạt động riêng biệt, xem chúng như được đưa ra chỉ dựa trên các tính chất cần thiết cho việc xây dựng nhóm” [20, tr. 240].

Sau hơn một trăm năm kiểm tra tính thực tiễn của việc sử dụng tư tưởng lý thuyết nhóm, một sự chuyển đổi trừu tượng hoàn chỉnh diễn ra và bây giờ sẽ mô tả các khái niệm cơ bản của một nhóm và các tiên đề xác định chúng. Bốn tiên đề này chủ yếu xuất phát từ các tác phẩm của Klein và Lie. Họ xây dựng ý nghĩa của lý thuyết nhóm cho các lĩnh vực khác nhau của toán học.

Klein và Lie với các phép biến đổi: Năm 1872, Klein, trong bài thuyết giảng nổi tiếng và có tầm ảnh hưởng lớn của mình với tựa đề “*A comparative Review of Researches in Geometry*”, nhân dịp ông được nhận vào giảng dạy tại Đại học Erlangen, đã trình bày sự phân loại hình học nghiên cứu các bất biến dưới các nhóm phép biến đổi khác nhau. Trong đó các nhóm xạ ảnh, nhóm chuyển động rắn, nhóm các phép đồng dạng, nhóm hyperbolic, nhóm eliptic, và các hình học liên kết với chúng.

Năm 1874, Lie giới thiệu lý thuyết tổng quát của nhóm các phép biến đổi liên tục mà ngày nay được gọi là nhóm Lie. Một nhóm như thế được mô tả bởi các phép biến đổi $x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, trong đó f_i là hàm giải tích theo x_i và a_i (a_i là tham số, x_i và a_i là thực hay phức). Chẳng hạn, các phép biến đổi được cho bởi $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, trong đó a, b, c, d là các số thực và $ad - bc \neq 0$, xác định một nhóm các phép biến đổi liên tục.

Weber và Von Dyck với định nghĩa nhóm đầy đủ: Một nhà toán học khác đã phát triển quan điểm trừu tượng trong khái niệm nhóm, tổng quát hơn là trong đại số, chính là H. Weber.

Năm 1882, trong một bài báo quan trọng, Weber đưa ra một định nghĩa hiện đại của nhóm trừu tượng hữu hạn: “*Một hệ thống G có h phần tử khác nhau $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_h$ được gọi là nhóm cấp h nếu thỏa mãn những điều kiện sau:*

1. Bằng một quy tắc nào đó ta có thể xác định cái hợp thành (hay toán nhân) của bất kỳ hai phần tử trong hệ thống và phần tử mới được suy ra đó cũng là một phần tử trong hệ thống, ta ký hiệu $\theta_i \theta_j = \theta_k$

2. Điều kiện sau luôn đúng: $(\theta_r \theta_s) \theta_t = \theta_r (\theta_s \theta_t) = \theta_r \theta_s \theta_t$.

3. Từ $\theta \theta_r = \theta \theta_s$ hay $\theta_r \theta = \theta_s \theta$ ta suy ra $\theta_r = \theta_s$ [18, tr.210].

Định nghĩa của Weber khá gần với khái niệm nhóm ngày nay nhưng lưu ý rằng Weber chỉ mới định nghĩa cho nhóm hữu hạn.

Cùng thời với Weber, W. Von Dyck trong một bài báo quan trọng và mang tầm ảnh hưởng với tựa đề “*Group-theoretic studies*” đã định nghĩa nhóm bao gồm cả hai trường hợp hữu hạn và vô hạn và đưa ra thuật ngữ “*phần tử sinh*”. Von Dyck lần đầu tiên đã gộp chung và kết hợp một cách có ý thức mọi nguồn gốc lịch sử của lý thuyết nhóm trừu tượng trong các lĩnh vực đại số, lý thuyết số, hình học và giải tích.

Ông xây dựng nhóm tự do với n phần tử sinh và chứng tỏ rằng mọi nhóm được sinh hữu hạn là nhóm thương của một nhóm tự do có hạng hữu hạn.

Điểm quan trọng trong định nghĩa nhóm của Von Dyck là người đầu tiên đòi hỏi sự tồn tại phần tử nghịch đảo trong nhóm, Von Dyck (1883) viết “Chúng ta đòi hỏi cho các xem xét của chúng ta rằng một nhóm chứa phép toán T_k thì cũng phải chứa nghịch đảo của nó là T_k^{-1} ” [20, tr.243].

Wussing nhận định: “Khái niệm nhóm của V. Dyck đáp ứng được tất cả các yêu cầu đặt ra cho phương pháp trừu tượng phát triển toàn diện, nói chính xác là một định nghĩa theo tiên đề và việc đưa tất cả định nghĩa nhóm cụ thể vào cùng với nhau” [20, tr.243].

Séguier với bản chuyên khảo đầu tiên về lý thuyết nhóm: Mặc dù khái niệm nhóm trừu tượng đã được xây dựng đầy đủ vào cuối thế kỷ 19, nhưng các bản chuyên khảo lý thuyết nhóm dựa trên khái niệm nhóm trừu tượng đã không xuất hiện cho đến đầu thế kỷ 20. Sự xuất hiện của bản chuyên khảo đầu tiên của Séguier năm 1904 với tựa đề: “*Elements of the Theory of Abstract Group*” đánh dấu sự ra đời của lý thuyết nhóm trừu tượng. Sách chuyên khảo của Séguier bao gồm các thảo luận về phép đẳng cấu, đồng cấu, tự đẳng cấu, phân tích nhóm thành các tích trực tiếp, định lý Jordan-Holder, định lý đẳng cấu đầu tiên, nhóm Abel bao gồm định lý cơ bản, nhóm Hamilton, và p -nhóm.

3. Một số kết quả từ phân tích tri thức luận của khái niệm nhóm

3.1. Đặc trưng tri thức luận của khái niệm nhóm

Phân tích tri thức luận quá trình lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm nhóm cho thấy bốn tiên đề của khái niệm nhóm về tính kết hợp và tính đóng của phép toán hai ngôi, sự tồn tại của phần tử trung hòa và phần tử đơn vị là các điều kiện cần và đủ để cấu thành một nhóm. Từ đó cho phép chúng tôi xác định các đặc trưng tri thức luận của một khái niệm nhóm như sau:

- Tính đóng của phép toán hai ngôi;
- Tính kết hợp của phép toán hai ngôi;
- Tồn tại phần tử đơn vị;
- Tồn tại phần tử đối xứng.

3.2. Chương ngại liên quan khái niệm nhóm

Phân tích tri thức luận của khái niệm nhóm cho thấy các thành phần của khái niệm nhóm xuất hiện rải rác trong nhiều lĩnh vực Toán học khác nhau và tiến triển qua một thời gian dài hơn một thế kỷ và cuối cùng được hợp nhất trong định nghĩa của V. Dyck năm 1883. Riêng trong giai đoạn xuất hiện sự trừu tượng và giai đoạn củng cố khái niệm nhóm trừu tượng, trong các công trình của Cayley, Weber và Von Dyck, các đặc trưng của nhóm tổng quát được xây dựng bằng hệ thống biểu đạt ký hiệu và định nghĩa nhóm tổng quát theo hệ tiên đề phải trải qua gần 30 năm để được cộng đồng toán học chấp nhận và hoàn thiện dần.

Mặt khác, từ thực tế giảng dạy cho thấy sinh viên gặp nhiều lúng túng trong việc tiếp cận khái niệm nhóm và giải quyết các bài tập liên quan đến khái niệm nhóm. Chẳng hạn, trong phần thực nghiệm khảo sát trình bày ở mục 1.1.2 cho thấy sinh viên gặp một số khó khăn liên quan đến ký hiệu của khái niệm nhóm thương G/N và những khó khăn này gắn liền với những quan niệm mà họ đã có từ trước với khái niệm thương, đồng dư trong số học. Từ đó cho phép đặt ra cho các nhà đào tạo bậc đại học câu hỏi về các khó khăn liên quan chương ngại trừu tượng hóa khái niệm nhóm bằng hệ thống biểu đạt ký hiệu mà sinh viên phải đương đầu khi học tập khái niệm nhóm. Đó chính là các khó khăn từ việc chuyển từ nghiên cứu trên các tập hợp số cụ thể (các đối tượng được biểu đạt) sang việc nghiên cứu trên các hệ thống ký hiệu (các đối tượng biểu đạt).

4. Kết luận

Phân tích tri thức luận của khái niệm nhóm cho thấy khái niệm nhóm hình thành từ bốn nguồn: thứ nhất là đại số cổ điển, dẫn đến lý thuyết nhóm hoán vị; thứ hai là lý thuyết số, dẫn đến lý thuyết nhóm Abel; thứ ba và thứ tư là hình học và giải tích, dẫn đến lý thuyết nhóm biến đổi.

Quá trình trừu tượng hóa khái niệm nhóm bằng hệ tiên đề và hệ thống biểu đạt ký hiệu nhằm hợp nhất các "nhóm" riêng biệt, xuất hiện rải rác trong các lĩnh vực của toán học là một nhu cầu tất yếu và cần thiết.

Chịu sự ảnh hưởng của trào lưu chủ nghĩa biểu tượng trong toán học, Cayley là người đầu tiên đã thực hiện sự trừu tượng hóa lý thuyết nhóm nhằm mục đích kết nối sâu sắc giữa các lĩnh vực khác nhau của toán học: đại số cổ điển, lý thuyết số, hình học và giải tích. Tuy nhiên, điều kiện cần thiết để đồng hóa các khái niệm trừu tượng hóa là mức độ trưởng thành và kinh nghiệm về toán học. Vì thế, vấn đề sinh viên gặp phải các khó khăn trong tiếp cận khái niệm nhóm khi chuyển từ việc thao tác trên các tập hợp số cụ thể sang việc thao tác trên các hệ thống biểu đạt ký hiệu là điều không thể tránh khỏi.

Sự xuất hiện của khái niệm nhóm trừu tượng là một quá trình tiến triển rất chậm. Phải mất hơn một trăm năm, kể từ thời điểm công trình lý thuyết nhóm ngầm ẩn của Lagrange năm 1770, để khái niệm nhóm trừu tượng tiến triển đến đầu thế kỷ 20. E. T. Bell (1945) phân biệt một số giai đoạn trong quá trình tiến hóa này theo hướng trừu tượng hóa và tiên đề hóa:

“Toàn bộ sự phát triển đòi hỏi khoảng một thế kỷ. Sự tiến triển của khái niệm nhóm là đặc trưng của sự tiến triển của bất kỳ lĩnh vực toán học lớn của giai đoạn gần

đây; trước tiên, phát hiện ra các hiện tượng biệt lập, sau đó thừa nhận một số tính năng chung cho tất cả, tiếp theo là việc tìm kiếm thêm các trường hợp cá biệt, tính toán chi tiết và phân loại chúng; sau đó xuất hiện các nguyên tắc tổng quát tính toán thêm không cần thiết, ngoại trừ khi cần thiết cho một số ứng dụng nhất định; và cuối cùng là sự hình thành các định đề kết tinh cấu trúc của hệ thống được nghiên cứu dưới dạng trừu tượng.” [13, tr. 207].

Theo sự phân chia giai đoạn ở trên, trước tiên các hiện tượng biệt lập là các hoán vị, dạng toàn phương nhị nguyên, căn của đơn vị; sau đó thừa nhận các tính năng chung là khái niệm nhóm hữu hạn, bao gồm cả hai nhóm hoán vị và Abel hữu hạn; tiếp theo tìm kiếm thêm các trường hợp cá biệt là nhóm biến đổi; và cuối cùng là hình thành các định đề của một nhóm, bao gồm cả nhóm hữu hạn và vô hạn.

Các kết quả của phân tích tri thức luận của nhóm đặt ra câu hỏi về cách tiếp cận lý thuyết nhóm như thế nào để có thể giúp sinh viên vượt qua các khó khăn liên quan đến chương ngại trừu tượng hóa khái niệm nhóm bằng hệ thống biểu đạt ký hiệu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Artigue, M. (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol.10, No.3, 241-286.
2. Barnett, J. (2010). *Abstract awakenings in algebra: Early group theory in the works of Lagrange, Cauchy, and Cayley*. Colorado State University.
3. Bell, E. T. (1945). *The development of Mathematics*. McGraw Hill.
4. Bessot, A., & Comiti C., & Lê Thị Hoài Châu, & Lê Văn Tiến (2009). *Những yếu tố cơ bản của didactic Toán*. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh.
5. Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198.
6. Cayley, A. (1889). *The Collected Mathematical Papers*, Vol. 2, Cambridge.
7. De Serres, M., & Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages*. Montréal: Collège Jean-de-Brébeuf.
8. Duval, R. (1993). Registre de representation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol.5, 37-65, IREM de Strasbourg.
9. Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
10. Hoàng Xuân Sính (Chủ biên) – TRẦN Phương Dung. (2003). *Đại số đại cương*. NXB Đại học Sư Phạm.
11. Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics – An Introduction*. 3rd Edition, Pearson Education, Inc.
12. Kiernan, B. M. (1971/72). *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Arch. Hist. Ex. Sc., 8, 40 – 154.

13. Kleiner, I. (1986). The Evolution of Group Theory: A Brief Survey. *Mathematics Magazine*, Vol.59, No.4, 195-215.
14. Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. Birkhauser: Boston.
15. Lewis, J. (2013). *An Analyse of Students' Difficulties in Learning Group Theory*. Concordia University, Montreal, Quebec, Canada. Thesis in The Department of Mathematics and Statistics.
16. Lê Thị Hoài Châu, & Lê Văn Tiến. (2003). *Vai trò của phân tích khoa học luận lịch sử toán học trong nghiên cứu và thực hành dạy – học môn toán*. Đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ, Mã số B2001-23-02.
17. Lichtenberg, D. R. (1966). *The Emergence of Structure in Algebra*. Doctoral Dissertation. Univ. Of Wisconsin.
18. Merzbach, U. (1964). *Development of Modern Algebraic Concepts from Leibniz to Dedekind*. Doctoral Dissertation, Havard Univ.
19. Mili, R. I. (2016). *Identification d'obstacles et de difficultés inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite*. Université de Montréal. Mémoire présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès arts en sciences de l'éducation, option didactique.
20. Wussing, H. (1984). *The Genesis of the Abstract Group Concept*, M.I.T. Press. (Translation by Abe Shenitzer of the 1969 German Edition).

CÁC HƯỚNG TIẾP CẬN VÀ ÍCH LỢI CỦA PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN: TRƯỜNG HỢP NGHIÊN CỨU “BIỂU DIỄN PHỐI CẢNH”

*Tăng Minh Dũng**

Tóm tắt

Theo một lối tiếp cận “kinh điển”, các nghiên cứu tri thức luận trên một tri thức toán thường được triển khai bằng cách nghiên cứu các tài liệu toán trong lịch sử liên quan đến tri thức này. Tuy nhiên, vì nhiều lý do, các tài liệu này không phải dễ tiếp cận, đặc biệt tại các quốc gia mà toán học không có một bề dày nghiên cứu lâu đời. Trong trường hợp này, người nghiên cứu cần một (những) cách tiếp cận khác, khả dĩ có thể cho phép đưa đến một phân tích “tương đối” liên quan đến sự hình thành và tiến triển của tri thức, những cách tiếp cận, quan niệm gắn liền với nó, mối liên hệ của nó với các tri thức khác. Bài viết này trình bày một phân tích tri thức luận trên đối tượng tri thức “biểu diễn phối cảnh” dựa trên 2 hướng tiếp cận: nghiên cứu tổng quan các kết quả nghiên cứu (đặc biệt là của các nhà nghiên cứu didactic) và nghiên cứu lịch sử dạy học (trên tập các chương trình và sách giáo khoa tại hai nước: Pháp, Việt). Từ đó, bài viết chỉ ra ích lợi của phân tích tri thức luận đối với một nghiên cứu didactic với việc làm tiến triển hệ thống các câu hỏi nghiên cứu, bằng cách làm rõ các đặc trưng, các cách tiếp cận có thể trong dạy học “biểu diễn phối cảnh”.

Từ khoá: phân tích tri thức luận, biểu diễn phối cảnh, lịch sử dạy học.

Résumé

Selon une approche “classique”, l’étude épistémologique d’un savoir mathématique est développée par l’étude des documents mathématiques dans l’histoire liés à ce savoir. Cependant, l’accès de ces documents est, pour de nombreuses raisons, fréquemment difficile, surtout dans les pays qui ne possèdent pas une “épaisseur de mathématiques”. Dans ce cas, les chercheurs ont besoin d’une autre (ou d’autres) approche qui permet d’accéder une analyse “relative” sur la genèse et l’évolution du savoir, les approches et les conceptions liées à celui-ci, sa liaison à d’autres savoirs. Cette communication présente une analyse épistémologique sur le savoir de “représentation en perspective” selon deux approches : synthèse des travaux de références (des didacticiens) et étude de l’histoire d’enseignement (sur un ensemble des programmes, des manuels français et vietnamiens). Par cela, elle montre les apports d’une analyse épistémologique pour l’évolution des questions de recherche en mettant en évidence les caractéristiques, les approches possibles dans l’enseignement de la représentation en perspective.

Mots-clés: analyse épistémologique, représentation en perspective, histoire d’enseignement

1. Đặt vấn đề

Như một cây to có nhiều nhánh cây, khi nói đến nghiên cứu trong khoa học giáo dục, người ta có thể nói đến nhiều cách tiếp cận khác nhau. Trong số đó, trường phái Didactic toán (Pháp) hướng quan tâm của mình đến “việc xây dựng tri thức toán học, đến hoạt động và những điều kiện của việc học tập các kiến thức trong môn học này” (Bessot và cộng sự, 2009, tr. 23). Những nghiên cứu của Didactic toán “khởi thế” từ những hiểu biết tường tận và sâu sắc về một tri thức toán; dựa trên những hiểu biết này, nhiều hướng nghiên cứu có thể triển khai sau đó, chẳng hạn như xem xét sự vận hành

* TS, Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

của nó trong các bối cảnh, hệ thống, môi trường dạy học khác nhau. Thế nhưng, làm thế nào để có thể đạt đến những hiểu biết như thế, khi mà, mọi nhà nghiên cứu didactic đều phải trải qua quãng đời học sinh, sinh viên mà ở đó, những kiến thức mà họ đạt được (quan hệ cá nhân) phải tuân theo những ràng buộc của thể chế dạy học mà họ đang gia nhập (quan hệ thể chế)? Nghiên cứu tri thức luận (*étude épistémologique*) là một giải pháp để họ có thể “đột phá” các ràng buộc này. Nó nhắm đến việc làm rõ:

- nghĩa của tri thức, những bài toán, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết và vị trí của nó trong một mạng tri thức rộng hơn;
- những bước nhảy trong quan niệm, những điều kiện, và cả những trở ngại cho sự hình thành tri thức;
- những quan niệm có thể gắn liền với tri thức.

(Bessot và cộng sự, 2009, tr.263)

Thế nhưng, so với các đồng nghiệp tại phương Tây, các nhà nghiên cứu didactic tại Việt Nam gặp những trở ngại rất lớn khi tiến hành các nghiên cứu tri thức luận. Thật vậy, những nghiên cứu gốc này cần đến việc hồi cứu các cứ liệu lịch sử liên quan đến sự hình thành và tiến triển của tri thức. Tại Việt Nam, làm thế nào có thể tiếp cận các tài liệu này, khi mà phần đông các tri thức toán được giảng dạy trong nhà trường hiện nay đều có nguồn gốc từ nước ngoài. Mặt khác, do sự phức tạp và đồ sộ của nghiên cứu tri thức luận, những nghiên cứu loại này thường rất hiếm hoi. Trong bối cảnh đó, bài viết này sẽ trình bày những giải pháp để có thể giải quyết được phần nào các khó khăn nói trên; đồng thời, bài viết sẽ minh họa việc sử dụng những giải pháp nói trên trong một trường hợp nghiên cứu cụ thể: “biểu diễn phối cảnh”.

2. Phương pháp luận

Trong phần này, bài viết đề cập đến hai cách thức nghiên cứu tài liệu để các nhà nghiên cứu didactic tại Việt Nam có thể khai thác các kết quả tri thức luận và triển khai chúng trong các nghiên cứu didactic tiếp theo của bản thân, phù hợp với bối cảnh dạy học ở Việt Nam.

Trong cách thức thứ nhất, nhà nghiên cứu tiến hành một nghiên cứu tổng quan về “nghĩa” của tri thức trong các công bố về tri thức luận của các nhà nghiên cứu khác, đặc biệt là của các nhà nghiên cứu didactic toán. Thuật ngữ “nghĩa của tri thức” ở đây không chỉ đơn thuần là định nghĩa toán học của nó được công bố trong cộng đồng, mà sâu hơn, đó là những hiểu biết của người đương thời về tri thức đó. Cụ thể, nhà nghiên cứu cần quan tâm đến:

- bối cảnh, tình huống mà tri thức xuất hiện ở đó như một công cụ. Vấn đề, bài toán mà nhà nghiên cứu cần xem xét có thể không chỉ gói gọn trong phạm vi toán học, mà còn có thể là những tình huống ngoài toán học, trong các phân môn khoa học khác;
- những quan niệm gắn với tri thức. Những quan niệm này có thể thay đổi theo thời gian hoặc không gian. Việc làm rõ các động lực và trở ngại cho sự tiến triển (và cả bước lùi) của tri thức cũng là những điểm cần làm rõ;
- những tri thức có liên quan đến tri thức đang xét. Đó có thể là những tri thức cần có để đưa đến tri thức đang xét, hoặc những tri thức có thể dẫn xuất từ tri thức đang

xét. Nhìn rộng hơn, nhà nghiên cứu cần xác lập vị trí của tri thức này trong mạng lưới các tri thức khác.

Những hiểu biết nói trên không phải chỉ được bắt đầu khi tri thức được trao cho một “khai sinh” chính thức: tên gọi, định nghĩa (cơ chế toán học) mà chúng còn có thể đã tồn tại từ trước đó, khi mà tri thức thậm chí còn chưa có tên gọi, định nghĩa (cơ chế tiền toán học), hoặc chỉ mới được gọi tên, nhưng chưa có một định nghĩa toán học chặt chẽ (cơ chế cận toán học).

Lưu ý rằng, các tài liệu lịch sử toán là một nguồn tài nguyên quý giá trong các nghiên cứu tri thức luận; tuy nhiên, cần tránh khuynh hướng chỉ liệt kê sự kiện lịch sử (“vào thời gian nào đó, đã có chuyện gì xảy ra”) mà cần phải đi sâu, tập trung vào các câu hỏi về “nghĩa” của tri thức như đã trình bày ở trên.

Trong cách thức thứ hai, nhà nghiên cứu tiến hành một điều tra về lịch sử dạy học tri thức đó. Các tài nguyên cần cho một cuộc điều tra như thế có thể được tiếp cận trong bối cảnh Việt Nam; đó là các tài liệu học đường (chương trình, sách giáo khoa, sách giáo viên...) ở các cấp, bậc học khác nhau, ở các thời gian khác nhau, tại các nền giáo dục khác nhau. Cách tiếp cận này có thể được giải thích từ lý thuyết chuyển hoá sư phạm (Chevallard, 1991), mà theo đó, tri thức cần giảng dạy trong trường học (*savoir à enseigner*) là kết quả của việc biến đổi một tri thức bác học (*savoir savant*). Do đó, tri thức cần giảng dạy trong học đường chứa đựng trong nó những dấu vết của tri thức “gốc” ban đầu, và việc điều tra dấu vết dạy học tri thức này trong một tập hợp “đủ nhiều” các tài liệu học đường nói trên theo quan điểm so sánh thể chế (Bessot và Comiti, 2013) – đồng đại và cả lịch đại - sẽ cho chúng ta thấy được phần nào các đặc trưng tri thức luận của nó.

Trong phần tiếp theo, bài viết sử dụng 2 cách thức nói trên, tạm gọi là “điều tra tri thức luận”, để nghiên cứu trường hợp tri thức “biểu diễn phối cảnh”.

3. Một ví dụ: Trường hợp nghiên cứu “biểu diễn phối cảnh”

Khác với các đối tượng như hàm số, phương trình, đạo hàm, tích phân, vector, phép biến hình,... vốn được thừa nhận rộng rãi là các tri thức toán học, được giảng dạy chính thống trong nhà trường, sự xuất hiện của đối tượng “biểu diễn phối cảnh” trong dạy học không nói lên việc nó là đối tượng của toán học, hoặc là đối tượng của việc dạy học – theo nghĩa người ta định nghĩa và (hoặc) nghiên cứu các tính chất của nó. Bởi thế, việc nghiên cứu tri thức “biểu diễn phối cảnh” cần bắt đầu với các câu hỏi:

Biểu diễn phối cảnh có phải là đối tượng tri thức toán hay đối tượng dạy học không? Nếu có, nó được định nghĩa, tiếp cận như thế nào?

Để trả lời các câu hỏi này, Tang (2014) đã tiến hành một điều tra tri thức luận theo 2 cách thức đã trình bày ở mục 2 và dưới đây là một số kết quả nghiên cứu chính.

Kết quả từ nghiên cứu tổng quan dựa trên các công trình của các nhà didactic toán

Trong lịch sử, biểu diễn phối cảnh xuất hiện khá sớm do nhu cầu giao tiếp (chẳng hạn, trong hội hoạ, trong các bản vẽ xây dựng pháo đài, nhà thờ...). Tuy nhiên, vào thời điểm ban đầu, nó không phải là một lý thuyết với các quy tắc toán học, mà dựa trên sự *quan sát* với ý đồ “bảo toàn” tốt nhất có thể những gì nhìn thấy hoặc tưởng

tượng (Bautier và cộng sự, 1988). Sau đó, người ta định nghĩa nó qua khái niệm *phép chiếu*. Nói cách khác, phép chiếu là cái lõi toán học của biểu diễn phối cảnh. Từ đây, việc biểu diễn phối cảnh có thể được thực hiện theo nhiều cách khác nhau, tùy thuộc vào phép chiếu được chọn làm cơ sở và số lượng hình vẽ biểu diễn. Tiếp theo đây, bài viết phân tích những ưu nhược điểm của một số cách biểu diễn phẳng thường gặp (đối tượng chủ yếu trong dạy học toán ở bậc trung học).

Như đã nói ở trên, người ta có thể biểu diễn một đối tượng hình học trong không gian bằng cách sử dụng nhiều hình vẽ cùng lúc, chẳng hạn như các hình vẽ kỹ thuật (góc nhìn từ 6 mặt của 1 đối tượng). Tuy nhiên, do rất khó để có thể tổng hợp các hình vẽ (góc nhìn) này để hình dung một đối tượng ba chiều duy nhất mà chúng biểu diễn, người ta ưu tiên trong dạy học các biểu diễn phối cảnh qua một hình vẽ (Audibert, 1992).

Trong số các biểu diễn phối cảnh, phối cảnh đường nét (*perspective linéaire*) cho ra một hình vẽ gần với thực tế nhất. Chính vì thế, nó được sử dụng rất nhiều và sự ra đời của nó đánh dấu một bước tiến quan trọng trong hội họa (Thuillier, 1984). Thế nhưng, do lấy cơ sở là phép chiếu xuyên tâm (*projection linéaire*) – không bảo toàn tính chất song song và tỉ lệ (là những tính chất quan trọng mà học sinh thường làm việc) và sự phức tạp trong thực hiện, nên nó không phù hợp trong dạy học (Adrait và cộng sự, 2002).

Dường như, một phép phối cảnh được chấp nhận trong dạy học phải thỏa mãn ít nhất hai yêu cầu: trực giác và bảo toàn nhiều nhất có thể các tính chất hình học của đối tượng không gian. Thế nhưng, khó có thể để đáp ứng hoàn toàn cả hai yêu cầu trên cùng lúc. Để khả thi, người ta buộc phải giới hạn một phần của mỗi yêu cầu để đạt đến trạng thái cân bằng giữa “thấy” và “biết”. Phối cảnh song song (*perspective parallèle*) là một giải pháp thay thế cho phối cảnh đường nét (Parzysz, 1991). Thật vậy, từ mặt “biết”, phối cảnh song song bảo toàn tất cả các tính chất afin; và từ mặt “thấy”, sự “tương đồng” của phối cảnh song song với phối cảnh đường nét trong một số tình huống đặc thù (điểm nhìn ở rất xa) cho phép nó gọi lên đối tượng không gian từ hình vẽ (Bautier và cộng sự, 1988).

Để biến đổi một đối tượng hình học trong không gian sang mặt phẳng bằng phối cảnh song song, người ta có hai cách tiếp cận:

- bằng “phép chiếu song song”: với 2 đặc trưng (tham số): mặt phẳng chiếu và phương chiếu.
- bằng “lập phương tham chiếu”: với 2 đặc trưng (tham số): mặt phẳng “biểu diễn đúng” và bộ đôi góc tụ, tỷ số rút gọn.

Từ quan điểm toán học, hai cách tiếp cận này là tương đương, theo nghĩa ta có thể chuyển đổi các yếu tố đặc trưng giữa hai cách tiếp cận với nhau, và có thể nhận được cùng một hình vẽ với việc chọn lựa một cách thích đáng các tham số.

Liên quan đến biểu diễn phối cảnh, Pais và cộng sự (1991) còn đề cập đến các “hình mẫu”. Cùng một đối tượng hình học trong không gian và cùng một phép phối

cảnh, người ta có thể nhận được các hình biểu diễn khác nhau, ứng với các tham số phép chiếu khác nhau. Thế nhưng, một số hình trong số chúng sẽ được “ưa thích” hơn, vì chúng gợi lên được đối tượng không gian tốt hơn các hình khác. Từ đây, xuất hiện huynh hướng đồng nhất hình vẽ của một đối tượng hình học trong không gian với hình mẫu của nó.

Kết quả từ điều tra lịch sử dạy học

Việc điều tra được tiến hành dựa trên các tài liệu học đường tại Pháp và Việt Nam, nhằm bổ sung thêm các luận điểm về tri thức luận nói trên, và đặc biệt là cung cấp một cái nhìn phong phú hơn về các cách thức có thể để đưa tri thức biểu diễn phối cảnh vào nhà trường. Cuộc điều tra bao gồm 2 nghiên cứu:

- nghiên cứu các chương trình, để làm rõ thời điểm đưa vào biểu diễn phối cảnh (điều này cho phép xác định tập các sách giáo khoa cần tham khảo), những sự thay đổi nếu có trong dạy học nội dung này và các phép phối cảnh cần được dạy;
- nghiên cứu phần “lý thuyết” trong các sách giáo khoa được chọn, để tìm kiếm các chỉ dẫn vẽ hình, các ràng buộc đặt trên hình vẽ và khám phá các cách thức giới thiệu khái niệm phép phối cảnh có thể.

a) Biểu diễn phối cảnh trong chương trình Việt Nam

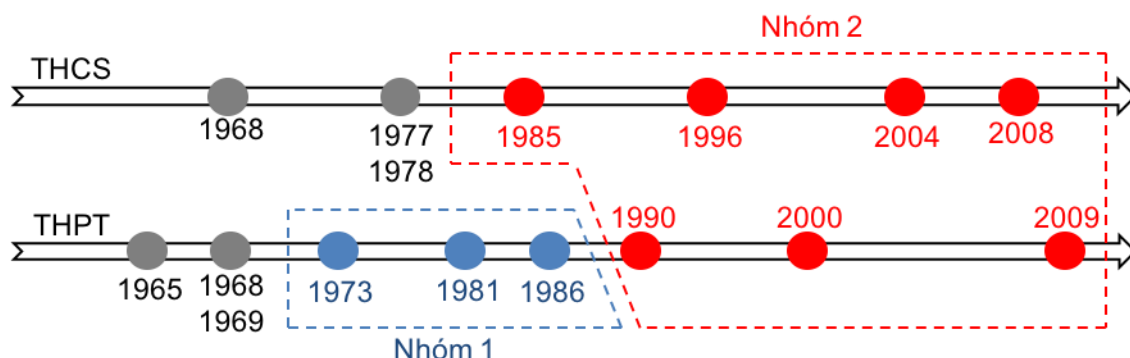
Trong ba chương trình toán Việt Nam gần đây nhất (1990, 2000, 2006), nội dung biểu diễn phối cảnh không có sự tiến triển: biểu diễn phối cảnh được dạy chính thức ở lớp 11 và được tiếp cận bằng phép chiếu. Các phân tích tiếp theo trên sách giáo khoa và sách giáo viên cho thấy các ràng buộc đặt trên hình vẽ: một là, bảo toàn sự thẳng hàng, song song, tỷ lệ (là các tính chất của phép chiếu song song); hai là, phải có khả năng gợi lên tính chất ba chiều của một đối tượng không gian thông qua việc lựa chọn một cách hợp lý mặt phẳng chiếu và phương chiếu.

b) Biểu diễn phối cảnh trong chương trình Pháp

Tiếp theo, bài viết trình bày về việc dạy học biểu diễn phối cảnh trong các chương trình toán tại Pháp từ năm 1965 đến nay. Ở trung học cơ sở, trong các chương trình 1968 và 1977-1978, vấn đề biểu diễn các đối tượng hình học không gian không được đề cập đến. Ở trung học phổ thông, mặc dù các chương trình 1965 và 1968-1969 có nhắc đến khái niệm phép chiếu, nhưng việc biểu diễn phối cảnh vẫn vắng mặt. Nó chỉ được dạy chính thức từ chương trình 1973 ở lớp 10 các ban C (Toán-Lý) và ban T (Công nghệ), với 2 cách biểu diễn: phối cảnh ước lệ (perspective cavalière) và hình học hoạ hình (géométrie descriptive). Hai cách biểu diễn này tiếp tục được sử dụng trong các chương trình 1981 và 1986 dưới dạng các chủ đề riêng biệt. Thế nhưng, *tại sao người ta lại cần đến 2 biểu diễn phối cảnh khác nhau trong cùng một lớp?*

Từ năm 1985, người ta đưa biểu diễn phối cảnh vào trung học cơ sở và từ đó, cấu trúc dạy học nội dung này khá ổn định (trong các chương trình 1996, 2004, 2008). Phép phối cảnh được lựa chọn là phối cảnh ước lệ và gắn liền với các khối hình học không gian: hình hộp chữ nhật (lớp 6), hình lăng trụ, hình trụ tròn xoay (lớp 7), hình chóp, hình nón tròn xoay (lớp 8), mặt cầu (lớp 9). Thế nhưng, *người ta sẽ dạy biểu diễn phối cảnh ước lệ như thế nào khi mà phép chiếu không được đề cập đến ở bậc học này?*

Dựa trên sự tiến triển của chương trình dạy học biểu diễn phối cảnh nói trên, các sách giáo khoa sẽ được tiến hành phân tích theo 2 nhóm (hình 1):



Hình 1. Hai nhóm sách giáo khoa Pháp cần nghiên cứu.

– Nhóm 1: các sách giáo khoa Toán lớp 10 ứng với chương trình 1973, 1981, 1986 – thời kì cải cách toán học hiện đại tại Pháp;

– Nhóm 2: các sách giáo khoa Toán Trung học cơ sở ứng với chương trình từ 1985 trở đi và các sách giáo khoa Toán Trung học phổ thông ứng với chương trình 1990 trở đi. Đây là các sách giáo khoa của thời kì sau cải cách toán học hiện đại.

Trong các sách giáo khoa ở nhóm 1, người ta sử dụng phép chiếu để định nghĩa các biểu diễn phẳng:

– phối cảnh ước lệ (perspective cavalière): chiếu song song đối tượng hình học trong không gian lên một mặt phẳng với phương chiếu xiên (không vuông góc với mặt phẳng chiếu) (Gautier và cộng sự, 1987);

– hình học họa hình (géométrie descriptive): chiếu vuông góc đối tượng hình học trong không gian lên hai mặt phẳng vuông góc (Audirac và Richerme, 1981).

Sự xuất hiện đồng thời của hai cách biểu diễn này có liên quan đến việc đọc một hình vẽ. Thật vậy, phối cảnh ước lệ đưa đến một hình vẽ gần với những gì mà người ta nhìn thấy, nhưng lại không đủ để xác định chính xác các yếu tố (thành phần) của đối tượng ba chiều; trong khi đó, hình học họa hình cho phép làm được điều này, nhưng người xem khó có thể hình dung được đối tượng hình học trong không gian khi phải tổng hợp hai “góc nhìn” (hình biểu diễn) khác nhau của đối tượng này (Condamine và cộng sự, 1973). Sự bổ sung lẫn nhau của hai cách biểu diễn cho phép “khôi phục” các thông tin bị mất trong quá trình chuyển đổi từ ba chiều sang hai chiều.

Riêng đối với phối cảnh ước lệ, một số sách giáo khoa còn đưa vào các ràng buộc đối với mặt phẳng chiếu và phương chiếu, chẳng hạn như:

– mặt phẳng chiếu song song với một mặt (phẳng) của đối tượng ba chiều. Điều này cho phép bảo toàn được các thông tin của mặt này qua phép chiếu (Martinet và cộng sự, 1986);

– phương chiếu không song song với các mặt (phẳng) của đối tượng ba chiều. Điều này làm giảm đi sự thất thoát thông tin qua phép chiếu, ví dụ: đa giác bị “suy biến” thành đoạn thẳng (Gautier và cộng sự, 1987).

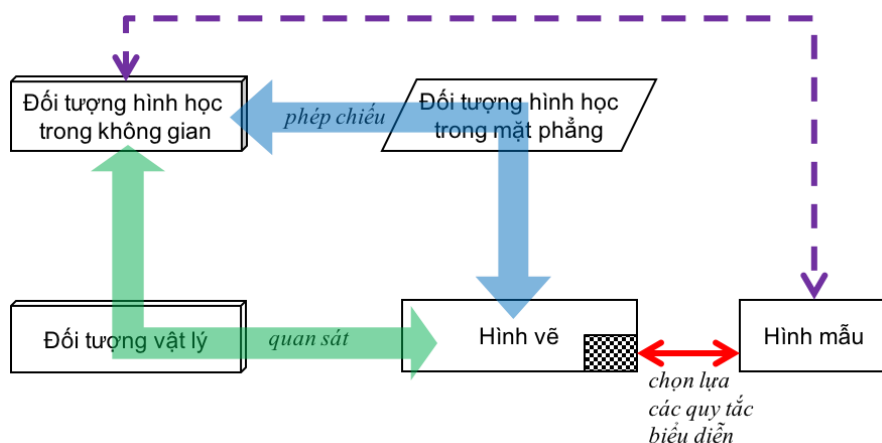
Bên cạnh đó, chúng tôi còn ghi nhận được dấu vết của cách tiếp cận “lập phương tham chiếu” với sự xuất hiện của các tham số góc tụ, tỷ số rút gọn và một sự pha trộn với các ngôn ngữ từ sự quan sát như “nhìn từ trên”, “nhìn từ dưới”, “bên phải”, “bên trái” (Condamine và cộng sự, 1973).

Trong các sách giáo khoa nhóm 2, chỉ có duy nhất một phép phối cảnh được giới thiệu: phối cảnh ước lệ và nó hoàn toàn không được định nghĩa qua phép chiếu như các sách giáo khoa nhóm 1. Người ta chỉ nói đến nó qua các quy tắc vẽ hình, bắt đầu ngay từ lớp 6 và được hệ thống hoá lại ở lớp 10. Cần nhắc lại rằng ở lớp 6, học sinh Pháp chỉ làm việc với một đối tượng hình học trong không gian: hình hộp chữ nhật và do đó, các quy tắc vẽ hình gắn chặt với đối tượng này. “Danh mục” các quy tắc này không giống nhau trong các sách giáo khoa. Có 3 ghi nhận đáng lưu ý ở đây:

- sự hiện diện của các đặc trưng của “lập phương tham chiếu”: góc tụ, tỷ số rút gọn;
- một số quy tắc xuất hiện rất phổ biến, chẳng hạn như “bảo toàn tính chất song song”;
- có một sự pha trộn giữa các quy tắc toán học và các quy tắc mang tính chất quy ước, chẳng hạn như “sử dụng các đường đứt nét với các cạnh khuất”.

Bên cạnh các quy tắc này, chúng tôi còn tìm thấy những chỉ dẫn chi tiết để vẽ các khối hình học ở các lớp Trung học cơ sở: hình hộp chữ nhật (lớp 6), hình lăng trụ, hình trụ tròn xoay (lớp 7), hình chóp, hình nón tròn xoay (lớp 8), mặt cầu (lớp 9). Chính trong các hướng dẫn này, người ta đã cài cắm vào hình vẽ các ràng buộc và qua đó, đưa học sinh đến một hình vẽ “mẫu”, cho phép tái hiện đối tượng hình học trong không gian.

Các nghiên cứu từ hai cách tiếp cận trên cho phép xác lập các nghĩa tri thức luận và didactic của bước chuyển từ một đối tượng hình học trong không gian sang một hình vẽ (Hình 2).



Hình 2. Ý nghĩa tri thức luận và didactic của bước chuyển từ một đối tượng hình học trong không gian sang hình vẽ.

Ở đây, chúng tôi xem xét 2 nhóm nghĩa chính:

- “*biến đổi*”: hình vẽ là kết quả của một sự biến đổi, hoặc là một biến đổi mang tính chất toán học (“*phép chiếu*”) kết hợp với các “*mã ba chiều*” (các đường đứt nét

chẳng hạn), hoặc là một quan sát trực quan (“*quan sát*”) một đối tượng vật lý được mô hình hoá bởi đối tượng hình học trong không gian;

– “*hình mẫu – quy tắc biểu diễn*”: hình mẫu là một hình vẽ đặc biệt, nó là kết quả của một sự chọn lọc trong tập hợp các hình vẽ có thể của một đối tượng vật lý hay hình học trong không gian. Sự chọn lọc này là kết quả của việc áp dụng các quy tắc biểu diễn một hình vẽ: một “sáng tạo didactic”. Hình vẽ này cho phép nhận ra ngay lập tức đối tượng không gian mà không cần tham chiếu đến một “biến đổi” nói trên.

Kết quả này cho phép chuyển câu hỏi ban đầu thành các câu hỏi cụ thể hơn như sau:

Đề dạy học bước chuyển từ một đối tượng hình học trong không gian sang một hình vẽ, cách tiếp cận nào sẽ được chọn lựa trong chương trình hiện hành? Tại sao? Liệu có tồn tại một sự trộn lẫn các cách tiếp cận? Nếu có thì như thế nào? Nếu không thì cách tiếp cận nào được giữ lại?

Các yếu tố trả lời cho các câu hỏi mới này đòi hỏi một nghiên cứu trên hệ thống dạy học hiện hành.

4. Kết luận

Bài viết đã đề xuất hai cách tiếp cận: nghiên cứu tổng quan về tri thức với việc khai thác các công trình của các nhà nghiên cứu didactic toán và nghiên cứu lịch sử dạy học tri thức với việc phân tích các tài liệu học đường để trong một chừng mực nào đó, đạt đến những hiểu biết tri thức luận về một tri thức (“biểu diễn phối cảnh” chẳng hạn). Từ đó, bài viết đem đến một giải pháp điều tra tri thức luận khả thi, có thể áp dụng trong quá trình đào tạo sau đại học chuyên ngành “Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán” và đào tạo giáo viên Toán tại các trường sư phạm – vốn đòi hỏi ở người học những hiểu biết vững chắc về tri thức toán ở góc độ “tri thức bác học” và tham chiếu nó với “tri thức cần dạy” ở nhà trường hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Adrait, R., Sommier, D. & Battail, J.-P. (2002). *Guide du constructeur en bâtiment*. Paris: Hachette technique.
2. Audibert, G. (1992). L’espace en géométrie. *Topologie structurale*, (18), 49–62.
3. Audirac, J.-L. & Richerme, A. (1981). *Maths 2e Geometrie*. Paris: Magnard.
4. Bessot, A., Comiti, C., Le Thi H.C, & Le Van T. (2009). *Eléments fondamentaux de didactique des mathématiques*. Edition de l’Université Nationale d’Ho Chi Minh ville.
5. Bautier, T., Boudarel, J., Colmez, F., & Parzysz, B. (1988). Géométrie et espace. Représentation plane des figures de l’espace. Dans *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 127–147). Grenoble: Pensée sauvage éditions.
6. Bessot, A. & Comiti, C. (2013). Apport des études comparatives internationales aux recherches en didactique des mathématiques. Le cas de la France et du ViệtNam. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 33(1), 45-77.
7. Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition.

8. Condamine, M., Polle, R., Clopeau, G.-H., & Cluzel, R. (1973). P. Vissio, *Mathématique seconde C.D.T.* Paris: Librairie Delagrave.
9. Gautier, C., Gerll, D., Thiercé, C. & Warusfel, A. (1987). *Mathématique 2e*. Paris: Hachette.
10. Martinet, J., Barbançon, G., Koch, B., Girault, P. & Schmitt, J.-D. (1986). *Mathématiques 2e*. Paris: Casteilla.
11. Pais, L.-C., Naudeillo, J., & Pelouzet, B. (1991). La représentation des corps ronds. *Repères IREM*, 4, 74-83.
12. Parzysz, B. (1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 211–240.
13. Tang, M. D. (2014). *Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt-Nam*. Thèse de l'Université Grenoble Alpes.
14. Thuillier, P. (1984). Espace et perspective au quattrocento. *Recherche (La) Paris*, 160, 1384-1398.

MỘT KHẢO SÁT KHOA HỌC LUẬN VỀ SỰ MỞ RỘNG KHÁI NIỆM LŨY THỪA

Trần Lương Công Khanh*, Nguyễn Hữu Lợi**

Tóm tắt

Đề định nghĩa lũy thừa với số mũ thực, sách Giải tích 12 nâng cao huy động khái niệm giới hạn và chấp nhận hai mệnh đề mà việc chứng minh liên quan đến tính trù mật của $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$ và nguyên lý Cantor về dãy các đoạn lồng nhau và thất lại.

Trước khi tập $\mathbf{R}$ và khái niệm giới hạn ra đời vào thế kỷ 19, Newton đã đề cập đến số mũ vô tỷ vào năm 1676. Leibniz thiết lập một hệ thức giữa lôgarit và mũ vào khoảng 1690, 1691. Như vậy, trong lịch sử toán học, tồn tại những hướng xây dựng lũy thừa với số mũ vô tỉ mà không cần khái niệm giới hạn.

Vậy khái niệm lũy thừa đã được mở rộng trong lịch sử toán học như thế nào? Bằng cách thực hiện một nghiên cứu khoa học luận để trả lời câu hỏi này, chúng tôi hy vọng góp phần làm rõ khái niệm lũy thừa với số mũ vô tỷ - một khái niệm liên quan mật thiết với khái niệm hàm số mũ.

Résumé

Pour définir la puissance à exposants irrationnels, le manuel Analyse 12 avancée mobilise la notion de limite et admet deux propositions dont les démonstrations concernent la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ et le principe de Cantor des intervalles fermés emboîtés.

Avant que l'ensemble $\mathbf{R}$ et la notion de limite apparaissent au 19^e siècle, Newton aborde l'exposant irrationnel en 1676. Leibniz établit une relation entre logarithmes et exponentielles en 1690, 1691. Il existe donc dans l'histoire des mathématiques une piste visant à construire les puissances à exposants irrationnels sans recourir à la notion de limite.

Comment la notion de puissance est-elle étendue dans l'histoire des mathématiques ? En effectuant une étude épistémologique pour tenter de répondre à cette question, nous espérons contribuer à éclairer la notion de puissance à exposants irrationnels, notion étroitement liée avec la notion de fonctions exponentielles.

Ở trường trung học phổ thông Việt Nam, khái niệm lũy thừa được mở rộng dần từ lớp 6 đến lớp 12 theo sơ đồ: số mũ nguyên dương (lớp 6) $\rightarrow$ số mũ không (lớp 6, lớp 12) $\rightarrow$ số mũ nguyên âm (lớp 7, lớp 12) $\rightarrow$ số mũ hữu tỷ (lớp 12) $\rightarrow$ số mũ thực (lớp 12).

Đề định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỷ, sách Giải tích 12 nâng cao huy động khái niệm giới hạn và chấp nhận hai mệnh đề mà việc chứng minh cần đến tính trù mật của $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$ và nguyên lý Cantor về dãy các đoạn lồng vào nhau và thất lại.

Ở trường trung học phổ thông Pháp, lũy thừa với số mũ vô tỷ được định nghĩa là giá trị tương ứng của hàm số mũ theo sơ đồ: phương trình vi phân $\rightarrow$ hàm số mũ (cơ số e) $\rightarrow$ hàm số lôgarit (cơ số e , a) $\rightarrow$ hàm số mũ (cơ số a) $\rightarrow$ lũy thừa với số mũ vô tỷ [4].

* TS, Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận

** ThS, Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh

Như vậy, trường trung học phổ thông Pháp xây dựng khái niệm lũy thừa với số mũ vô tỉ mà không cần đến tính trừ mật của $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$ và nguyên lý Cantor. Vậy khái niệm lũy thừa đã được mở rộng trong lịch sử toán học như thế nào?

Trong [4], chúng tôi đã cố gắng trả lời một phần câu hỏi này bằng cách khảo sát sự hình thành và phát triển khái niệm hàm số mũ đặt trong mối liên hệ với khái niệm lôgarit và số e . Trong tham luận này, chúng tôi tự giới hạn trong việc khảo sát sự hình thành và phát triển khái niệm lũy thừa với số mũ vô tỷ - một công cụ quan trọng để định nghĩa lũy thừa với số mũ thực. Sự ra đời của lôgarit tự nhiên được trình bày ở phần đầu bài viết nhằm phục vụ cho việc đọc những phần sau.

1. Sự ra đời của lôgarit

1.1. Các công thức lượng giác biến đổi tích thành tổng

Trong thế kỷ 16, nhu cầu thực hiện nhiều tính toán về thiên văn, hàng hải và lãi suất kép thúc đẩy các nhà toán học tìm kiếm những công cụ giúp đơn giản hóa phép nhân và phép chia các số. Công cụ đầu tiên được sử dụng là các công thức biến đổi tích thành tổng đã biết từ lâu và các bảng lượng giác được hoàn thiện vào thế kỷ 11:

$$\sin a \sin b = [\cos(a - b) - \cos(a + b)]: 2$$

$$\cos a \cos b = [\cos(a - b) + \cos(a + b)]: 2$$

$$\sin a \cos b = [\sin(a - b) + \sin(a + b)]: 2$$

Để tính $A = 104\,528.719\,339$ bằng cách biến đổi tích thành tổng, các nhà toán học thế kỷ 16 tiến hành như sau: Đặt $0,104\,528 = \cos a$ và $0,719\,339 = \cos b$. Tra bảng lượng giác: $a = 84^\circ$, $b = 44^\circ$. Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng:

$$B = \cos 84^\circ \cos 44^\circ = (\cos 40^\circ + \cos 128^\circ): 2$$

$$= (0,766\,044\,443 - 0,615\,661\,475): 2 = 0,075\,191\,484.$$

$$\text{Suy ra: } A = B \cdot 10^{12} = 75\,191\,484\,000 \text{ [2, tr. 64].}$$

Nếu nhân trực tiếp, ta được $A = 75\,191\,066\,992$. Sai số tương đối trong việc tính A bằng công thức biến đổi là khá nhỏ (0,000 554 595%) và phát sinh từ việc tra bảng tìm a , b , $\cos 40^\circ$, $\cos 128^\circ$. Có thể làm giảm sai số này bằng cách cải thiện độ chính xác của các bảng lượng giác.

Được sử dụng đến giữa thế kỷ 17 (ngay cả khi đã xuất hiện các bảng lôgarit), công cụ trên giúp thực hiện mau chóng phép nhân và phép chia với độ tin cậy cao nhưng gặp trở ngại với phép khai căn. Điều này thúc đẩy các nhà toán học tiếp tục tìm kiếm những công cụ khác.

1.2. Ý tưởng chuyển phép nhân thành phép cộng

Trong chuyên luận *Arithmetica integra* (Số học toàn vẹn) xuất bản năm 1544, Michael Stifel (1486-1567) phát biểu một tính chất của cấp số nhân có công bội bằng số hạng đầu như sau: tích hai số hạng cho trước thì bằng số hạng có chỉ số là tổng chỉ số của hai số hạng đã cho [2, tr. 54]. Bằng ký hiệu hiện đại, có thể phát biểu tính chất

này thành $a_n a_m = a_{n+m}$ với (a_n) là cấp số nhân có công bội $q = a_1$. Thật vậy, với giả thiết đã cho, ta có $a_n a_m = a_1 q^{n-1} a_1 q^{m-1} = a_1 q^{n+m-1} = a_{n+m}$.

Một minh họa cho tính chất này được trình bày trong bảng 1 với cấp số nhân (2^n) .

Bảng 1. Sự tương ứng giữa tổng hai chỉ số và tích hai số hạng

n	1	2	3	4	$5 = 2 + 3$	...
$a_n = 2^n$	2	4	8	16	$32 = 4. 8$	...

Để tính tích $a_n a_m$ ở dòng thứ hai (chẳng hạn 4. 8), ta tìm giá trị tương ứng n, m ở dòng thứ nhất (2 và 3), tính tổng $n + m$ (được 5) rồi tra bảng tìm giá trị tương ứng a_{n+m} ở dòng thứ hai (ở đây là 32). Ý tưởng chuyển phép nhân thành phép cộng gợi ý cho Jost Bürgi (1552-1632) và John Napier (1550-1617) xây dựng các bảng số sau này [2, tr. 54].

1.3. Bảng Bürgi: liên hệ giữa cấp số nhân và cấp số cộng

Khoảng từ 1605 đến 1610, Bürgi xây dựng một bảng gồm hai dãy số $(x_n), (y_n)$ với (x_n) là một cấp số nhân có $x_1 = 10^8$ và $q = 1,0001$ còn (y_n) là một cấp số cộng có $y_1 = 0$ và $d = 10$ [8, tr. 12]. Dưới đây là một phần bảng Bürgi được chúng tôi trình bày lại bằng ký hiệu hiện đại và thêm vào cột n để dễ theo dõi.

Bảng 2. Một phần bảng Bürgi

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	10^8	0	4	100030003,0001	30	7	100060015,002	60
2	100010000	10	5	100040006,0004	40	8	100070021,0035	70
3	100020001	20	6	100050010,001	50	9	100080028,005601	80

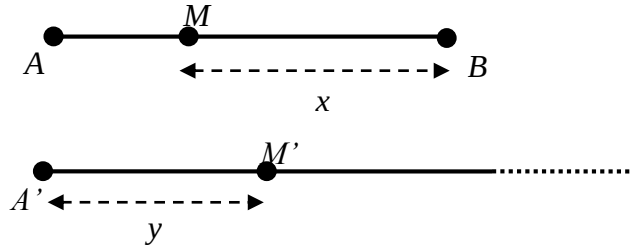
Để tính tích $A = x_n x_m$ (chẳng hạn 100010000. 100050010,001) bằng bảng 2, ta tra cột y_n tìm hai giá trị tương ứng là y_n và y_m (ở đây là 10 và 50). Ta tính tổng $y_n + y_m$ (được 60) và tra cột x_n tìm giá trị B tương ứng với $y_n + y_m$ (ở đây, $B = 100060015,002$). Khi đó, $A = B. 10^8$.

Có thể giải thích cách tính trên bằng kiến thức về cấp số cộng và cấp số nhân. Thật vậy, mỗi dòng trong bảng là phép tương ứng $n \leftrightarrow x_n = 10^8 q^{n-1} \leftrightarrow y_n = 10(n - 1)$. Ta có $y_n + y_m = 10(n + m - 2)$ tương ứng với $B = 10^8 q^{n+m-2} = x_n y_n: 10^8 = A: 10^8$. Do đó, $A = B. 10^8$.

Dù hoàn thành bảng số vào năm 1610, Bürgi chỉ công bố nó vào năm 1620 (sau Napier 6 năm). Điều này khiến bảng Bürgi ít được biết đến.

1.4. Bảng Napier: lôgarit cơ số $1 - 10^{-7}$

Trong chuyên luận *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Mô tả chính tắc các lôgarit diệu kỳ) xuất bản năm 1614, Napier công bố các bảng lôgarit và là người đầu tiên đưa ra thuật ngữ lôgarit ghép bởi hai từ Hy Lạp logos (tỷ lệ) và arithmeticos (số).



Ông xét điểm M chuyển động với vận tốc biến đổi trên quãng đường $AB = 10^7$ (m) theo hướng từ A đến B . Vận tốc ban đầu của M là $v_0 = 10^7$ (m/h) và tại thời điểm bất kỳ là MB (m/h). Đồng thời với M , một điểm M' chuyển động trên quãng đường $A'B'$ theo hướng từ A' đến B' với vận tốc không đổi 10^7 (m/h).

Ký hiệu $x = MB$ và $y = A'M'$, Napier nhận thấy nếu xét những khoảng thời gian bằng nhau lặp lại liên tiếp thì x thay đổi theo cấp số nhân và y thay đổi theo cấp số cộng. Ông nói y là lôgarit của x [6, tr. 80].

Nếu sử dụng ký hiệu ngày nay, ta có thể chứng minh nhận xét của Napier như sau. AM là hoành độ của M nên đạo hàm theo thời gian của AM chính là vận tốc x của M . Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức $AM = 10^7 - x$ theo thời gian, ta có $x = -x'$. Với điều kiện ban đầu $x(0) = 10^7$, ta được $x = 10^7 e^{-t}$. Khử t từ hai đẳng thức $y = 10^7 t$ và $x = 10^7 e^{-t}$, ta được $y = -10^7 \ln(10^{-7} x)$.

Vì $-10^7 \ln(10^{-7} xq) = -10^7 \ln(10^{-7} x) - 10^7 \ln q$ nên nếu các giá trị x tạo thành một cấp số nhân có công bội q thì các giá trị y tương ứng tạo thành một cấp số cộng có công sai $d = -10^7 \ln q$.

Đặc biệt, $-10^{-7} \approx \ln(1 - 10^{-7})$ chính xác đến 10^{-14} nên

$$y = -10^7 \ln(10^{-7} x) = \ln(10^{-7} x) : (-10^{-7}) \approx \ln(10^{-7} x) : \ln(1 - 10^{-7}) = \log_{1-10^{-7}} (10^{-7} x).$$

Biểu thức cuối cùng được ký hiệu là $\text{NapLog}(x)$ để nhấn mạnh đây là lôgarit do Napier tạo ra và để phân biệt với các lôgarit có cơ số khác [6, tr. 80].

Như vậy, Napier cũng nhắm đến việc chuyển phép nhân thành phép cộng nhưng tiếp cận theo quan điểm động học. Trong các bảng lôgarit của mình, ông ngầm sử dụng lôgarit cơ số $(1 - 10^{-7})$ dù không đề cập đến khái niệm cơ số. Về mặt xấp xỉ (chính xác đến 10^{-14}), các bảng lôgarit này thể hiện tương quan hàm số $x \mapsto \text{NapLog}(x) = \log_{1-10^{-7}} (10^{-7} x)$.

1.5. Lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên và số e

Các bảng lôgarit của Napier đã giải quyết hiệu quả nhu cầu tính toán về thiên văn, hàng hải và lãi suất kép ở thế kỷ 17 nhưng vẫn còn một số bất tiện, nhất là $\text{NapLog}(1) \neq 0$. Để hoàn thiện bảng lôgarit của Napier, Henry Briggs (1556-1630) xuất bản năm 1624 quyển *Arithmetica logarithmica* gồm lôgarit thập phân của 30 000 số (từ 1 đến 20 000 và từ 90 001 đến 100 000). Năm 1628, Ezechiel de Decker (1603-1647) và Adriaan Vlacq (1600-1667) bổ sung *Arithmetica logarithmica* thành lôgarit thập phân của các số từ 1 đến 100 000 [6, tr 110].

Năm 1647, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) tính diện tích hình phẳng (mà ông gọi là *diện tích dưới hypebol*) xác định bởi $\{M(x, y) | 0 < a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1/x\}$. Ông chứng minh được diện tích dưới hypebol có tính chất giống như các lôgarit (biến đổi tích thành tổng) nhưng chưa nhận ra mối liên hệ giữa diện tích này (được biểu diễn bằng lôgarit tự nhiên) với các lôgarit do Napier và Briggs tạo ra [4].

Năm 1649, Alphonse Antoine de Sarasa (1617-1667) phát hiện mối liên hệ giữa *diện tích dưới hypebol* và các lôgarit. Năm 1668, Nicolaus Mercator (1620-1687) dùng thuật ngữ *lôgarit tự nhiên* để chỉ *diện tích dưới hypebol*. Thuật ngữ này được dùng đến ngày nay [4].

Tuy nhiên, ký hiệu e vẫn chưa ra đời. Khoảng 1690-1691, Leibniz gọi b là số sao cho $\ln b = 1$. Năm 1728, Euler dùng e thay cho b và tính được $e \approx 2,7182817$. Năm 1737, Euler khai triển e , $\sqrt{e}$, e^2 thành liên phân số và suy ra tính vô tỷ của ba số này. Năm 1748, Euler biểu diễn e^x dưới dạng chuỗi lũy thừa và giới hạn (mặc dù định nghĩa chính xác về giới hạn hàm số chỉ được Weierstrass công bố năm 1861):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Năm 1874, Charles Hermite (1822-1901) chứng minh e là số siêu việt. Năm 1895, Felix Klein (1849-1925) cung cấp một chứng minh khác đơn giản hơn chứng minh của Hermite [4].

2. Lũy thừa với số mũ vô tỷ

2.1. Những bước đi đầu tiên

Sự tồn tại số vô tỷ - đặc biệt là số $\sqrt{2}$ - được biết đến rất sớm từ thời cổ đại. Tuy nhiên mãi đến năm 1872, Cantor (1845-1918) mới xây dựng tập $\mathbf{R}$ và công bố nguyên lý về dãy các đoạn lồng vào nhau và thất lại. Điều này cho thấy một khái niệm toán học có thể được sử dụng trước khi có định nghĩa hình thức chính xác.

Lũy thừa với số mũ vô tỷ, cụ thể là $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$, xuất hiện lần đầu tiên trong bức thư ngày 24-10-1676 do Newton (1643-1727) gửi Leibniz (1646-1716) qua trung gian của Oldenburg (1618-1677). Dù chưa định nghĩa hay tính hai lũy thừa này, Newton cho biết ông sử dụng chúng trong việc khai triển nhị thức [7, tr. 146].

Năm 1678, Leibniz lần đầu tiên sử dụng ký hiệu x^y nhưng không giải thích ý nghĩa [9, tr. 263, 335]. Năm 1679, ông thổ lộ với Huygens (1629-1695) về những khó khăn khi giải phương trình $x^x - x = 24$. Trong những bức thư trao đổi với Huygens từ 1690 đến 1691, Leibniz đưa ra hệ thức $b^t = \frac{1+v}{1-v} \Leftrightarrow \ln \frac{1+v}{1-v} = t$, trong đó b là “một đại lượng không đổi có lôgarit tự nhiên bằng 1”. Đây cũng là lần xuất hiện tường minh đầu tiên của cơ sở của lôgarit tự nhiên mà sau này (1728) Euler (1707-1783) ký hiệu là e .

2.2. Lũy thừa với số mũ tùy ý

Trong *Principia Calculi Exponentialium* (Nhập môn tính toán các biểu thức mũ) xuất bản năm 1697, Johann Bernoulli (1667-1748) định nghĩa lũy thừa của số $a > 0$ với số mũ tùy ý b thông qua lôgarit tự nhiên. Nếu dùng ký hiệu hiện đại, định nghĩa của Bernoulli có dạng: $a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \ln a}$, trong đó $e^{b \ln a}$ được xác định theo hệ thức nói trên của Leibniz [3, tr. 39].

Nếu sử dụng ký hiệu hiện đại, ta có $a^b = t \Leftrightarrow e^{b \ln a} = t \Leftrightarrow b \ln a = \ln t$. Như vậy, để tính $t = a^b$, các nhà toán học cuối thế kỷ 17 dùng bảng lôgarit để tìm t sao cho $\ln t = b \ln a$.

Phải đợi đến giữa thế kỷ 18, lũy thừa với số mũ vô tỷ mới được chặn trên và chặn dưới bằng các lũy thừa với số mũ hữu tỷ mà không cần đến lôgarit. Trong quyển *Introductio in Analysin infinitorum* (Nhập môn giải tích các vô cùng bé) xuất bản năm 1748, Euler viết “ $a^{\sqrt{7}}$ nhận giá trị giữa a^2 và a^3 , hay chính xác hơn, giữa $a^{26/10}$ và $a^{27/10}$, giữa $a^{264/100}$ và $a^{265/100}$, giữa $a^{2645/1000}$ và $a^{2646/1000}$...” [3, tr. 17].

Cũng trong tác phẩm này, Euler định nghĩa hàm số mũ với biến số phức bằng công thức $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ với x là số thực tùy ý. Công thức này sau đó được mở rộng cho x là số phức bất kỳ.

3. Các nhận xét rút ra từ khảo sát khoa học luận

Tương tự trường hợp số vô tỷ (và một số trường hợp khác), lũy thừa với số mũ vô tỷ được sử dụng trước khi có định nghĩa hình thức chính xác.

Vào đầu thế kỷ 17, các bảng lôgarit ra đời do nhu cầu đơn giản hóa các phép tính trong thiên văn, hàng hải và lãi suất kép.

Vào giữa thế kỷ 17, khái niệm lôgarit tự nhiên ra đời từ việc tính “diện tích dưới hypebol”, trước khi biết đến số e .

Nửa sau thế kỷ 17, lũy thừa với số mũ vô tỷ xuất hiện sớm nhất trong các công trình của Newton (1676), Leibniz (1678) và gắn với việc giải quyết những bài toán cụ thể (khai triển nhị thức, giải phương trình).

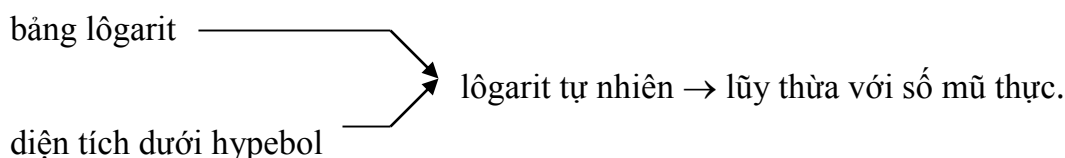
Cuối thế kỷ 17, nhu cầu biểu diễn mối liên hệ giữa lôgarit tự nhiên và biểu thức mũ dẫn đến việc định nghĩa e là hằng số có lôgarit tự nhiên bằng 1. Cũng trong giai đoạn này, nghiên cứu của Johann Bernoulli cho phép định nghĩa lũy thừa với số mũ tùy ý thông qua lôgarit tự nhiên.

Mãi đến giữa thế kỷ 18, Euler mới nêu ra ý tưởng về việc chặn trên và chặn dưới một lũy thừa với số mũ vô tỷ bằng các lũy thừa với số mũ hữu tỷ. Tuy nhiên, Euler vẫn chưa đề xuất một định nghĩa tổng quát cho lũy thừa với số mũ vô tỷ độc lập với lôgarit.

Phải đợi đến nửa sau thế kỷ 19, ý tưởng của Euler mới được hình thức hóa: Lũy thừa a^α (với $a > 0$ và α vô tỷ) là giới hạn chung của tất cả các dãy (a^{r_n}) và (a^{s_n}) với (r_n) và (s_n) là hai dãy hữu tỷ hội tụ tăng và hội tụ giảm đến α . Các cơ sở toán học của định nghĩa này là khái niệm giới hạn và nguyên lý Cantor về dãy các đoạn lồng vào nhau và thất lại:

Nếu $[a_n, b_n]$ là dãy các đoạn thỏa $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ thì tồn tại duy nhất một số thực α thỏa $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$.

Tóm lại, việc định nghĩa lũy thừa với số mũ thực trong lịch sử toán học là một quá trình dài bắt đầu từ thời Babylon cổ đại [4] và chỉ hoàn thành vào cuối thế kỷ 19. Nó không tiến triển theo sơ đồ: số mũ hữu tỷ $\rightarrow$ số mũ vô tỷ $\rightarrow$ số mũ thực mà tuân theo sơ đồ dưới đây:



Trong giai đoạn đầu, lũy thừa với số mũ tùy ý được định nghĩa thông qua lôgarit tự nhiên mà không cần đề cập tường minh đến số e . Định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỷ độc lập với khái niệm lôgarit xuất hiện trễ hơn vì nhiều nguyên nhân mà một trong số đó là những vấn đề tinh tế về giới hạn và xây dựng tập số thực. Thật vậy, định nghĩa hình thức về giới hạn hàm số chỉ được Weierstrass phát biểu vào năm 1861. Tập $\mathbf{R}$ được Cantor xây dựng vào năm 1872 nhờ lớp tương đương các dãy Cauchy trong $\mathbf{Q}$. Cũng trong năm này, Dedekind (1831-1916) công bố cách xây dựng tập $\mathbf{R}$ bằng các nhất cắt.

Điều này cho thấy những chương ngại khoa học luận về giới hạn và tính trừu tượng của $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$ là khó khăn lớn nhất trong việc định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỷ bằng cách chặn trên và chặn dưới bởi lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Euler L. (1748). *Opera Omnia*, Introductio in analysin infinitorum. Tomi Primi.
2. Friedelmeyer J-P. (2006). Contexte et raisons d'une "mirifique" invention. *Histoire des logarithmes*, pp. 39-72. Ellipses.
3. Hairer E., Wanner G. (2001). *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer.
4. Trần Lương Công Khanh, Nguyễn Hữu Lợi. (2016). Hàm số mũ: một nghiên cứu tri thức luận và đối chiếu giữa Việt Nam và Pháp. *Tạp chí khoa học*, số 4(82) 4-2016, tr. 61-70. Trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh.
5. Kouteynikoff O. (2006). Invention des nombres: calculs ou résolutions?. *Histoire des logarithmes*, pp. 11-37. Ellipses.
6. Lecorre L. (2006). John Neper et la merveilleuse table des logarithmes. *Histoire des logarithmes*, pp. 73-112. Ellipses.
7. Leibniz G. W., Gerhardt K. I. (1849). *Leibnizens mathematische Schrieften*, vol. 1. Verlag von A. Asher & Comp.
8. Roegel D. (2010). *Bürgi's "Progress Tabulen" (1620): logarithmic tables without logarithms*. LOCOMAT project.
9. Serfati M. (2005). *La révolution symbolique: La constitution de l'écriture mathématique*. Pétra.

PHÁT TRIỂN KỸ NĂNG TOÁN HỌC CƠ BẢN LÀM NỀN TẢNG ĐÀO TẠO NGUỒN NHÂN LỰC TRẺ CHẤT LƯỢNG CAO Ở VIỆT NAM

Trần Vui*

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi sẽ trao đổi những vấn đề học được từ kết quả đánh giá quốc tế PISA 2012 và 2015 về giáo dục toán trung học ở Việt Nam. Học sinh trung học Việt Nam đã chứng tỏ được năng lực nắm bắt những kỹ năng toán học cơ bản trong giải quyết các vấn đề thực tế theo bối cảnh. Giáo viên toán Việt Nam có kiến thức toán cơ sở vững chắc và biết cách phát triển tư duy toán học của học sinh (OCED, 2016). Từ những nhận định trên của thế giới, chúng tôi sẽ cố gắng tiếp cận nghiên cứu khoa học giáo dục hiện đại để tìm cách mô tả, minh chứng, đưa ra những dữ liệu đáng tin cậy để phân tích về tiềm năng của học sinh Việt Nam trong đào tạo nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao.

Từ khóa: kỹ năng toán học cơ bản, nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao, giải quyết vấn đề thực tế.

Abstract

In this article, we discuss what we have learned from results of Programme for International Student Assessment PISA 2012 and 2015 on secondary mathematics education in Vietnam. Vietnamese secondary students showed that they had the competencies to grasp the basic mathematical skills in solving realistic problems in context. Vietnamese mathematics teachers have strong basic mathematical knowledge and know how to develop students' mathematical thinking (OCED, 2016). From the above statements, we will try to approach modern educational research to describe, demonstrate, and give reliable data to analyze the potential of Vietnamese students in training high quality young human resources.

Keywords: basic mathematical skills, high quality young human resource, realistic problem solving.

1. Giới thiệu

Năm 1077, dưới thời nhà Lý, toán học được đưa vào chương trình thi cử để tuyển chọn người “tài trí” giỏi “tính toán” ra xây dựng đất nước. Sau đó, hai nhà toán học “huyền thoại” là Vũ Hữu (1437-1530) và Lương Thế Vinh (1441-1496) đã viết hai cuốn sách “Lập thành toán pháp” và “Đại thành toán pháp” bằng chữ Hán Nôm, trình bày các phương pháp đo đạc, tính toán trong xây dựng và quy hoạch ruộng đất (Volkov, 2013). Như vậy từ rất lâu, người Việt đã có những nỗ lực để ứng dụng các kỹ năng toán học cơ bản vào trong cuộc sống đời thường.

Các nội dung được đề cập trong các sách toán Hán Nôm thể hiện rõ mối quan hệ giữa toán học và đời sống gồm sáu mảng nội dung cơ bản sau:

- Số và bốn phép toán số học: cộng, trừ, nhân, chia.
- Hình học và toán ứng dụng.
- Toán học trong xây dựng, tính mức thủy triều lên xuống và các ứng dụng khác.

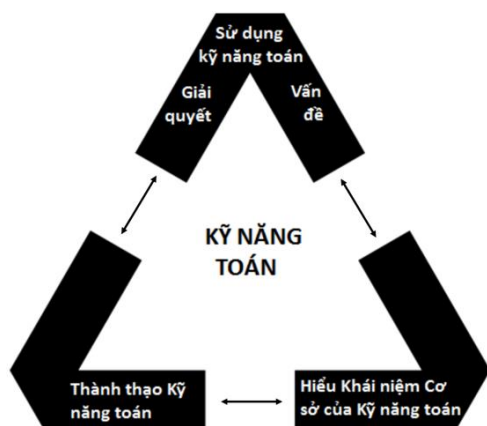
* PGS. TS, Đại học sư phạm, Đại học Huế

- Các bài toán đồ.
- Đại số sơ cấp, khái niệm so sánh, phép lập phương, phép khai phương.
- Các đơn vị cân, đo lường, đơn vị tiền tệ.

Qua các nội dung trên, chúng ta có thể thấy từ xưa người Việt Nam đã quan tâm nhiều đến ứng dụng thực tế của toán học trong đời sống thường ngày (Nguyễn Xuân Diện và Tạ Duy Phương, 2013). Đến thế kỷ 20, toán học cùng với các ngành khoa học tự nhiên, xã hội nhân văn đã thực sự phát triển những ứng dụng theo hướng giáo dục thực tế, phục vụ cuộc sống cho học sinh phổ thông và sinh viên bậc đại học và cao đẳng ở Việt Nam.

Chương trình Đánh giá Học sinh Quốc tế PISA (Programme for International Student Assessment) của Tổ chức Hợp tác và Phát triển Kinh tế OECD (Organization for Economic Cooperation and Development) gồm các nước có nền kinh tế phát triển trên thế giới, nhằm đánh giá, so sánh, đối chiếu năng lực của học sinh ở các nước đã và đang phát triển trên phạm vi toàn cầu. Theo chúng tôi, những kết quả của PISA 2012 và PISA 2015 về năng lực toán của học sinh Việt Nam rất đáng tin cậy, nó chỉ ra rằng hệ thống giáo dục toán học phổ thông ở Việt Nam là hiệu quả trong việc cung cấp cho học sinh những kỹ năng nhận thức toán học cơ bản ở nhà trường. Việt Nam thực thi “*hệ thống giáo dục tập trung*” ở cả hai phương diện: những quyết định liên quan đến đào tạo và sử dụng giáo viên, và các quá trình điều hành và đánh giá thành tích học tập của học sinh nhằm bảo đảm chất lượng giáo dục theo chương trình quốc gia đã quy định (OECD, 2014).

Kỹ năng nhận thức toán học cơ bản, hay gọn hơn là *kỹ năng toán học cơ bản* chỉ khả năng của học sinh có thể thực hiện các công thức, thuật toán, quy trình toán được mô tả theo những nội dung toán cụ thể, chọn và sử dụng các phương án giải quyết vấn đề đơn giản, tận dụng các kỹ năng được phát triển tốt và suy luận linh hoạt trong giải quyết các vấn đề thực tế (OECD, 2014).



Hình 1. Hiểu và sử dụng các kỹ năng toán học cơ bản.

Câu hỏi chính cần phải tìm ra câu trả lời là: làm thế nào để giáo viên toán đứng lớp tạo ra được các hoạt động toán tốt có thể đem lại cho học sinh cơ hội phát triển các kỹ năng toán học cơ bản với hiểu sâu các khái niệm, từ đó có thể sử dụng các kỹ năng toán để giải quyết các vấn đề gắn liền với đời sống thực tế? Bài báo sẽ trao đổi các câu trả lời cho câu hỏi đặt ra liên quan đến xu hướng của những nghiên cứu giáo dục toán nhằm: “*Đổi mới việc dạy là giúp học sinh khám phá cách thức và phát triển các kỹ năng toán học cơ bản ở mức cao thông qua việc giải quyết các vấn đề thực tế trong*

cuộc sống đời thường, để rồi tài năng và năng lực của các em được phát triển một cách hiệu quả theo luồng các ý tưởng toán học then chốt". Từ đó lý giải tại sao ở Việt Nam, học sinh trung học có năng lực toán học cơ bản ở “*mức cao*” hơn trung bình của các nước tham gia PISA, là tiền đề để đào tạo nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao, nhưng kinh tế Việt Nam lại ở “*mức thấp*”.

2. Những tiềm năng giáo dục toán của Việt Nam cần phát triển

2.1. Kỹ năng toán học cơ bản của học sinh Việt Nam trong PISA 2012 và 2015

Điều may mắn cho nền giáo dục toán nước nhà là bản thân các học sinh Việt Nam đánh giá cao việc học toán của mình ở nhà trường. Các em đã không ngừng nỗ lực học toán dưới sức ép của gia đình và xã hội. Hầu hết các em được khảo sát ở PISA 2012 và 2015, đã đồng ý với khẳng định sau đây “*là xứng đáng để nỗ lực trong việc học toán ở nhà trường, bởi vì kiến thức được trang bị sẽ giúp các em thể hiện tốt trong nghề nghiệp mong muốn ở cuộc sống sau này*”. Học sinh Việt Nam học tốt các kỹ năng cơ bản, với lý do các em cần phải rất chăm chỉ học tập để qua được các kỳ thi trong một môi trường giáo dục đặc thù phương Đông là nặng về “*học để thi*”. Để giúp học sinh đạt thành tích cao, giáo viên với nền tảng kiến thức vững chắc đã phải chuẩn bị “*một lượng lớn các ý tưởng nhỏ mang tính kỹ năng, qui trình*” để rèn luyện cho học sinh trả lời các vấn đề kiến thức có “*dạng mẫu quen thuộc*” trong các đề thi theo chương trình nặng về nội dung toán (Bloem, 2013; OECD, 2016).

Với việc tham gia vào những bài kiểm tra đánh giá của PISA, Việt Nam có thể rút ra được những bài học về vị trí giáo dục toán của mình khi so sánh với các quốc gia khác trên thế giới và trong khu vực Đông Nam Á, cùng với việc dựa vào phân tích kết quả PISA, Việt Nam cũng sẽ hiểu được những yếu tố ảnh hưởng đến những nỗ lực nâng cao chất lượng giáo dục của mình nhằm đào tạo nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao. Chúng ta có thể vận dụng những thể hiện ở “*mức cao*” về kỹ năng nhận thức toán học cơ bản của học sinh trong PISA vào những đổi mới mang tính thực tiễn trong giáo dục phổ thông và đại học. Điểm then chốt nhất đối với Việt Nam hiện nay là đang tập trung vào những vấn đề thực sự liên quan đến “*việc học kiến thức toán cơ bản của học sinh*”, chứ không phải là giáo viên, hay chương trình và thi cử.

PISA tập trung vào đánh giá học sinh 15 tuổi “*biết được những gì?*” và các em “*có thể làm được những gì với vốn kiến thức biết được?*” trong những tình huống gần gũi với cuộc sống hàng ngày (OECD, 2014). Theo những nghiên cứu khảo sát, OECD (2016) đã rút ra những kết quả sau:

– Khẳng định sau đây được xem như là một *nguyên lý*: Thu nhập quốc dân của một quốc gia tỉ lệ thuận với trình độ toán của các học sinh 15 tuổi được đánh giá. Việt Nam là một ngoại lệ vì không đúng với nguyên lý đó. Việt Nam đã vượt ngưỡng năng lực toán trung bình của các nước OECD, nhưng kinh tế lại vào loại nghèo nhất trong các nước tham gia.

– Ở PISA 2012, Việt Nam đạt 511 điểm về Toán /494 OECD-TB, xếp thứ 17 trong 64 nước có nền kinh tế phát triển hoặc đang phát triển tham gia.

– Ở PISA 2015, Việt Nam đạt 495 điểm về Toán /490 OECD-TB, xếp thứ 22 trong 72 nước.

Từ các kết quả của OECD (2016), chúng tôi đưa ra những nhận định sau:

– Nguyên lý trong khẳng định trên *chỉ là điều kiện cần và không đủ*. Điều kiện cần này là lấy kỹ năng toán học cơ bản làm *vốn quý* trong đào tạo nguồn nhân lực cho nền kinh tế với thu nhập quốc dân cao.

– Học sinh Việt Nam vẫn đang còn thua kém học sinh ở các nước phát triển trong việc giải quyết các vấn đề gắn gũi trong cuộc sống hiện đại, mang bối cảnh xã hội, tích hợp với các khoa học khác trong khi lại giải quyết tốt hơn các câu hỏi về *kỹ năng toán học với nội dung toán-cụ thể*.

– Những kỹ năng nhận thức toán học cơ bản ở mức cao của học sinh Việt Nam là nền tảng cần thiết để phát triển giáo dục toán theo hướng giải quyết vấn đề thực tế mới lạ một cách sáng tạo.

Những nhận định ban đầu này sẽ được lý giải theo các dữ liệu thu thập được. Cụ thể, tỉ lệ học sinh Việt Nam đạt mức năng lực cao của môn thi toán năm 2015 là 13% thấp hơn mức trung bình của OECD là 15,3%. Đặc biệt trong môn thi toán năm 2012 và 2015, tỉ lệ phần trăm học sinh đạt các năng lực toán học được thể hiện ở Bảng 1.

PISA phân loại năng lực toán học thành ba cụm: tái tạo, liên kết, phản ánh. Mỗi cụm như vậy tương ứng với hai mức. Tái tạo ứng với mức 1, 2 được xem là năng lực thấp. Liên kết ứng với mức 3, 4 chỉ năng lực trung bình. Phản ánh ứng với mức 5, 6 được đánh giá là năng lực cao. Tổng hợp các năng lực từ thấp đến cao gồm tái tạo, liên kết và phản ánh trong phân loại PISA được hiểu là các “*kỹ năng toán học cơ bản*” theo nghĩa hiểu biết kiến thức toán cụ thể và vận dụng được cho các tình huống thực tế.

Bảng 1. Tỉ lệ phần trăm học sinh Việt Nam đạt các năng lực toán trong PISA 2012 và 2015

Năng lực	Cụm	Mức	Mô tả	% 2012	% 2015
Cao	Phản ánh	5, 6	Thành thạo và vận dụng kiến thức toán trong mọi tình huống.	14,2	13
Trung bình	Liên kết	3, 4	Biết kiến thức toán và vận dụng được.	72,5	73
Thấp	Tái tạo	1, 2	Không thành thạo kiến thức toán.	13,3	14

Từ Bảng 1, chúng ta thấy rằng năng lực toán của học sinh Việt Nam tương đối đồng đều, đa số các em đều được trang bị tốt các kỹ năng toán cơ bản. Ngược lại, ở nhiều nước khác có sự chênh lệch, phân hóa cực lớn, chứng tỏ có sự bất bình đẳng trong giáo dục (OECD, 2016). Trong môn toán, học sinh Việt Nam có năng lực tư duy và suy luận toán học cơ bản ở bậc cao nhưng hệ thống giáo dục chưa phát huy tiềm năng to lớn đó. Học sinh chủ yếu đạt năng lực ở mức 3, 4 còn các mức cao 5, 6 vẫn còn thấp, các mức năng lực cao này đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng sáng tạo các kiến thức đã biết để làm nên những cái gì đó mới và không quen thuộc với những dạng toán đã được học.

2.2. Năng lực tư duy và suy luận toán học của học sinh phổ thông Việt Nam

Do trọng tâm của chương trình phổ thông hiện hành cũng như trước đây là kiến thức qui trình và việc tái tạo lại các bước giải toán một cách tuần tự để trả lời một lớp câu hỏi theo dạng nhất định, học sinh thường tự mình làm và trả lời các bài tập trong sách giáo khoa và sách bài tập một cách độc lập. Khi đặt câu hỏi cho học sinh, hầu hết

giáo viên tìm kiếm một câu trả lời “đúng” cho câu hỏi đã nêu và sẽ giải thích tại sao câu trả lời đó là đúng theo chương trình học được quy định.

Theo chúng tôi, chương trình đổi mới thực sự (nếu có) sẽ cần phải giảm số lượng các kỹ năng cơ bản và các quy trình, nhưng lại tăng các hoạt động toán thực tế, cụ thể để giúp học sinh nắm bắt các ý tưởng toán học then chốt, từ đó không ngừng phát triển tư duy toán học và các khái niệm nền tảng của môn học, tương ứng với mức độ phản ánh. Chương trình đổi mới đó, cùng với đội ngũ giáo viên sẽ chuẩn bị “*một lượng nhỏ các ý tưởng toán học lớn*” xuyên suốt theo từng mức độ tư duy của học sinh từ tiểu học đến trung học, và có khả năng vận dụng kiến thức để giải quyết các vấn đề thực tế thường ngày.

Việc đẩy mạnh nghiên cứu để mô tả các đặc trưng tư duy toán của học sinh Việt Nam trong quá trình “*giải quyết các vấn đề toán học và thực tế*” sẽ mang lại nhiều ý nghĩa cho giáo dục toán nước nhà, và tạo cơ hội báo cáo khoa học, xuất bản các ấn phẩm giáo dục toán quốc tế, cho thế giới biết những kết quả nghiên cứu về khả năng tư duy và suy luận toán học có hệ thống của học sinh Việt Nam.

Giáo viên Việt Nam hoàn toàn có khả năng thiết kế và tạo nên các hoạt động giáo dục mở để nuôi dưỡng học sinh phát triển tư duy và các suy luận có lý chỉ khi chương trình, sách giáo khoa và thi cử chú trọng vào đánh giá “*Năng lực tư duy và suy luận có hệ thống của học sinh phổ thông*” để giải quyết các vấn đề không quen thuộc, chứ không phải chỉ đề lặp lại “*tư duy đã được chế biến sẵn bởi giáo viên*” để trả lời các câu hỏi theo mẫu đề thi mà học sinh cần phải sử dụng nhiều thời gian để luyện tập. Theo truyền thống, giáo viên toán có khả năng quản lý tốt lớp học để tạo môi trường cho mọi học sinh tham gia vào các hoạt động học toán và rèn luyện các kỹ năng toán học cơ bản.

3. Thách thức và phát triển kỹ năng toán học cơ bản

3.1. Mốc son trong giáo dục toán bậc trung học của Việt Nam từ PISA 2012

Việt Nam đạt 511 điểm về Toán trên điểm trung bình của OECD là 494, xếp thứ 17 trong 65 nước có nền kinh tế phát triển hoặc đang phát triển tham gia PISA 2012. Khi so sánh kết quả đạt được với thu nhập bình quân đầu người (GDP), Việt Nam xếp vào nhóm nước có GDP gần như thấp nhất.

Chúng ta tự hào về trí tuệ của học sinh Việt Nam, xác định vị trí kỹ năng nhận thức toán học cơ bản và năng lực giải quyết vấn đề thực tế của học sinh, để từ đó tìm ra được những tiếp cận nghiên cứu giáo dục cơ bản làm cơ sở cho những đổi mới giáo dục nhằm nuôi dưỡng và phát triển tư duy toán học ở các mức cao hơn cho học sinh (Tran Vui, 2015). Đây là lần đầu tiên giáo dục phổ thông Việt Nam được đề cập trên bản đồ thế giới, ở vị trí của những nước thuộc top 20 của bảng xếp hạng, đó là các nước có học sinh trung học thể hiện tốt các lĩnh vực được đánh giá (OECD, 2014).

Kết quả này xác nhận những *kỹ năng toán học cơ bản* cần thiết của học sinh Việt Nam để phát triển giáo dục theo hướng giải quyết vấn đề thực tế mới lạ một cách sáng tạo (Bloem, 2013). Như vậy bắt đầu từ năm 2012, thế giới công nhận và đánh giá cao học sinh trung học Việt Nam có các *kỹ năng toán học cơ bản* ở mức cao. Có nhiều nước trong khu vực và trên thế giới có kinh tế giàu có hơn Việt Nam, đã đầu tư nhiều công sức vào giáo dục toán để nâng cao mức năng lực toán học cơ bản cho học sinh trong đánh giá PISA.

3.2. Thể hiện của học sinh Việt Nam trong PISA

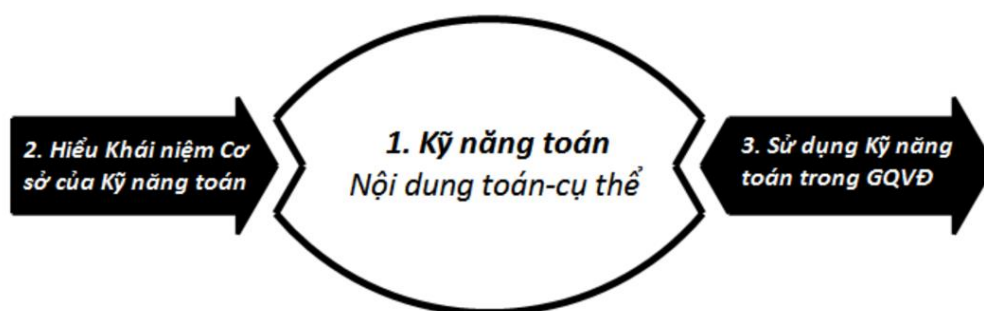
Điểm mạnh của học sinh Việt Nam trong PISA 2012 là đã thể hiện tốt các kỹ năng toán học cơ bản, cao hơn mức trung bình của OECD. Điểm yếu là việc chuyển thể không thành công các vấn đề có lời văn trong bối cảnh thực tế sang ngôn ngữ toán học để giải quyết, trong khi các em giải quyết rất tốt các vấn đề đã được chuyển thể sẵn một phần theo các gợi ý. Về chỉ số này, học sinh Việt Nam xếp hạng gần như thấp nhất trong các nước tham gia (Le Thi My Ha, 2014). Đánh giá PISA quan tâm đến các chỉ số thể hiện của học sinh tham gia ở bốn khía cạnh sau: kỹ năng toán học cơ bản, chuyển thể vấn đề có lời văn theo bối cảnh, toán học ứng dụng, và tính linh hoạt trong giải quyết vấn đề. Sự thể hiện của học sinh Việt Nam trong PISA 2012 được trình bày ở Bảng 2.

Bảng 2. Thể hiện của học sinh Việt Nam trong PISA 2012

<i>Khía cạnh</i>	<i>Kỹ năng toán học cơ bản</i>	<i>Chuyển thể vấn đề có lời văn theo bối cảnh</i>	<i>Toán học ứng dụng</i>	<i>Tính linh hoạt trong giải quyết vấn đề</i>
Xếp thứ/65	21	65	61	64
So với trung bình của OECD	Cao hơn trung bình	Thấp nhất	Thấp hơn trung bình	Gần thấp nhất

Từ Bảng 2, chúng ta thấy mặc dù kỹ năng toán học cơ bản của học sinh Việt Nam cao hơn trung bình của OECD, nhưng chỉ giải quyết được các vấn đề đã được mô hình hóa toán học một phần hay toàn bộ. Khi gặp những vấn đề có lời văn theo bối cảnh thực tế, học sinh đã không chuyển thể thành công thành các mô hình toán để giải. Học sinh khi gặp những bài toán mang tính ứng dụng, các em đã không có khả năng sáng tạo các phương án hiệu quả để giải quyết. Đặc biệt, học Việt Nam thiếu linh hoạt trong giải quyết các vấn đề thực tế không quen thuộc.

Trên thực tế vẫn có học sinh hay *học vẹt* công thức và *nhớ* cách tính toán mà không hiểu được ý nghĩa bản chất của các khái niệm toán học cơ bản có liên quan. Nhưng để vận dụng các kỹ năng toán học cơ bản để giải quyết những bài toán thực tế mới lạ mà học sinh chưa bao giờ gặp, chắc chắn đòi hỏi các em phải hiểu được các kiến thức mang tính khái niệm với nội dung toán cụ thể. Học sinh cần hiểu các khái niệm cơ sở đằng sau các kỹ năng toán cơ bản với nội dung toán-cụ thể. Học sinh Việt Nam mới chỉ dừng lại ở thành thạo các kiến thức toán cơ bản, nên cần phải biết sử dụng các kỹ năng toán học cơ bản trong giải quyết vấn đề thực tế đòi hỏi tư duy toán học bậc cao.



Hình 2. Ứng dụng vào phát triển kỹ năng toán học cơ bản.

3.3. Cơ hội cuộc sống của cá nhân khi có các kỹ năng toán học cơ bản

Thành thạo kỹ năng toán học cơ bản là một trong những mục đích lớn của các chương trình giáo dục toán trên thế giới để chuẩn bị cho học sinh có cơ hội cuộc sống cá nhân trong tương lai. Đó là một yếu tố dự báo mạnh về kết quả tích cực đối với thanh niên, ảnh hưởng đến khả năng của mình để tham gia vào giáo dục sau trung học và thu nhập trong tương lai dự kiến của các em. Khảo sát mới đây của OECD (2016) về các kỹ năng của người trưởng thành phát hiện ra rằng:

“Các kỹ năng toán học cơ bản có một ảnh hưởng rất lớn đến các cơ hội trong cuộc sống của cá nhân. Những người yếu về kỹ năng toán học sẽ gặp những hạn chế nghiêm trọng trong việc tiếp cận vào những công việc được trả lương cao hơn, và những việc làm được thưởng nhiều hơn.”

Làm thế nào mà Việt Nam có thể vượt qua những bất lợi về kinh tế xã hội để thể hiện rất tốt trong hai kỳ PISA 2012 và 2015? Trong những nghiên cứu về mối liên hệ giữa “chất lượng nền giáo dục” và “kinh tế quốc gia”, OECD (2016) rút ra kết quả đáng quan tâm: “Nền giáo dục xuất sắc không thể xảy ra nếu không có một mức phát triển kinh tế cao”. Như vậy ở Việt Nam, giáo dục phổ thông đã cung cấp tốt những kiến thức toán học cơ bản để học sinh tiếp tục học sau trung học, nhưng nền giáo dục cao đẳng, đại học chuyên nghiệp và sau đại học chưa phát triển được tiềm năng của học sinh, nên không cung cấp được nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao có kỹ năng nghề nghiệp và tri thức để chuẩn bị cho nền kinh tế (World Bank, 2013).

3.4. Những áp lực của xã hội, gia đình lên việc học của học sinh

Theo truyền thống lâu nay, dạy toán ở Việt Nam chú trọng vào thực hành giải bài tập với các nội dung toán-cụ thể. Dạy toán là để giúp học sinh hiểu sâu các khái niệm toán cơ bản và giải được bài tập toán một cách có hệ thống với suy luận chặt chẽ. Đó là một thế mạnh của giáo viên toán Việt Nam, luôn sưu tầm, tổng hợp và sáng tạo những quy trình giải toán hiệu quả để truyền lại cho học sinh của mình. Nhưng rồi, theo thời gian, các quy trình giải toán đối với các lớp bài toán cụ thể, càng ngày càng phình ra, chúng trở thành một “ngân hàng các kiến thức quy trình” với những quy trình giải toán cụ thể, khi đó môi trường học toán trở thành một “lò luyện áp suất cao”, ở đó học sinh phải dành nhiều thời gian để rèn luyện những quy trình giải toán được “tư duy sẵn” bởi giáo viên ở trên lớp, hay ở các lớp học thêm. Trong môi trường học sinh có thói quen được giáo viên bày sẵn cho cách tư duy toán học, thì đến lượt mình đối mặt với những bài toán mới lạ, không quen thuộc, các em sẽ bối rối khi tự mình tìm phương án giải và khó có được những lời giải sáng tạo. Trong môi trường học tập kiểu “lò luyện áp suất cao” như vậy, học sinh sẽ mất dần khả năng tư duy độc lập rất cần thiết cho cuộc sống và nghề nghiệp sau này.

4. Giáo viên toán trung học với phương pháp dạy để hiểu

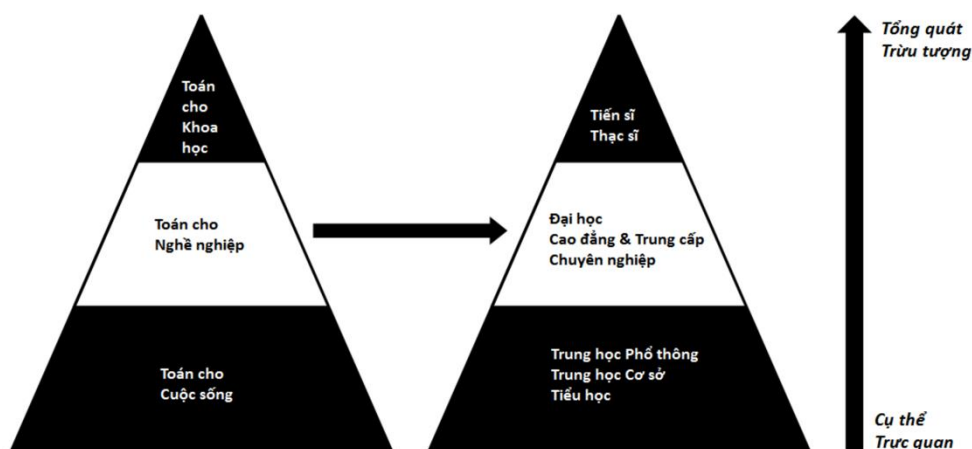
Chúng ta cần phải thừa nhận rằng việc “giáo viên được đào tạo tốt về nội dung và có phương pháp dạy học xuất sắc” là xương sống của các hệ thống giáo dục thành công trên thế giới. Nâng cao chất lượng học toán chuyển từ nhớ và thực hiện được các công

thức, thuật toán, quy trình sang hiểu các khái niệm toán học đằng sau các kỹ năng toán học cơ bản được giáo viên toán Việt Nam chú trọng thực hiện trên lớp học. Thế mạnh của giáo viên toán bậc trung học, đặc biệt là trung học phổ thông, được đào tạo với kiến thức toán học trù tượng cao nên nói chung là có kiến thức “*nội dung toán-cụ thể*” khá chắc chắn. Giáo viên toán có khả năng giải được hầu hết các bài toán với kiến thức cơ bản ở trung học theo nhiều tiếp cận khác nhau. Giáo viên luôn nỗ lực tìm kiếm những cách tốt nhất để truyền đạt cho học sinh những quy trình và thuật toán cụ thể để giải toán. Giáo viên toán đã tự mình đi theo một con đường thực tiễn sát với mọi loại chương trình đổi mới trong thời gian vừa qua. Họ đã dạy toán theo bản chất tự nhiên của toán học là trù tượng, chính xác, cấu trúc và có hệ thống và được chuyển thể sát với đối tượng học sinh. GV luôn biết không ngừng tự đổi mới dạy học toán phù hợp với đối tượng mình đang dạy. *Thầy cô nhìn vào mắt học trò sáng lên vì hiểu toán để dạy*. Trong khi đó, nhà quản lý nhìn vào *giáo án có tính đối phó sát chương trình để đánh giá và xếp loại giáo viên*.

Giáo viên dạy để học sinh hiểu được kiến thức toán và áp dụng kiến thức được học để giải các bài tập trong sách giáo khoa theo chương trình một cách hiệu quả nhất. Điều đó đòi hỏi học sinh phải hiểu sâu các khái niệm cơ bản cùng với việc thành thạo các kỹ năng toán cơ bản để áp dụng vào giải toán. Giáo viên toán phân biệt rất rõ giữa học nông và học sâu, học nông chỉ giúp học sinh tái tạo lại các công thức, thuật toán, quy trình giải mà không cần hiểu các khái niệm liên quan. Giáo viên phải thấy được những thể hiện học sinh hiểu sâu bài học và áp dụng vào giải toán qua các bài làm của học sinh. Giáo viên toán đánh giá minh mạch khả năng hiểu toán và khả năng vận dụng giải toán của các em. Nếu học sinh chỉ mới nhớ thuộc lòng công thức và qui tắc tính toán mà không hiểu thì không thể vận dụng được kiến thức toán của mình để giải quyết các vấn đề mới lạ không quen thuộc với các em. Thật may mắn là giáo viên toán Việt Nam đã biết vận dụng một cách hài hòa giữa “*dạy công thức và quy tắc*” với “*dạy để hiểu*”. Đôi khi người giáo viên đứng lớp “*bỏ qua*” các lý thuyết đằng sau các tiếp cận dạy học. Họ phân biệt giữa dạy học toán theo những kỹ năng, thuật toán, quy trình để giải một lớp bài toán cụ thể với dạy toán để học sinh hiểu được các khái niệm và tính chất then chốt của toán học phổ thông. Việc dạy toán để hiểu với những thực hành công thức và qui tắc có nội dung toán-cụ thể sẽ giúp học sinh nắm chắc các khái niệm đã học, từ đó vận dụng cả hai loại kiến thức khái niệm và quy trình vào giải quyết vấn đề.

5. Kết luận

Giải quyết vấn đề toán thực tế theo tình huống trong nền kinh tế là một năng lực cần thiết cho mọi công dân có mong muốn tham gia và đóng góp vào sự phát triển kinh tế xã hội. Việc trang bị cho học sinh phổ thông những *kiến thức toán học cơ bản* là “*nền tảng cần thiết*” đối với mọi quốc gia đang phát triển chuẩn bị nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao cho nền kinh tế. Nền giáo dục xuất sắc không thể xảy ra nếu không có một mức phát triển kinh tế cao (Asadullah & Perera, 2015). Nền giáo dục ở đây được hiểu là cả hệ thống giáo dục từ mầm non đến sau đại học. Theo đánh giá PISA 2012, và 2015, học sinh 15 tuổi của Việt Nam *thành thạo kỹ năng toán học cơ bản ở mức cao*, trên trung bình so với các nước trong khu vực và trên thế giới. Trong khi nền kinh tế Việt Nam đang phát triển ở *mức thấp*, trở thành một *ngoại lệ* trong giáo dục theo kết quả của OECD (2016).



Hình 3. Toán cho nghề nghiệp ở Cao đẳng và Đại học gắn liền bối cảnh thực tế.

Một số nước châu Á đã nhận thức được “*nền kinh tế tri thức thịnh vượng*” và chuyển trọng tâm chương trình toán của quốc gia mình hướng về “*giải quyết vấn đề toán thực tế*” và làm thế nào để nó trở thành một phần chính của chương trình bậc trung học, cao đẳng và đại học hơn là một thực thể tách biệt thường bị bỏ qua. Đối với Việt Nam, chúng ta cần phải biết phát huy “*nền tảng cần thiết*” của học sinh về việc “*thành thạo kỹ năng toán học cơ bản*” để xây dựng các chương trình ở Cao đẳng và Đại học gắn liền với bối cảnh thực tế để đào tạo được nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao.

Qua những việc phân tích các kết quả nghiên cứu chúng ta có thể kết luận: Việt Nam có được điều kiện cần là học sinh trung học có các kỹ năng toán cơ bản làm nền tảng vững chắc để đào tạo nguồn nhân lực trẻ chất lượng cao có trình độ chuyên nghiệp, cao đẳng, đại học và trên đại học cho nền kinh tế nước nhà.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Asadullah, N. M. & Perera, D. L. (2015). *Vietnam's PISA surprise*. The Diplomat, <http://thediplomat.com/2015/11/vietnams-pisa-surprise/>, truy cập 27/2/2017.
2. Bloem, S. (2013). *PISA in low and middle income countries*. OECD Education Working Paper No. 93. OECD.
3. Le Thi My Ha (2014). *Education assessment system and PISA 2012 in Vietnam*. PISA Vietnam. Paper presented at SEAMEO RECSAM, November, 2014.
4. Nguyễn Xuân Diện, Tạ Duy Phượng (2013). Sơ lược giới thiệu di sản sách toán trong thư tịch Hán Nôm, Kỷ yếu Hội thảo khoa học *Các chuyên đề toán chọn lọc theo xu hướng Hội nhập Quốc tế*, Nam Định, 2013, tr. 96-117.
5. OECD (2014). *PISA 2012 results in focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. OECD, Paris, France.
6. OECD (2016), *The Survey of Adult Skills: Reader's Companion*, Second Edition, OECD Skills Studies, OECD Publishing, Paris.
7. Tran Vui (2015). Lesson study as a means to innovation for teaching and learning mathematics in Vietnam: Research lesson on the the property of the three medians in a triangle. In Inprasitha M., & Isoda M., & Iverson W. P., & Yeap H. B.

(Eds), *Lesson study: Challenges in mathematics education. Series on Mathematics Educations*, Vol. 3, World Scientific, Singapore, p. 273-292.

8. Volkov, A. (2013). An early Japanese work on Chinese mathematics in Vietnam: Yoshio Mikami's study of the Vietnamese mathematical treatise Chi Minh Toan Phap. In Knobloch, E., & Komatsu, H., & Liu, D. (Eds), *Seki, founder of modern mathematics in Japan: A commemoration on his tercentenary*. Springer, Japan.

9. World Bank (2013). *Skilling up Vietnam: Preparing the workforce for a modern market economy-Vietnam Development Report, Main report*. Washington DC; World Bank.

MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP CỦA SINH VIÊN KHI TIẾP CẬN, VẬN DỤNG KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ GIẢI PHÁP

Thái Trần Phương Thảo^{*}, Phạm Sỹ Nam^{**}

Tóm tắt

Biến ngẫu nhiên (BNN) và các ứng dụng của nó giữ một vai trò quan trọng trong các hoạt động thực tiễn và nghiên cứu khoa học. Khái niệm biến ngẫu nhiên là một khái niệm khó tiếp cận, trong quá trình dạy học Xác Suất - Thống Kê sinh viên (SV) thường gặp phải sai lầm khi tiếp cận và vận dụng khái niệm này. Hơn nữa, những sai lầm liên quan đến khái niệm của BNN ảnh hưởng đến việc xác định luật phân phối xác suất của nó. Bài báo phân tích những sai lầm thường gặp của SV, từ đó vận dụng thuyết kiến tạo đề xuất các giải pháp nhằm giúp SV sửa chữa những sai lầm này.

Từ khoá: biến ngẫu nhiên, sai lầm, lý thuyết kiến tạo.

Abstract

Random variables and its applications have an important role in varied fields of practical and scientific activity. Random variables concept is really hard to approach, in the Probability and Statistics teaching process, students often have mistakes related to approach and apply this concept. Moreover, these errors affect to define the probability distribution law. This article analyzes those common errors thereby, we apply constructivism to propose solutions to correct their errors.

Keywords: random variables, error, constructivism.

^{*} ThS, Đại học Sài Gòn

^{**} TS, Đại học Sài Gòn

TIỂU BAN 2

CÁC NGHIÊN CỨU VỀ GIÁO DỤC BẬC TIỂU HỌC

Danielly Kaspary – Marilena Bittar

Yasmina Chaachoua

Bùi Anh Kiệt – Nguyễn Chí Thành

Bùi Quang Thịnh – Ngô Thị Mỹ Phương

Lê Viết Minh Triết – Nguyễn Phú Lộc

Ngô Trúc Phương

Nguyễn Tiến Trung – Hoàng Ngọc Anh – Nguyễn Mạnh Tuấn

Phạm Sỹ Nam – Phạm Thị Thanh Tú

Trần Đức Thuận

Trịnh Duy Trọng

Vũ Quốc Chung – Nguyễn Hữu Tuyền

Vũ Như Thư Hương

L'OSTENSIF COMME UN FACTEUR DE CARACTÉRISATION DE LA TECHNIQUE: L'EXEMPLE DU CHAMP ADDITIF DANS DES MANUELS BRÉSILIENS

Danielly Kaspary*, Marilena Bittar**

Résumé

Les ostensifs constituent la partie visible de l'activité mathématique. Du fait, ils constituent des données empiriques pour les analyses didactiques afin de comprendre l'activité mathématique.

Dans ce texte, nous présentons l'analyse de caractérisation des techniques relatives aux types de tâches relevant du champ additif à partir des ostensifs mobilisés. La notion de praxéologie nous permet de modéliser les mathématiques pratiquées dans une institution. Pour cela, nous analysons une collection de manuels brésiliens destinée à l'école primaire, dans lesquels il est possible de trouver une grande variété d'ostensifs.

La non-neutralité de l'ostensif est un aspect fondamental pour comprendre une activité mathématique. L'analyse des fonctions instrumentale et sémiotique des ostensifs nous offre des possibilités pour discuter cet aspect. Notre intention est de mettre en évidence le fait que le choix des ostensifs utilisés influence fortement une proposition d'étude d'un objet mathématique.

Mots-clés: *Ostensifs, Valence instrumentale et sémiotique, Théorie Anthropologique du Didactique, Champ additif.*

Préface

Les conditions et les restrictions qui gouvernent la vie d'une institution nous guident à penser au relativisme des objets qui y vivent et que peuvent vivre dans une autre institution. La Théorie Anthropologique du Didactique nous met dans ce mouvement de percevoir les particularités et les métamorphoses qu'un certain objet est subi pour pouvoir exister. Cette existence est liée toujours aux façons lesquelles on peut évoquer cet objet. Dans notre débat, on parlera pour cela des ostensifs et non-ostensifs :

Le double questionnement que nous venons d'explicitier – le problème de la « nature » des objets mathématiques et celui de leur « fonction » dans l'activité mathématique – nous a conduit à établir une dichotomie fondamentale en distinguant deux types d'objets: les objets ostensifs, d'une part, les objets non ostensifs, d'autre part. Nous parlerons d'objet ostensif – du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes: ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de

* Université Fédéral du Mato Grosso do Sul – Brésil

** Université Fédéral du Mato Grosso do Sul – Brésil

certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). (BOSCH et CHEVALLARD, 1999, p. 10)

En ce sens, pour nous les *ostensifs* nous semblent être un des éléments incontournables pour la compréhension de l'activité mathématique. Pour cela, on essaiera de montrer l'avantage d'utiliser cet élément comme un facteur de caractérisation des *techniques* utilisées dans l'étude des mathématiques.

On illustre cette discussion à partir de la recherche développée par Kaspary (2014), où on trouve l'analyse d'une collection de manuels scolaires brésiliens destinés à l'école primaire, spécialement dans ce concerne l'étude du champ additif. L'analyse a été réalisée à partir du point de vue de l'organisation praxéologique (Chevallard, 1999). Ainsi, les mathématiques présentées dans les manuels scolaires ont été modélisées à travers des notions *type de tâche, technique, technologie* et *théorie*.

On n'a pas la prétention de présenter ici une extensive discussion théorique. Une étude plus approfondie peut être guidée par la bibliographie présente à la fin de cet article. On continue le texte en présentant quelques exemples qui nous permettent de réfléchir sur le rôle des ostensifs dans l'activité mathématique.

La non neutralité des ostensifs dans l'activité mathématique

Imaginez que vous avez la mission de découvrir le nombre des faces, des arêtes et des sommets d'un polyèdre donné (vous ne savez pas la réponse). Pour répondre ces trois types de tâches vous pouvez choisir entre la représentation en patron ou la représentation en perspective cavalière de ce polyèdre. Laquelle allez-vous choisir?

T1 : Compter les faces d'un polyèdre.

T2 : Compter les arêtes d'un polyèdre.

T3 : Compter les sommets d'un polyèdre.

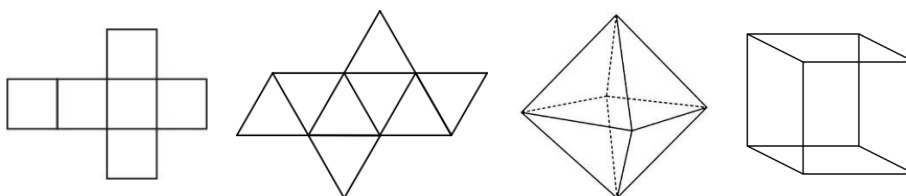


Figure 1: Représentations des polyèdres

Pour répondre T1, la représentation qui semble être plus efficace est la représentation en patron : on peut mieux s'organiser pour compter lorsque les faces sont dans un même plan, ce qui fonctionne différemment dans les cas T2 et T3. Si, de façon aléatoire et sans prévoir les conséquences, on choisit la représentation planifiée pour découvrir la quantité des sommets d'un icosaèdre, on aura clairement un défi plus sophistiqué que si on utilisait la représentation en perspective cavalière.

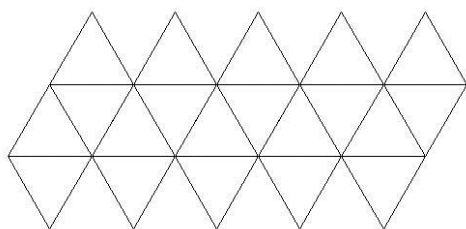


Figure 2: Représentation planifiée d'un icosaèdre

On remarque, alors, que le choix du *bon instrument* pour répondre ces trois types de tâches modifie *l'expérience* de l'activité. L'essentiel est de se rendre compte que différents ostensifs peuvent provoquer changements significatifs dans l'activité mathématique. En fonction *des outils* qu'on utilise pour répondre les tâches qui nous sont présentées, certains non-ostensifs (et peut-être pas d'autres) sont évoqués. Pour cela, la naïveté d'une hiérarchie entre ostensifs et non-ostensifs doit être réfutée pour, ainsi, être possible de mettre en évidence le rôle essentiel des ostensifs dans la compréhension des activités mathématiques.

« À cela s'oppose une vision matérialiste qui rappelle que l'activité mathématique est, comme toute activité humaine, une activité matérielle, et que les non-ostensifs ne sauraient exister sans les ostensifs, non plus d'ailleurs que ceux-ci sans ceux-là. » (CHEVALLARD, 1994, p. 06)

Les techniques et les ostensifs : une relation intrinsèque

« Revenant aux notions fondamentales de l'approche anthropologique, nous dirons maintenant que la mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs. » (BOSCH et CHEVALLARD, 1999, p. 15)

La notion d'ostensif arrive à notre travail (Kaspary, 2014) quand on remarque la pluralité et l'importance donnée aux différentes *représentations* dans l'étude du champ additif à l'école primaire, spécialement par rapport aux différentes techniques.

Compter d'un en un est, généralement, la première façon utilisée pour trouver le total d'éléments d'un ensemble. C'est *une stratégie* souvent mobilisée au début de l'étude du champ additif pour trouver le total de l'union de deux ou plus ensembles. Cependant, on a trouvé au manuel scolaire divers moyens de *compter d'un en un*. Voici trois façons de répondre aux tâches « $2 + 7$ », « $5 + 2$ » et « $5 + 3$ »:

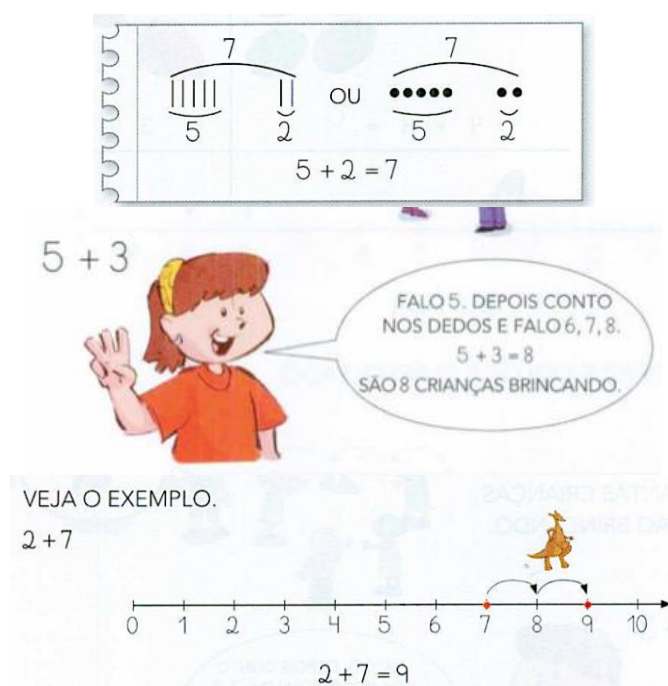


Figure 3: Ostensifs différents

Bien qu'il y ait un noyau commun dans ces trois façons de répondre ces tâches¹ (« compter d'un en un »), ces exemples nous présentent effectivement trois *techniques* différentes: ce qui les différencient sont les ostensifs employés².

On a alors décidé de différencier les techniques à partir des ostensifs mobilisés. C'est-à-dire que la notion d'ostensif a été incorporée à la technique, et alors, *compter d'un en un* n'est plus suffisant pour caractériser une technique; il manquait répondre encore: comment/avec quoi les élèves³ doivent compter d'un en un? Ainsi, les ostensifs devenaient des ingrédients fondamentaux pour décrire les techniques.

Ce choix nous a permis ...

Assumer les ostensifs comme un ingrédient fondamental dans la description des techniques nous a permis de mettre en évidence quelques aspects intéressants pour comprendre l'activité mathématique. Dans ce texte, on présente trois de ces points qu'on considère significatifs.

1) La portée de la technique en fonction des ostensifs

On *mesure* la portée d'une technique à partir d'analyse des tâches qu'elle peut répondre. En reprenant le type de tâche « Calculer $a + b$, où a et b sont nombres entières », on remarque que les techniques avant présentées ont une portée modeste, limitée aux cas où a et b sont nombres relativement *petits*. Comme arrive dans ce cas-là, souvent, la portée de la technique est justifiée par les ostensifs employés. Représenter plus de 20 unités avec des signes est, au moins, fatigant; ce qui devient impossible avec les doigts⁴.

Dans notre travail (Kaspary, 2014), on a remarqué que par conséquence de l'expansion des nombres entières, plusieurs ostensifs sont abandonnés par leur faible *valence instrumentale*⁵. Pour cela, on voit le besoin de préparer de nouvelles techniques plus efficaces. C'est dans cette quête et construction des techniques qu'on remarque des aspects sur l'évolution praxéologique, comme la réduction ostensive.

2) Les différentes significations que les ostensifs évoquent à l'activité mathématique

Quand la droite numérique est utilisée pour répondre la tâche « $5 - 3$ » certains non-ostensifs sont évoqués. Ceux-ci ne sont pas nécessairement présents quand un autre ostensif est mobilisé pour répondre cette même tâche. Par exemple, l'aspect ordinal *trouvé* dans la droite numérique n'est pas présent quand on utilise *le matériel Cuisinaire*.

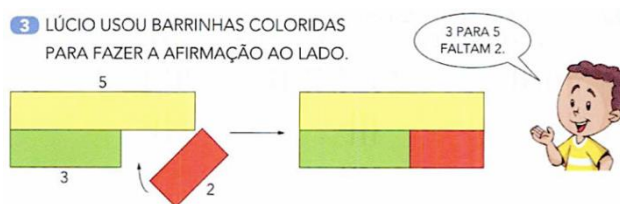


Figure 4 : Matériel Cuisinaire

¹ Lesquelles on peut décrire comme un type de tâche « Calculer $a + b$, où a et b sont nombres entières ».

² Bien entendu que chaque ostensif présenté est *instrumentalisé* de sa propre façon et évoquent des *significations* différentes.

³ Ce qui nous intéresse est comprendre des *praxéologies proposées* pour l'école primaire, mais la notion de sujet et d'institution peuvent être agrandies.

⁴ Sauf quelque adaptation : chaque doigt passe à représenter trois unités, par exemple.

⁵ "Dire qu'un ostensif a une valence instrumentale signifie qu'il permet d'agir, de travailler." (CHEVALLARD, 1994, p. 06)

C'est-à-dire que la *valence sémiotique*⁶ des ostensifs que les techniques mettent en œuvre influencent et devient un aspect important pour comprendre quelles sont les non-ostensifs en jeu dans l'activité mathématique.

3) Les techniques comme éléments technologiques à partir de l'évolution de la praxéologie

La praxéologie souffre des changements au cours du temps en fonction des nouvelles tâches (encore *problématiques*) qui doivent être répondus, ce qui exige également l'élaboration de nouvelles techniques⁷. On va dire, alors, que la praxéologie évolue. Dans ce mouvement, on remarque le changement de statuts de certaines techniques : la façon de répondre une tâche devient aussi une façon de justifier et construire une autre technique plus efficace. C'est-à-dire qu'une technique peut devenir, une partie de l'environnement technologique par rapport à une autre technique. Pour exemplifier :

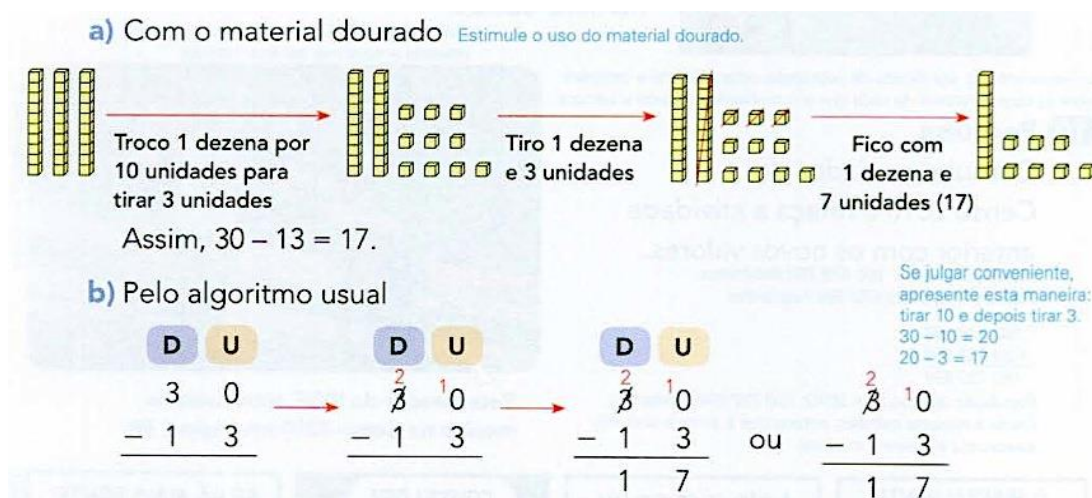


Figure 5 : Techniques et technologie

On peut voir dans l'image deux façons de répondre la tâche « $30 - 13$ ». On remarque que l'ordre de présentation de ces deux techniques n'est pas arbitraire, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un choix qui a une raison explicite: justifier l'algorithme usuel. La première technique permet de justifier la deuxième technique, et c'est pour cela qu'on peut dire que la première technique gagne une nature technologique à ce moment-là. Et, comme les techniques sont constituées aussi par les ostensifs mobilisés, on peut analyser dans cette évolution le rôle de ces ostensifs. Dans ce cas-là, la justification est présentée à partir des ostensifs qui permettent de *montrer le processus optimisé* de l'algorithme.

Pour finaliser

Dans ce texte, certains aspects pourraient être encore largement discutés, ce qu'on attend de faire à d'autres *moments*. Maintenant, on dit à *bientôt* avec Bosch et Chevallard avec l'intention de dire qu'il y a beaucoup de choses à *prendre en compte* :

⁶ "Dire qu'un ostensif a une valence sémiotique signifie qu'il permet de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail fait, le travail en train de se faire, et d'envisager le travail à faire (...)" (CHEVALLARD, 1994, p. 06).

⁷ Et d'un bloc technologique-théorique plus *mature*.

On comprend alors que les mathématiques ne nous apparaissent pas spontanément comme une activité au sens propre, économique, du mot, c'est-à-dire comme un agir où interviennent des acteurs et des objets matériels - instruments qui prolongent le corps pour en augmenter la capacité (en force, en précision, etc.), ou éléments externes contre lesquels l'action se réalise. La conceptualisation courante de l'activité mathématique tend à refouler les outils matériels que celle-ci engage et, si elle prend en compte ces objets sensibles particuliers que sont les discours, écritures et graphismes, c'est pour se centrer, non sur ces objets eux-mêmes (et les façons de les manipuler), mais sur ce à quoi ils sont censés renvoyer, ce qu'ils « représentent » ou « signifient », bref: leur « sens ». Pour faire des mathématiques on a besoin de discours, de figures et de symboles, mais ce qui est important serait au-delà des mots et des écritures. Le point de vue dominant peut à ce titre être considéré comme idéaliste au sens où il semble ne tenir compte que d'un aspect seulement de l'activité mathématique concrètement observable: sa fonction signifiante, productrice de concepts. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 12)

REFERENCES

1. Bittar, M., Freitas, J.L.M., & Pais, L.C. (2013) Técnicas e tecnologias com as operações aritméticas nos anos iniciais do ensino fundamental. *A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas*. Porto Alegre: Penso, pp. 15 – 48.
2. Bosh, M., Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n°1, pp. 77 – 124.
3. Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.
4. Chevallard, Y. (1994) Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis*, pp. 190-200.
5. Kaspary, D. (2014) *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental*. (Mémoire), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande.
6. Kaspary, D., Bittar, M. (2014) A redução ostensiva no estudo das operações de adição e de subtração em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, v. 2, pp. 3-16.

CÁC BIỂU ĐẠT ĐÓNG VAI TRÒ NHÂN TỐ ĐẶC TRƯNG CHO KỸ THUẬT: VÍ DỤ VỀ TRƯỜNG CỘNG TÍNH TRONG SÁCH GIÁO KHOA BRAZIN

Danielly Kasparý*, Marilena Bittar**

Résumé

Les ostensifs constituent la partie visible de l'activité mathématique. Du fait, ils constituent des données empiriques pour les analyses didactiques afin de comprendre l'activité mathématique.

Dans ce texte, nous présentons l'analyse de caractérisation des techniques relatives aux types de tâches relevant du champ additif à partir des ostensifs mobilisés. La notion de praxéologie nous permet de modéliser les mathématiques pratiquées dans une institution. Pour cela, nous analysons une collection de manuels brésiliens destinée à l'école primaire, dans lesquels il est possible de trouver une grande variété d'ostensifs.

La non-neutralité de l'ostensif est un aspect fondamental pour comprendre une activité mathématique. L'analyse des fonctions instrumentales et sémiotique des ostensifs nous offre des possibilités pour discuter cet aspect. Notre intention est de mettre en évidence le fait que le choix des ostensifs utilisés influence fortement une proposition d'étude d'un objet mathématique.

Mots-clés: *Ostensifs, Valence instrumentale et sémiotique, Théorie Anthropologique du Didactique, Champ additif.*

Tóm tắt

Các biểu đạt tạo nên phần có thể nhìn thấy được của Toán học. Trong thực tế, các biểu đạt tạo nên dữ liệu thực nghiệm cho các phân tích didactic để hiểu được các hoạt động toán học.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày phần phân tích các đặc trưng của kỹ thuật liên quan đến các kiểu nhiệm vụ gắn với trường cộng tính thông qua các biểu đạt được vận hành. Khái niệm praxéologie cho phép chúng tôi mô hình hóa toán thực hành trong một thể chế. Để làm điều đó, chúng tôi phân tích một bộ sách giáo khoa tiểu học của Brasil mà trong đó, có thể tìm thấy sự đa dạng khá lớn về các biểu đạt.

Tính phi trung lập của các biểu đạt là một khía cạnh cơ bản để hiểu được một hoạt động toán học. Việc phân tích các chức năng công cụ và ký hiệu của các biểu đạt sẽ cho chúng tôi khả năng để thảo luận về khía cạnh này. Dụng ý của chúng tôi là làm rõ việc lựa chọn các biểu đạt được sử dụng đã ảnh hưởng mạnh lên đề xuất nghiên cứu một đối tượng toán học.

Từ khóa: *Cái biểu đạt, Hóa trị công cụ và ký hiệu, Thuyết nhân học didactic, Trường cộng tính.*

Mở đầu

Các điều kiện và các ràng buộc chi phối sự sống còn của một thể chế dẫn chúng tôi đến suy nghĩ về sự liên quan của các đối tượng sống trong thể chế đó cũng có thể

* Đại học Fédéral du Mato Grosso do Sul – Brasil.

** Đại học Fédéral du Mato Grosso do Sul – Brasil.

sống trong một thể chế khác. Thuyết nhân học của didactic đặt chúng tôi trong sự vận hành này để nhận thức được những điểm riêng biệt và các biến hóa mà một đối tượng phải chịu đựng để có thể tồn tại. Sự tồn tại này luôn gắn liền với cách mà người ta có thể gọi lại đối tượng đó. Trong tham luận này, chúng tôi sẽ nói về sự tồn tại của các cái biểu đạt và các cái không biểu đạt.

Vấn đề kép mà chúng tôi vừa giải thích – vấn đề « bản chất » của các đối tượng toán học và vấn đề « chức năng » của nó trong hoạt động toán học – dẫn chúng tôi đến việc thiết lập một cơ chế để phân biệt hai loại đối tượng : một bên là đối tượng biểu đạt và bên kia là các đối tượng không có biểu đạt. Chúng tôi sẽ nói về các đối tượng biểu đạt – tiếng Latinh là *ostendre*, « chỉ ra, trình bày với sự khẳng khẳng » - để tham chiếu đến mọi đối tượng có bản chất nhạy, một vật chất nhất định nào đó làm cho con người có thể cảm nhận được. Như vậy, một đối tượng vật chất nào đó có thể là những đối tượng vật chất đặc biệt như các âm thanh (trong số đó là các ngôn từ), các đồ hình (trong số đó là âm tiết để viết ngôn ngữ tự nhiên hay cấu thành ngôn ngữ chính thức) và các cử chỉ. Các đối tượng không biểu đạt được định nghĩa là tất cả các « đối tượng » như các ý tưởng, các trực giác và các khái niệm tồn tại một cách thể chế - với nghĩa là người ta gán sự tồn tại ấy cho chúng – mà không thể nhìn thấy, nói, nghe, nhận thức hay chỉ ra bởi chính bản thân nó được: Chúng chỉ có thể được gọi lại hay không gọi lại được bằng việc thao tác thích hợp trên các đối tượng biểu đạt khác gắn liền với các đối tượng không biểu đạt này (một từ, một câu, một đồ hình, một bài viết, một cử chỉ hay cả một bài diễn văn). (BOSCH và CHEVALLARD, 1999, tr. 10)

Theo nghĩa này, đối với chúng tôi, các *biểu đạt* dường như là một trong các yếu tố quan trọng để hiểu được hoạt động toán học. Chúng tôi sẽ thử chỉ ra sự thuận lợi của việc dùng các yếu tố này như một nhân tố đặc trưng cho *các kỹ thuật* được sử dụng trong nghiên cứu toán học.

Chúng tôi sẽ minh họa từ nghiên cứu được phát triển bởi Kaspary (2014), trong đó chúng tôi nhắm đến việc phân tích một bộ sách giáo khoa tiểu học Brasil đặc biệt nhắm đến trường cộng. Phân tích này được thực hiện theo quan điểm tổ chức praxéologie (Chevallard, 1999). Như vậy, toán học được trình bày trong các sách giáo khoa đã được mô hình hóa bởi các khái niệm *kiểu nhiệm vụ*, *kỹ thuật*, *công nghệ* và *lý thuyết*.

Chúng tôi không kỳ vọng trình bày một thảo luận mang tính lý thuyết ở đây. Một nghiên cứu sâu hơn có thể được dẫn dắt từ tài liệu tham khảo ở cuối bài báo này. Chúng tôi tiếp tục trình bày vài ví dụ mà chúng cho phép chúng tôi xem lại vai trò của các biểu đạt trong hoạt động toán học.

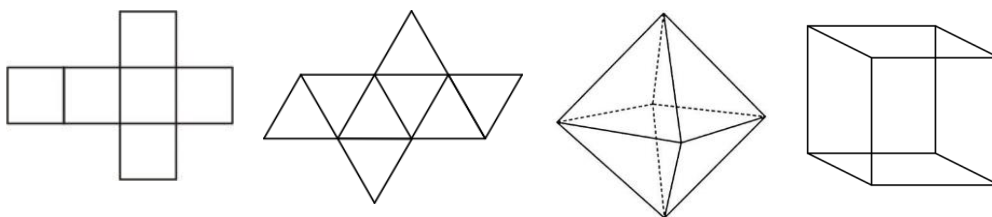
Tính phi trung lập của biểu đạt trong hoạt động toán học

Hãy tưởng tượng rằng bạn có nhiệm vụ khám phá số mặt, số cạnh và số đỉnh của một khối đa diện cho trước (bạn không biết câu trả lời). Để trả lời ba kiểu nhiệm vụ này bạn có thể chọn cách biểu diễn khai triển phẳng hay biểu diễn phối cảnh của khối đa diện. Bạn sẽ chọn biểu diễn nào?

T1 : Đếm số mặt của một khối đa diện.

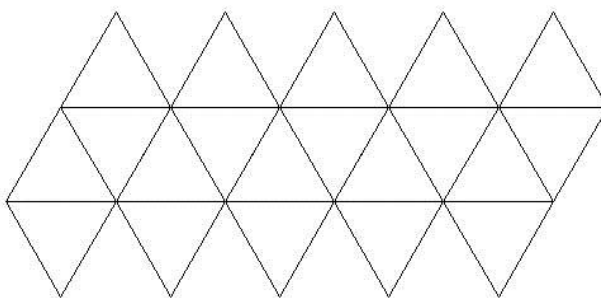
T2 : Đếm số cạnh của một khối đa diện.

T3 : Đếm số đỉnh của một khối đa diện.



Hình 1 : Các biểu diễn của khối đa diện

Để trả lời cho T1, dường như biểu diễn khai triển phẳng là hiệu quả nhất : người ta có thể đếm một cách tốt nhất khi các mặt nằm trên cùng một mặt phẳng, nhưng điều này lại khác hẳn đối với trường hợp T2, T3. Nếu chọn một cách ngẫu nhiên mà không màng đến hậu quả, thì với biểu diễn phẳng việc tính số đỉnh sẽ là một thách thức phức tạp hơn hẳn so với biểu diễn phối cảnh.



Hình 2: Biểu diễn phẳng của một khối đa diện đều

Chúng tôi đề ý rằng việc chọn *công cụ tốt* để trả lời ba kiểu nhiệm vụ này đã thay đổi kinh nghiệm qua hoạt động. Điều quan trọng là nhận ra rằng các biểu đạt khác nhau có thể gây ra những thay đổi có ý nghĩa trong hoạt động toán học. Theo *các công cụ* được dùng để giải quyết các nhiệm vụ đã trình bày ở trên, một số phi biểu đạt (có thể là không có cái khác) được gọi lại. Để làm điều đó, cần bỏ đi sự phân cấp sơ sài giữa cái biểu đạt và cái phi biểu đạt để làm nổi bật vai trò quan trọng của các biểu đạt trong việc tìm hiểu các hoạt động toán học.

« *Đối lập với quan điểm duy vật nói rằng hoạt động toán học cũng như mọi hoạt động của con người, nó là một hoạt động cụ thể, cho nên cái phi biểu đạt sẽ không tồn tại mà không có cái biểu đạt và ngược lại* » (CHEVALLARD, 1994, p. 06)

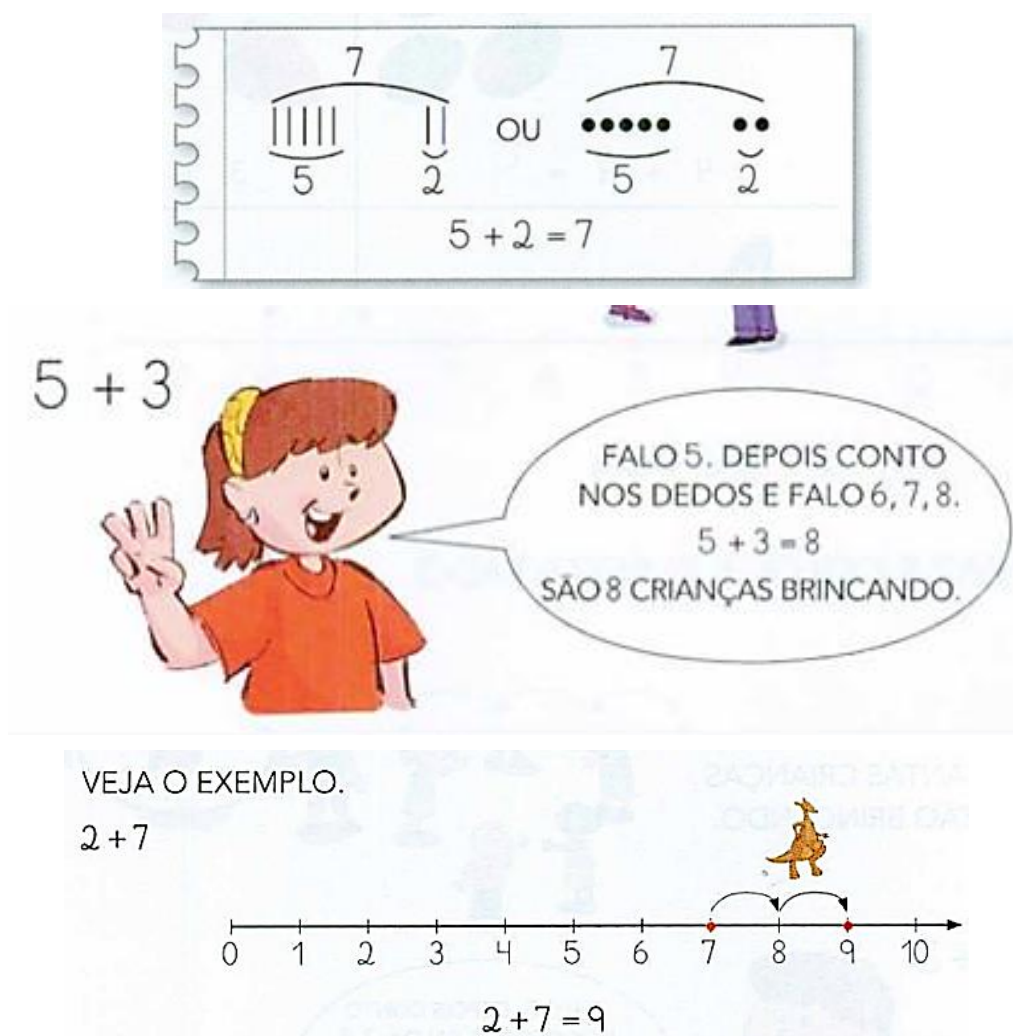
Các kỹ thuật và các cách biểu đạt : một mối quan hệ nội tại

« *Quay về với các khái niệm cơ bản của tiếp cận nhân học, bây giờ chúng tôi sẽ nói về việc thực hiện một kỹ thuật được giải thích bởi một chuỗi thao tác các biểu đạt được thiết lập bởi các phi biểu đạt* » (BOSCH et CHEVALLARD, 1999, p. 15)

Khái niệm biểu đạt được chúng tôi chọn trong công trình nghiên cứu (Kaspary, 2014) khi chúng tôi nhận xét thấy phần lớn dữ liệu quan trọng được trình bày khác nhau trong nghiên cứu trường cộng tính ở tiểu học, đặc biệt đối với các kỹ thuật khác nhau.

Một cách tổng quát, *đếm từng cái một* là cách đầu tiên được dùng để tìm ra tất cả các phần tử của tập hợp. Đó là một chiến lược thường vận hành lúc đầu trong nghiên cứu trường cộng tính để tìm ra tổng của phần hợp hai hay nhiều tập hợp. Tuy nhiên,

chúng tôi nhận thấy rằng trong sách giáo khoa có nhiều phương tiện để *đếm từng cái một*. Đây là ba cách để giải quyết các nhiệm vụ « $2 + 7$ », « $5 + 2$ » và « $5 + 3$ »:



Hình 3: Các cách biểu đạt khác nhau

Mặc dù có điểm chung trong ba cách trả lời cho các nhiệm vụ (đếm từng cái một), các ví dụ này lần lượt trình bày ba kỹ thuật khác nhau: chính các cách biểu đạt được sử dụng ở đây đã khiến các kỹ thuật trở nên khác biệt¹.

Vậy nên chúng tôi đã quyết định phân biệt các kỹ thuật theo các biểu đạt được vận hành. Nghĩa là khái niệm các biểu đạt được tích hợp vào trong kỹ thuật và vậy nên đếm từng cái một không đủ để đặc trưng cho kỹ thuật nữa, cái thiếu chính là: làm sao/với cái gì thì học sinh phải đếm từng cái một? Cũng vậy, các biểu đạt trở thành các vật liệu cơ bản để mô tả các kỹ thuật.

Sự chọn lựa này cho phép chúng tôi ...

Tổng hợp các cách biểu đạt như một nguyên vật liệu cơ bản trong việc mô tả các kỹ thuật cho phép làm sáng tỏ vài khía cạnh thú vị để hiểu được hoạt động toán học. Trong bài viết này, chúng tôi trình bày ba điểm mà chúng tôi cho là có ý nghĩa.

¹ Rõ ràng là mỗi cách biểu đạt được trình bày đã được công cụ hoá theo cách riêng và gọi ra những *nghĩa* khác nhau.

1) Phạm vi của kỹ thuật theo các biểu đạt

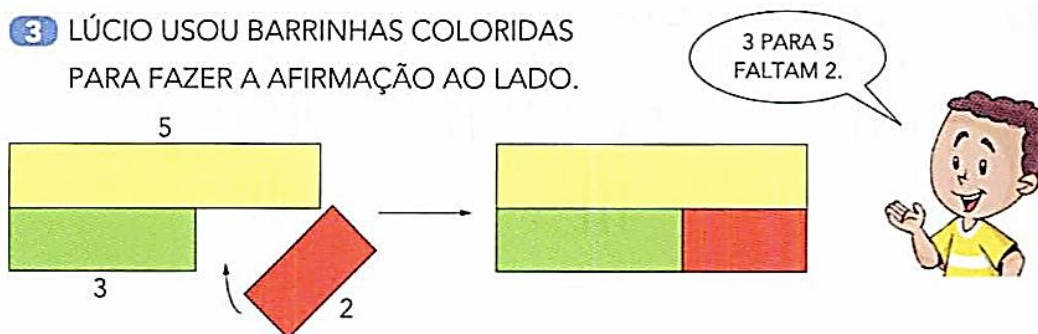
Chúng tôi *đo* phạm vi của một kỹ thuật từ việc phân tích các nhiệm vụ mà kỹ thuật này có thể giải quyết được. Xét nhiệm vụ « tính $a + b$, trong đó a và b là các số nguyên », chúng tôi nhận thấy rằng các kỹ thuật trước khi được trình bày lại có phạm vi khiêm tốn, giới hạn trong trường hợp a và b là các số tương đối *nhỏ*.

Như trong trường hợp này, phạm vi của kỹ thuật thường được hợp thức bởi các cách biểu đạt được dùng đến. Biểu diễn hơn 20 đơn vị bằng các dấu hiệu quả là vất vả nhưng lại không thể biểu diễn bằng các ngón tay² được.

Trong công trình của chúng tôi (Kaspary, 2014), chúng tôi đã ghi nhận rằng do hậu quả của việc mở rộng các số nguyên, nhiều cách biểu đạt đã bị bỏ rơi do *tính công cụ*³ yếu kém. Vì thế, ta cần chuẩn bị các kỹ thuật mới hiệu quả hơn. Chính trong việc tìm kiếm và xây dựng các kỹ thuật mà ta nhận ra các khía cạnh của sự tiến triển praxéologie như sự thu hẹp các biểu đạt.

2) Các nghĩa khác nhau mà các biểu đạt gợi ra cho hoạt động toán học

Khi đường thẳng số được dùng để giải quyết nhiệm vụ « $5 - 3$ » một số phi biểu đạt được huy động. Những cái này không thực sự cần thiết có mặt khi một cách biểu đạt khác được vận hành để giải quyết cùng nhiệm vụ. Chẳng hạn, phương diện thứ tự được *nhận ra* trong đường thẳng số lại không hiện diện khi người ta sử dụng các đồ dùng dạy học ở tiểu học.



Hình 4 : Đồ dùng học tập tiểu học

Đó là để nói rằng hóa trị ký hiệu của các cách biểu đạt với kỹ thuật thực hiện đã ảnh hưởng và trở thành một khía cạnh quan trọng để hiểu được cái phi biểu đạt tham gia vào hoạt động toán học.

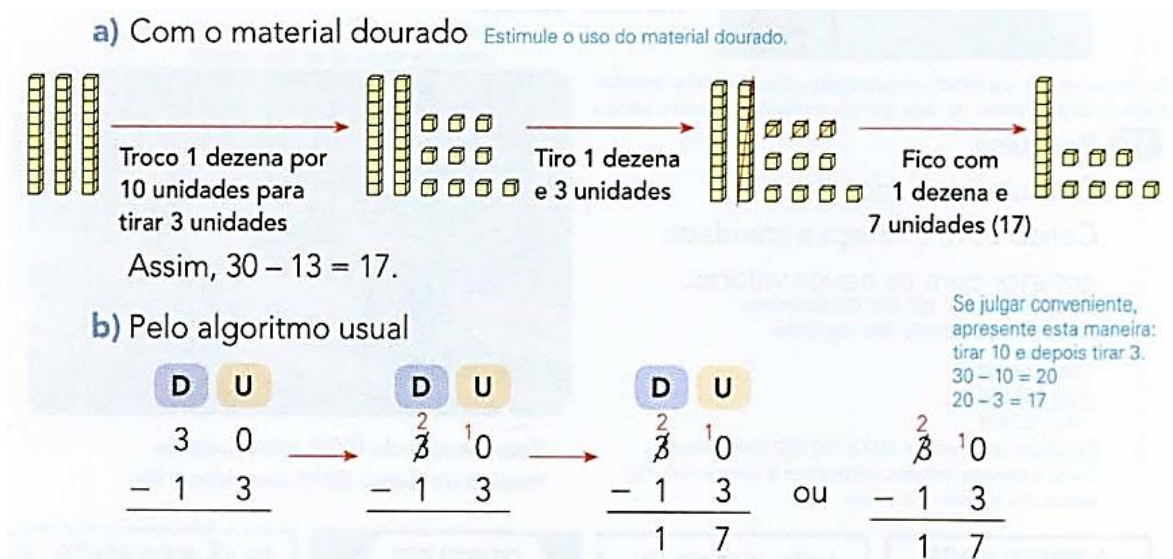
3) Các kỹ thuật cũng như các yếu tố kỹ thuật đến từ sự tiến triển của praxéologie

Praxéologie thay đổi theo quá trình các nhiệm vụ mới đặt ra, trong đó cũng đòi hỏi phải có sự phát triển về mặt kỹ thuật mới⁴. Vậy nên chúng tôi nói là praxéologie đang tiến triển. Trong sự vận hành này, chúng tôi ghi nhận sự thay đổi trạng thái của một số kỹ thuật: cách giải quyết một nhiệm vụ cũng trở thành một cách để chứng minh và xây dựng một kỹ thuật khác hiệu quả hơn. Nôm na, một kỹ thuật có thể trở thành một phần của môi trường kỹ thuật thông qua một kỹ thuật khác. Để trích dẫn nguyên văn:

² Ngoại trừ vài cách thích nghi : ví dụ như mỗi ngón tay để biểu diễn ba đơn vị.

³ « Nói rằng một cách biểu đạt có một hóa trị công cụ nghĩa là nó cho phép phản ứng, làm việc. » (CHEVALLARD, 1994, tr. 06)

⁴ Và một khối công nghệ lý thuyết *trưởng thành* hơn.



Hình 5 : Kỹ thuật và công nghệ

Trong hình, ta có thể thấy có hai cách giải quyết nhiệm vụ « $30 - 13$ ». Chúng tôi ghi nhận rằng thứ tự trình bày của hai kỹ thuật không phải là độc đoán, tức đây là một chọn lựa có lí do rất tường minh: chứng minh cho thuật giải thông dụng. Kỹ thuật đầu bảo đảm cho kỹ thuật thứ hai và vì vậy người ta nói rằng kỹ thuật đầu đã giành được bản chất kỹ thuật ở ngay thời điểm đó. Và vì các kỹ thuật cũng được hình thành bởi các cách biểu đạt được huy động, ta có thể phân tích được vai trò của cách biểu đạt trong quá trình tiến triển này. Trong trường hợp này, lý luận được trình bày từ cách biểu đạt có thể *cho thấy quá trình tối ưu* của thuật toán.

Để kết thúc

Trong bài viết này, một vài khía cạnh có thể thảo luận rộng hơn, điều này phải chờ để thực hiện ở những *thời điểm* khác. Bây giờ, chúng tôi xin nói lời hẹn gặp lại cùng Bosch và Chevallard với dụng ý rằng còn nhiều việc *cần tính đến*:

Chúng ta hiểu rằng toán học không tự nhiên xuất hiện như là một hoạt động theo đúng nghĩa, về mặt kinh tế, của từ, mà là để nói như một hành động có liên quan đến nhân tố và các đối tượng cụ thể – các công cụ mở rộng vùng làm việc để gia tăng năng lực (độ mạnh, độ chính xác, vv), hoặc các yếu tố bên ngoài dựa vào đó các hành động được thực hiện. Việc khái niệm hóa hiện nay của hoạt động toán học có xu hướng ngăn chặn các công cụ vật chất mà nó cam kết và nếu như việc khái niệm hóa này tính đến các đối tượng nhạy cảm đặc biệt như những phát biểu, bài viết và hình ảnh, đó là để tập trung không phải vào bản thân các đối tượng (và cách để thao tác trên chúng), mà để tập trung vào “ý nghĩa” của chúng: chúng “đại diện” gì ? “có ý nghĩa là” gì? Để làm toán chúng ta cần các phát biểu, hình ảnh và ký hiệu nhưng quan trọng hơn là các từ vựng và các văn bản viết. Quan điểm chính có thể như vậy được coi là lý tưởng theo nghĩa là nó có vẻ chỉ phản ánh một khía cạnh duy nhất của hoạt động toán học cụ thể quan sát được : chức năng có nghĩa của nó, tạo ra khái niệm. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 12)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bittar, M., Freitas, J.L.M., & Pais, L.C. (2013) Técnicas e tecnologias com as operações aritméticas nos anos iniciais do ensino fundamental. A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas. Porto Alegre: Penso, pp. 15 – 48.
2. Bosh, M., Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n°1, pp. 77 – 124.
3. Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.
4. Chevallard, Y. (1994) Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis*, pp. 190-200.
5. Kaspar, D. (2014) *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental*. (Mémoire), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande.
6. Kaspar, D., Bittar, M. (2014) A redução ostensiva no estudo das operações de adição e de subtração em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, v. 2, pp. 3-16.

PRAXÉOLOGIE DE RÉFÉRENCE DE L'ASPECT DÉCIMAL POUR LE TYPE DE TÂCHES « DÉNOMBRER UNE COLLECTION » SELON LE MODÈLE T4TEL

Yasmina Chaachoua*

Résumé

Le système de numération décimale est le résultat de l'articulation entre deux principes : décimal et de position (Serfati, 2005). Cependant, l'aspect décimal est considéré comme source de difficultés (Tempier, 2010). Or, le principe décimal peut être travaillé par des activités mettant en jeu les règles de groupements et d'échanges. De plus, les activités mobilisant ces deux règles sont souvent travaillées à l'aide de matériel de numération. Notre communication sera centrée sur la prise en charge de l'aspect décimal par des situations didactiques nécessitant la manipulation tangible de grandes collections. En particulier sur la construction d'un modèle praxéologique de référence pour le type de tâches « Dénombrer en écriture chiffrée une collection » selon le modèle T4TEL.

Mots-clés: Numération, Praxéologie de référence, T4TEL, Dénombrer, Manipulation.

Introduction

Comprendre le fonctionnement du système de numération décimale a un rôle important pour comprendre différents domaines des mathématiques : les calculs, les conversions entre unités de mesure, les décimaux...

Le système de numération décimale est le fruit d'une articulation entre deux principes différents : décimal et de position (Serfati, 2005).

Le principe de position permet d'associer chaque unité de numération (unités, dizaines, centaines...) à un rang dans l'écriture du nombre. Cet aspect renseigne sur la valeur de chaque chiffre dans le nombre en fonction de sa position. En partant de la droite, le premier rang est celui des unités, le deuxième est le rang des dizaines, etc. Lorsqu'une unité est absente, le chiffre « 0 » permet de marquer sa position.

Le principe décimal explique les rapports entre les différents ordres dans un nombre. Il s'agit d'un rapport de dix, dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur ($10 \text{ unités} = 1 \text{ dizaine}$, $10 \text{ dizaines} = 1 \text{ centaine}$, etc.).

Les élèves ont une compréhension de la numération basée principalement sur l'aspect position et l'aspect décimal est considéré comme source de difficultés (Tempier, 2010). Or, le principe décimal est nécessaire pour la compréhension du système de numération (Tempier, 2010, 2013). Celui-ci peut être travaillé par des activités mettant en jeu les règles des groupements et d'échanges. Ces règles stipulent que 10 éléments d'une unité peuvent être groupés et échangés contre un élément de l'unité supérieure et réciproquement, 1 élément d'une unité peut être défait et échangé

* Labo LIG, Université Grenoble Alpes. Cette communication s'inscrit dans le cadre du projet CMIRA soutenu par la région Auvergne-Rhône-Alpes

contre 10 éléments de l'unité inférieure. Ces deux règles mobilisent des savoirs de base qui permettent de comprendre le fonctionnement de ce système et en particulier de son aspect décimal.

De plus, les activités mobilisant ces deux règles sont souvent travaillées à l'aide d'un matériel de numération.

Nous nous intéressons dans ce travail à la prise en charge de l'aspect décimal par des situations didactiques nécessitant la manipulation tangible des collections de grands nombres. Cette prise en charge présente parfois des limites qui peuvent être surmontées par la simulation.

1. Problématique

1.1. Difficultés liées à l'enseignement de la numération à l'école primaire

Les travaux de Bednarz et Janvier (1984) ont mis en évidence des difficultés des élèves centrées essentiellement sur l'aspect décimal de la numération :

- « difficulté à voir les groupements et leur rôle dans l'écriture conventionnelle malgré la place prépondérante que le travail sur cette écriture occupe dans l'enseignement ;
- difficulté à voir la pertinence de ces groupements, même si les exercices dans l'enseignement ont amené les enfants à faire des regroupements ;
- difficulté à opérer avec ces groupements, les faire et les défaire ;
- difficulté à travailler simultanément avec deux groupements différents ;
- difficulté à interpréter les procédures de calcul relatives aux opérations (addition, soustraction, multiplication, division) en termes de groupements, qui conduit à des erreurs classiques sur les opérations. » (Bednarz et Janvier, 1984)

L'analyse des erreurs des élèves faite par Parouty (2005) confirment cette troisième difficulté concernant le lien entre la maîtrise de la numération et le calcul.

L'observation des activités proposées en classe explique pourquoi les élèves ont ces types de difficultés. En effet, les activités proposées prennent en compte majoritairement l'aspect position de la numération et donc les élèves ont une compréhension de la numération basée principalement sur cet aspect.

Tempier (2010) constate aussi les mêmes difficultés chez les élèves, 26 ans après. Il s'interroge si les activités actuelles prennent davantage en charge les deux aspects de la numération. D'où la question Q1 : Comment peut-on prendre en charge l'aspect décimal de la numération dans l'enseignement actuel ?

1.3. Hypothèses didactiques pour la prise en charge de l'aspect décimal de la numération

Pour répondre à la question Q1, nous allons nous référer aux travaux sur la numération afin d'identifier comment prendre en charge l'aspect décimal de la numération.

1.3.1. La numération en unités

En se référant aux travaux de Chambris (2008) nous considérons comme théorie de référence celle qui s'appuie sur les unités de numération et sur les relations entre

elles et qui sont à la base des propriétés de l'aspect décimal de la numération. C'est une théorie mathématique adaptée à l'enseignement car nous avons une construction itérative du savoir : les savoirs nouveaux sont construits à partir des anciens avec la même itération et selon une progression par année.

Cette théorie de la numération est basée sur la notion d'unité et la règle de groupement associée, à savoir dix éléments d'une unité permettent de former une nouvelle unité de rang supérieur. Cette théorie s'appuie également sur les relations entre les unités à travers les règles d'échanges.

D'où notre première hypothèse de travail :

HT1 « Numération en unités » : Le cadre théorique basé sur la numération en unités est adapté à l'enseignement de la numération à l'école primaire. Il prend en charge l'aspect décimal de la numération car il repose sur la notion d'unités et sur les relations entre les unités à travers les règles de groupement et échanges.

1.3.2. Les relation entre les unités

Pour travailler les relations entre les unités de numération, Chambris (2008) souligne l'importance des types de tâches de conversion, par exemple convertir 23 centaines en dizaines. Mais, elle a noté la disparition de ce type de tâches pendant la réforme des mathématiques modernes et après. Cependant, les relations entre les unités sont travaillées aujourd'hui dans certains manuels à travers un nouveau type de tâches « nombre de ». D'une manière générale, Il faut privilégier les types de tâches qui font appel aux relations entre les unités et nous formulons notre deuxième hypothèse de travail « Relations entre les unités » :

HT2 « Relations entre les unités » : Pour travailler la numération, il faut privilégier les types de tâches dont la technique mobilise les relations entre les unités.

1.3.3. Les grands nombres

L'introduction des grands nombres est l'occasion d'un travail explicite sur le système de numération et plus précisément sur le principe décimal. L'introduction d'une nouvelle unité, génère d'autres relations entre les unités de numération. L'itération des groupements et la multiplicité des échanges qui en découlent permettent de mieux comprendre l'aspect décimal de la numération.

Nous formulons donc notre troisième hypothèse de travail « Grand Nombre » :

HT3 « Grand Nombre » : L'introduction des grands nombres enrichit et renforce la compréhension du système de numération et particulièrement son aspect décimal.

HT3 « Grand Nombre » : L'introduction des grands nombres enrichit et renforce la compréhension du système de numération et particulièrement son aspect décimal.

1.3.4. La manipulation des objets

Pour l'enseignement du nombre et de la numération, la manipulation d'objets est une étape importante pour la construction du sens. Bien que la manipulation d'objets soit importante, l'enseignement du nombre et de la numération s'appuie aussi sur des

représentations schématiques et des représentations abstraites. Nous formulons donc notre quatrième hypothèse de travail « Manipulation d'objets » :

HT4 « Manipulation d'objets » : La manipulation d'objets est importante pour travailler les règles du groupement et d'échanges afin de donner du sens à l'aspect décimal de la numération. Pour cela, elle doit intervenir au début de l'apprentissage de la numération avant de passer aux schémas puis au symbolique et elle peut être utilisée comme dispositif de remédiation une fois qu'on passe à l'abstraction.

1.3.5. Conclusion

Nous considérons que les quatre hypothèses ci-dessus constituent une réponse didactique possible à notre question Q1 : Comment peut-on prendre en charge l'aspect décimal de la numération dans l'enseignement actuel ?

Dans la suite nous présentons la construction d'un modèle praxéologique de référence pour le type de tâches « dénombrer en écriture chiffrée une collection d'objets tangible ou virtuel ». Pour prendre en compte la représentation informatique du modèle de référence nous nous référons au cadre T4TEL (Chaachoua et al. 2013) que nous présentons dans le prochain paragraphe.

1.4. Cadre de référence T4TEL

Le cadre de référence T4TEL¹ a été développé suite aux travaux de Chaachoua (2010) pour répondre à la double problématique didactique et informatique pour la conception des environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Il s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1998, 1999), désignée par TAD, et plus spécifiquement sur l'approche praxéologique (Chevallard 1999, Bosch et Chevallard, 1999). La théorie anthropologique du didactique (TAD) considère que toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ . La TAD part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'il nomme praxéologie, ou organisation praxéologique.

Le cadre T4TEL propose une formalisation et une extension du modèle praxéologique pour répondre à l'exigence de calculabilité d'une part et la production de différents services EIAH d'autre part.

T4TEL

Type de tâches

Un type de tâches est défini par un verbe d'action et un complément. Le verbe d'action caractérise le genre de tâches comme « Calculer » ou « Dénombrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité. Par exemple, « Calculer la somme de deux nombres » est plus général que le type de tâches « Calculer

¹ T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour Technology Enhanced Learning

la somme de deux entiers à 1 chiffre ». D'où l'introduction dans le modèle de la notion de générateur de type de tâches.

Générateur de Type de tâches

A un type de tâches T on peut associer un générateur $G(T)$ en introduisant un ensemble de variables. Ces variables prennent des valeurs dans un domaine de connaissances donné. L'instanciation des variables permet de spécifier le complément du type de tâches et donc de caractériser des sous-types de tâches.

Variables

Les variables introduites dans la définition de générateur du type de tâches ont plusieurs fonctions : générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable, caractériser les portées des techniques (Chaachoua et Bessot, 2016). Ainsi, si l'enjeu d'apprentissage nécessite la mobilisation d'une certaine technique, le jeu sur les variables (et les valeurs) permet de construire une suite de situations favorisant l'émergence de cette technique et permettant ainsi l'apprentissage visé.

Technique

Une technique τ est décrite par un ensemble de types de tâches $\{(T_i)_i\}$.

Technologie

La technologie est modélisée par un ensemble d'énoncés qui portent sur les éléments du domaine de connaissances mises en jeu.

Théorie

La théorie peut être modélisée par un ensemble de technologies qui portent sur les éléments du domaine de connaissances.

1.5. Conclusion

Nous avons formulé quatre hypothèses de travail pour prendre en charge l'aspect décimal dans l'enseignement actuel. Face aux difficultés liées à la manipulation des collections de grands nombres, un dispositif informatique peut être une solution. Cependant, ce dispositif nécessite un modèle de praxéologie de référence calculable. L'utilisation du cadre de référence T4TEL présenté ci-dessus est une solution.

Pour construire ce modèle de référence, nous partons des travaux de Tempier (2012) où il a développé une praxéologie de référence sur la numération mais celle-ci n'est pas formalisée selon le modèle et le cadre de référence T4-TEL. Notre travail va contribuer à cette formalisation en se limitant à des praxéologies qui travaillent l'aspect décimal de la numération par la manipulation.

2. Construction d'un modèle de praxéologie de référence

« Dénombrer une collection » ou « Produire une collection » sont deux types de tâches élémentaires abordés dès le début de l'apprentissage de la numération du cycle 2 jusqu'au cycle 3. Ils sont en lien direct avec la manipulation, permettant ainsi par des activités de groupements et d'échanges de travailler avec les unités de numération. De plus, certaines de leurs techniques mobilisent les relations entre les unités de numération. Ils sont donc favorables à nos 4 hypothèses de travail pour étudier l'aspect

décimal de la numération. Dans la suite, nous allons d'abord présenter les variables d'un modèle praxéologique pour le type de tâches T_{DC} « Dénombrer une collection ».

2.1. Choix des variables

Tout d'abord, nous allons présenter la variable type de matériel. Selon Van de Walle et al. (2010) cité par Tempier (2012), le matériel peut être proportionnel quand on passe d'une unité à l'autre par un même coefficient, par exemple les bâchettes. Il peut être non proportionnel si on ne passe pas d'une unité à l'autre par un même coefficient, comme la monnaie ou le boulier. Nous avons choisi de travailler que dans le cas du matériel proportionnel et groupable.

Nous présentons deux autres variables : l'organisation du matériel et configuration des ordres des unités.

Organisation du matériel

Cette variable n'a de sens que si le matériel est proportionnel. Elle prend les valeurs :

- Vrac : seules les unités simples sont fournies sans aucun groupement.

Cette variable est prise en compte pour les petites collections où le recours au comptage de manière perceptive est possible.

Nous distinguons deux sous-valeurs de « Vrac » :

- Vrac Superposé : les unités sont disposées de façon que certaines soient superposées.
- Vrac Non Superposé : dans l'autre cas.
- Partiellement Groupé : il existe au moins un groupement et au moins une unité de numération dont le nombre est supérieur à 9. Par exemple : 5 unités simples + 12 groupements de dix.
- Groupé : lorsque le nombre de chaque unité de numération n'est pas supérieur à 9.

Nous distinguons deux sous-valeurs de « Groupé » :

- Groupé Ordonné : Disposé par unité de numération décroissant de Gauche vers la droite. Les éléments de chaque unité de numération ne sont pas superposés. Cette valeur donne accès directement à l'écriture matérielle du nombre canonique EMNC (cf. 2.3.)

- Groupé Non Ordonné : dans les autres cas ;

Cependant, nous n'avons pas distingué le cas où les différents groupements sont mélangés ou non. On considère que la distinction entre les groupements des différentes unités est acquise.

Configuration des ordres des unités

Cette variable prend deux valeurs :

- Homogène : le matériel est constitué par un seul type de groupement correspondant à la même unité de numération. Par exemple, le matériel est constitué que de paquets de cent.

– Hétérogène : le matériel est constitué par au moins deux types de groupement ou plus correspondant à des unités de numération différentes. Par exemple, le matériel est constitué de paquets de cent et des unités simples.

– Ainsi, nous avons donc retenu 4 variables :

V	Nom	Valeurs				
V1	Taille de la collection	Intervalles sous forme [10 ⁿ ... 10 ^m] ou [10 ⁿ ...]				
V2	Multiplie de 10	Oui			Non	
V3	Organisation du matériel	Vrac		Partiellemen t Groupé	Groupé	
		Superp.	Non Superp.		Ordonné	Non ordonné
V4	Configuration des ordres des unités	Homogène			Hétérogène	

Tableau 1 : Variables retenues pour le type de tâches T_{DC}

Les praxéologies associées au type de tâches T_{DC}

Selon Tempier (2012) « Les techniques de dénombrement d'une collection amènent à effectuer un comptage (soit en unités simples soit en unités) puis à partir de la désignation orale obtenue utiliser les techniques déjà décrites de traduction en écriture en chiffres. Elles se différencient par les types de comptages effectués ». Il distingue donc deux techniques selon que le comptage soit en unités simples ou en unités de numération. Compter en unités simples consiste à compter de un en un, de dix en dix...et le dernier mot prononcé correspond au cardinal de la collection. Alors que compter en unités de numération consiste à compter de un en un tous les objets appartenant à la même unité de numération (une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, ...) ensuite une étape est nécessaire pour convertir le dernier mot prononcé en unités simples afin d'obtenir le cardinal. Cela mobilise nécessairement l'aspect décimal.

Dans notre article, nous distinguons plus de deux techniques à partir des variables présentées ci-dessus. Cependant, nos techniques peuvent être regroupées en deux catégories : celles qui sont basées sur le comptage en unités simples et celles qui sont basées sur le comptage en unités de numération. A cela, nous ajoutons une technique basée sur la reconnaissance visuelle pour les petites collections. Cependant, on ne s'intéresse pas aux techniques basées sur le calcul étant donnée qu'elles ne mobilisent pas les principes de la numération et en particulier l'aspect décimal. En se référant à notre hypothèse de travail HT2 « Relations entre les unités », l'utilisation des techniques de conversion est un critère qui nous permet de repérer les types de tâches mobilisant l'aspect décimal dans leur technologie. De même, notons que les activités de groupement, à condition d'être suivies d'échanges, utilisent parfois des techniques de conversion et par conséquent mobilisent aussi l'aspect décimal. Ce critère sera utilisé par la suite pour repérer les praxéologies mobilisant l'aspect décimal.

Nous avons identifié 10 types de tâches à partir des variables retenues. L'ensemble des praxéologies associées sont présentées en annexe.

3. Résultats et discussion

Dans cette dernière partie, nous présentons quelques résultats à propos des praxéologies qui mobilisent l'aspect décimal.

Au 10 types de tâches sont associées 19 techniques possibles, donc 19 praxéologies ponctuelles. Seules 6 praxéologies font intervenir l'aspect décimal (cf. colonne 3 du tableau en annexe). Cependant, ces types de tâches peuvent être résolus par d'autres techniques qui ne mobilisent pas l'aspect décimal. Proposer ainsi ces types de tâches n'est pas une garantie pour obliger l'élève à travailler l'aspect décimal puisqu'il existe une autre technique pour l'effectuer.

Comment peut-on alors favoriser la mobilisation d'une technique par l'élève plutôt qu'une autre ? Comment bloquer les techniques qui ne mobilisent pas l'aspect décimal et favoriser celles qui le mobilisent ? Sur quelles variables peut on jouer pour orienter le choix de ces techniques ?

En analysant le type de tâches « Dénombrer en écriture chiffrée une collection partiellement groupée », une technique possible est de défaire les groupements et de compter en unités simples. Cette technique est loin d'être la plus efficace et en plus ne fait pas intervenir l'aspect décimal. En revanche, il existe quatre autres techniques qui en plus d'être efficaces, mobilisent les relations entre les unités de numération par des activités de conversion. Pour privilégier ces deux dernières techniques, il faut bloquer la première. Une manière de la bloquer est d'interdire la possibilité de défaire un groupement.

De plus, pour tous les sous-types de tâches de « Dénombrer en écriture chiffrée une collection » (TDC_EC) on peut défaire les collections et se retrouver dans la première praxéologie de « Dénombrer en écriture chiffrée une collection en vrac » (TDC_EC.Vrac). De la même manière, on peut faire des groupements et se retrouver dans le cas de matériel groupé. Ainsi, faire des groupements ou les défaire sont des actions qui modifient la technique du dénombrement en écriture chiffrée d'une collection. La possibilité de les autoriser ou de les bloquer peut représenter une variable pertinente pour le choix de la technique et donc indirectement pour forcer la mobilisation de l'aspect décimal.

Nous considérons ces deux actions « faire » et « défaire » des groupements comme des variables dont certaines valeurs peuvent autoriser ou bloquer certaines techniques.

REFERENCES

1. Bednarz, N., Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N* 33, 5-31
2. Chaachoua, H. Ferraton, G., Desmoulins, C., (2013) Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.
3. Chaachoua H. (2010) *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. HDR. UGA.
4. Chaachoua, H., Bessot A. (2016) Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.

5. Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

6. Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2) 221–266.

7. Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.

8. Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle*, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle (p. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

9. Parouty, V. (2005). Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXI^{ème} colloque sur la formation des maîtres*. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ? Commission Inter-IREM COPIRELEM. Toulouse : IREM de Toulouse

10. Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris : Pétra.

11. Tempier (2012)

12. Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, (86), 59-90.

13. Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Paris-Diderot - Paris VII, French. Consulté à l'adresse <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00921691/document>.

14. Van de Walle, J.A. (2010). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally (Seventh edition)*. Boston : Pearson Education.

Annexe : Présentation des praxéologies par rapport à la mobilisation de l'aspect décimal

Type de tâches	Collection	Les techniques	Techniques mobilisant l'aspect décimal
T _{DC_E C.Vrac}	Collection en vrac	- Compter en unités simples de 1 en 1 - Faire des groupements qcq et compter - Produire une collection groupée	- Non - Non - On ne peut pas savoir²

² Ici la technique mobilise un type de tâches qui a plusieurs praxéologies ponctuelles dont au moins une mobilise l'aspect décimal. Il faut donc connaître le déroulement de la technique à des niveaux plus bas.

		- Produire une collection partiellement groupée	- On ne peut pas savoir
T _{DC_EC.VracNSup_Petite}	Collection de petite taille en vrac non superposé	- Reconnaître visuellement	- Non
T _{DC_EC.Vrac_10k}	Collection en vrac dont le nombre d'éléments est un multiple de 10 inférieur à 100	- Compter en unités simples de X en X après groupement - Compter en unités de numération après groupement	- Non - Oui
T _{DC_EC.Gr}	Collection groupée	- Défaire tous les groupements en unités simples et se ramener au cas où le matériel est en vrac	- Non
T _{DC_EC.Gr.Hom}	Collection groupée homogène	- Compter en unités simples de X en X - Compter en unités de numération	- Non - Oui
T _{DC_EC.GrOrd_Het}	Collection groupée ordonnée hétérogène	- Compter de X en X en Surcomptant. - Compter de X en X où X est une puissance de 10 - Compter en unités de numération	- Non - Non - Non
T _{DC_EC.GrDeso_Het}	Collection groupée désordonnée hétérogène	- Trier puis T _{DC_EC.Gr_ord}	- Non
T _{DC_EC.PGr}	Collection partiellement groupée	- Défaire tous les groupements en unités simples et se ramener au cas où le matériel est en vrac) - Compter en unités de numération et conversion	- On ne peut pas savoir - Oui
T _{DC_EC.PGr_Hom}	Collection partiellement groupée homogène	- Compter en unités de numération puis conversion)	- Oui
T _{DC_EC.PGr_Het}	Collection partiellement groupée hétérogène	- Compter en unités de numération de chaque ordre puis conversion - Compter en unités de numération de chaque ordre puis traduction	- Oui - Oui
TOTAL		19	6

PRAXÉOLOGIE THAM CHIẾU VỀ PHƯƠNG DIỆN THẬP PHÂN TRONG KIỂU NHIỆM VỤ ĐẾM MỘT TẬP HỢP THEO MÔ HÌNH T4TEL

Yasmina Chaachoua*

Résumé

Le système de numération décimale est le résultat de l'articulation entre deux principes: décimal et de position (Serfati, 2005). Cependant, l'aspect décimal est considéré comme source de difficultés (Tempier, 2010). Or, le principe décimal peut être travaillé par des activités mettant en jeu les règles de groupements et d'échanges. De plus, les activités mobilisant ces deux règles sont souvent travaillées à l'aide de matériel de numération. Notre communication sera centrée sur la prise en charge de l'aspect décimal par des situations didactiques nécessitant la manipulation tangible de grandes collections. En particulier sur la construction d'un modèle praxéologique de référence pour le type de tâches « Dénombrer en écriture chiffrée une collection » selon le modèle T4TEL.

Mots-clés: Numération, Praxéologie de référence, T4TEL, Dénombrer, Manipulation.

Tóm tắt

Hệ đếm thập phân là kết quả của sự nối khớp giữa hai nguyên lý: thập phân và vị trí (Serfati, 2005). Tuy nhiên, phương diện thập phân được xem là nguồn gốc của những khó khăn (Tempier, 2010). Nguyên lý thập phân có thể được áp dụng trong các hoạt động dùng quy tắc lập nhóm và quy tắc thay đổi nhóm. Hơn nữa, các hoạt động huy động hai quy tắc này thường được làm việc nhờ sự giúp đỡ của dụng cụ đếm. Tham luận của chúng tôi sẽ tập trung vào phương diện thập phân thông qua các tình huống dạy học cần thiết phải thao tác trên các tập hợp lớn, đặc biệt trên việc xây dựng một mô hình praxéologique tham chiếu trong kiểu nhiệm vụ « Đếm bằng cách viết thành số một tập hợp » theo mô hình T4TEL.

Từ khóa: Hệ đếm, Praxéologie tham chiếu, T4TEL, Đếm, Thao tác.

Mở đầu

Hiểu sự vận hành của hệ đếm thập phân đóng vai trò quan trọng để hiểu các lĩnh vực khác nhau của toán học: các phép tính, chuyển đổi giữa các đơn vị đo, các số thập phân...

Hệ đếm thập phân là kết quả của sự nối khớp giữa hai nguyên lý: thập phân và vị trí (Serfati, 2005).

Nguyên lý vị trí cho phép gán mỗi đơn vị của hệ đếm (đơn vị, chục, trăm...) với hàng trong dạng viết số. Phương diện này cho biết giá trị của mỗi chữ số trong một số ứng với vị trí của nó. Xét theo dạng viết thẳng hàng, hàng đầu tiên là hàng đơn vị, hàng tiếp theo là hàng chục, vv. Nếu thiếu đơn vị thì chữ số « 0 » cho phép đánh dấu vị trí của nó.

Nguyên lý thập phân giải thích mối quan hệ giữa các thứ tự khác nhau trong một số. Đó là mối quan hệ của mười, mười đơn vị của một thứ tự nào đó bằng một đơn vị của thứ tự kế tiếp ($10 \text{ đơn vị} = 1 \text{ chục}$, $10 \text{ chục} = 1 \text{ trăm}$, vv.).

* Labo LIG, Université Grenoble Alpes. Tham luận này nằm trong khuôn khổ của dự án CMIRA tài trợ bởi vùng Auvergne-Rhône-Alpes

Học sinh hiểu phép đếm chủ yếu dựa trên phương diện vị trí và như vậy phương diện thập phân được xem là nguồn gốc của những khó khăn (Tempier, 2010).

Thế nhưng nguyên lí thập phân lại cần thiết cho hệ đếm (Tempier, 2010, 2013). Nguyên lí này có thể được làm việc qua các hoạt động huy động các quy tắc lập nhóm và thay đổi nhóm. Những quy tắc này chỉ rõ rằng 10 phần tử của một đơn vị có thể được nhóm lại và thay đổi so với một phần tử của đơn vị lớn hơn và ngược lại, 1 phần tử của một đơn vị có thể được rã nhóm và thay đổi so với 10 đơn vị của đơn vị nhỏ hơn. Hai quy tắc này huy động các tri thức cơ sở cho phép hiểu sự vận hành của hệ đếm mà đặc biệt là khía cạnh thập phân của nó.

Hơn nữa, các hoạt động huy động hai quy tắc này thường được làm việc với sự giúp đỡ của dụng cụ đếm.

Tham luận của chúng tôi sẽ tập trung vào phương diện thập phân thông qua các tình huống dạy học cần thiết phải thao tác trên các tập hợp lớn. Vấn đề mà chúng ta quan tâm đôi khi đặt ra những hạn chế mà có thể được khắc phục nhờ phần mềm giả lập.

1. Đặt vấn đề

1.1. Những khó khăn liên quan đến việc dạy học đếm ở trường tiểu học

Những công trình của Bednarz và Janvier (1984) đã làm rõ những khó khăn của học sinh về phương diện thập phân của phép đếm :

- « khó khăn để hiểu các nhóm và vai trò của các nhóm trong các dạng viết quy ước mặc dù trong dạy học công việc trên các dạng viết chiếm vị trí lớn nhất;
- khó khăn để hiểu sự thích hợp của các nhóm, ngay cả khi học sinh phải thực hiện việc lập nhóm trong các bài tập được dạy học;
- khó khăn để thao tác với các nhóm, tạo nhóm hay hủy nhóm;
- khó khăn để làm việc đồng thời với hai nhóm khác nhau;
- khó khăn để giải thích các tiến trình tính toán liên quan đến các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) với các nhóm, điều này dẫn đến các sai lầm cổ điển trên các phép toán. » (Bednarz và Janvier, 1984)

Phân tích các sai lầm của học sinh theo Parouty (2005) xác định sai lầm thứ ba liên quan đến mối liên hệ giữa việc làm chủ việc đếm và phép tính.

Quan sát các hoạt động đặt ra trong lớp giải thích tại sao học sinh gặp những khó khăn kiểu này. Thật vậy, các hoạt động đặt ra chủ yếu tính đến phương diện vị trí của phép đếm và vì vậy học sinh hiểu phép đếm chủ yếu về phương diện này.

Tempier (2010) cũng nhận thấy những khó khăn này xuất hiện ở học sinh trong nghiên cứu thực hiện 26 năm sau. Tác giả đã đặt câu hỏi có hay không các hoạt động hiện hành tính đến cả hai phương diện của phép đếm. Từ đó, ta có câu hỏi Q1: Làm sao ta có thể tính đến phương diện thập phân của phép đếm trong dạy học hiện nay?

1.3. Các giả thuyết dạy học nhằm vào phương diện thập phân của phép đếm

Để trả lời cho câu hỏi Q1, chúng tôi sẽ tham chiếu những công trình về phép đếm để nhận dạng câu trả lời cho câu hỏi làm sao tính đến phương diện thập phân của phép đếm.

1.3.1. Đếm bằng các đơn vị

Chúng tôi chọn lí thuyết toán học tham chiếu từ công trình của Chambris (2008). Lí thuyết dựa trên các đơn vị của hệ đếm, mối liên hệ giữa các đơn vị và là cơ sở của các tính chất trên phương diện thập phân của phép đếm. Đó là một lí thuyết toán học phù hợp với việc dạy học vì tri thức được xây dựng liên tiếp: các tri thức mới được xây dựng từ các tri thức cũ với cùng tiến trình lặp lại và theo tiến độ của năm học.

Lí thuyết của phép đếm này dựa trên khái niệm đơn vị và quy tắc lập nhóm tương ứng: mười phần tử của một đơn vị cho phép tạo thành một đơn vị mới của hàng kế tiếp. Lí thuyết này hoàn toàn dựa trên mối liên hệ giữa các đơn vị thông qua các quy tắc trao đổi nhóm.

Từ đó, chúng tôi đi đến giả thuyết công việc:

HT1 « Đếm bằng đơn vị » : Khung lí thuyết dựa trên việc đếm bằng đơn vị là phù hợp với việc dạy học đếm ở trường tiểu học. Khung lí thuyết này chỉ trách nhiệm về phía cạnh thập phân của phép đếm bởi vì nó dựa vào khái niệm đơn vị và các mối liên hệ giữa các đơn vị thông qua các quy tắc lập nhóm và trao đổi giữa các nhóm.

1.3.2. Mối liên hệ giữa các đơn vị

Để làm việc với mối liên hệ giữa các đơn vị đếm, Chambris (2008) nhấn mạnh tầm quan trọng của các nhiệm vụ chuyển đổi, chẳng hạn chuyển 23 trăm thành chục. Nhưng tác giả cũng chỉ ra sự biến mất của kiểu nhiệm vụ này trong giai đoạn cải cách toán học hiện đại và về sau. Tuy nhiên, trong một số sách giáo khoa hiện nay, mối liên hệ giữa các đơn vị được thể hiện thông qua một kiểu nhiệm vụ mới « Số của ». Một cách tổng quát, ta phải ưu tiên cho các kiểu nhiệm vụ cần đến mối liên hệ giữa các đơn vị và chúng tôi phát biểu giả thuyết công việc thứ hai « Mối liên hệ giữa các đơn vị » :

HT2 « Mối liên hệ giữa các đơn vị » : Để làm việc với phép đếm, ta phải ưu tiên các kiểu nhiệm vụ mà kĩ thuật của nó huy động mối liên hệ giữa các đơn vị.

1.3.3. Các số lớn

Việc giới thiệu các số lớn rõ ràng là một cơ hội để làm việc với hệ đếm và đặc biệt là nguyên lí thập phân. Giới thiệu một đơn vị mới làm nảy sinh các mối liên hệ giữa các đơn vị của phép đếm. Việc tạo nhóm lặp lại và trao đổi đa dạng giữa các nhóm cho phép hiểu rõ phương diện thập phân của hệ đếm.

Vì vậy chúng tôi phát biểu giả thuyết công việc thứ ba của mình « Số lớn »:

HT3 «Số lớn»: Giới thiệu các số lớn sẽ làm phong phú và tăng cường sự hiểu biết về hệ đếm và đặc biệt là nguyên lí thập phân.

1.3.4. Thao tác trên các vật

Để dạy học số và phép đếm, việc thao tác trên các đồ vật là một giai đoạn quan trọng để xây dựng nghĩa. Đầu rằng việc thao tác trên các vật là quan trọng, việc dạy học số và phép đếm cũng dựa trên những biểu diễn bằng sơ đồ và cả biểu diễn trừu tượng. Vì vậy chúng tôi phát biểu giả thuyết công việc thứ tư « thao tác trên các vật »:

HT4 « Thao tác trên các vật »: Thao tác trên các vật thì quan trọng để làm việc với các quy tắc lập nhóm và đổi nhóm nhằm mang đến nghĩa cho phương diện thập phân của phép đếm. Để làm điều này, thao tác trên các vật phải can thiệp từ khi bắt đầu học đếm, trước khi chuyển qua các sơ đồ, rồi đến học các kí hiệu ; và thao tác này có thể được sử dụng như một phương tiện trung gian để chuyển sang sự trừu tượng.

1.3.5. Kết luận

Chúng tôi cho rằng bốn giả thuyết ở trên có thể tạo nên một câu trả lời sơ phạm cho câu hỏi Q1 của chúng tôi: Chúng ta có thể tính đến phương diện thập phân của phép đếm trong dạy học hiện nay như thế nào?

Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu sự xây dựng một mô hình praxéologie tham chiếu cho kiểu nhiệm vụ « đếm bằng cách viết thành số một tập hợp các vật cụ thể hay ảo ». Để tính đến biểu diễn tin học của mô hình tham chiếu chúng tôi căn cứ vào khung lí thuyết T4TEL (Chaachoua và các cộng sự 2013) được trình bày ở đoạn tiếp theo.

1.4. Khung tham chiếu T4TEL

Khung tham chiếu T4TEL¹ đã được phát triển tiếp theo các công trình của Chaachoua (2010) nhằm trả lời cho vấn đề kép về sơ phạm và tin học để xây dựng các môi trường tin học cho việc học tập của con người. Nó đặt trong Thuyết nhân học của Didactic (Chevallard, 1992, 1998, 1999), viết tắt TAD, và chính xác hơn về sự tiếp cận praxéologie (Chevallard 1999, Bosch et Chevallard, 1999). TAD quan niệm rằng mọi hoạt động của con người đều bao gồm việc thực hiện một nhiệm vụ t của một kiểu T nào đó, bằng một kĩ thuật τ , được giải thích bởi một công nghệ θ cho phép hiểu cách tạo ra kĩ thuật, và đến lượt mình công nghệ được giải thích bởi một lí thuyết Θ . TAD xuất phát từ định đề rằng mọi hoạt động của con người đều có thể được phân tích bởi một tổ chức mà Chevallard (1998) kí hiệu $[T/\tau/\theta/\Theta]$ và ông gọi là praxéologie, hay tổ chức praxéologie.

Khung lí thuyết T4TEL đề xuất việc hình thức hóa và mở rộng mô hình praxéologie, một mặt để đáp ứng yêu cầu có thể tính toán được, mặt khác tạo ra nhiều tiện ích EIAH khác.

T4TEL

Kiểu nhiệm vụ

Một kiểu nhiệm vụ được định nghĩa bởi một động từ hành động và một bổ ngữ. Động từ hành động chỉ rõ dạng nhiệm vụ như « Tính » hay « Đếm ». Bổ ngữ có thể xác định các mức độ tổng quát khác nhau. Ví dụ, « Tính tổng hai số » thì tổng quát hơn kiểu nhiệm vụ « Tính tổng hai số nguyên gồm 1 chữ số ». Từ đó, khái niệm máy sinh của kiểu nhiệm vụ được giới thiệu trong mô hình.

Máy sinh của kiểu nhiệm vụ

Với một kiểu nhiệm vụ T , ta có thể gán với một máy sinh $G(T)$ bằng cách giới thiệu một tập hợp các biến. Các biến này nhận các giá trị trong một miền kiến thức cho

¹ T4TEL : $T4$ viết tắt của bộ tứ tổ chức (Kiểu nhiệm vụ, Kĩ thuật, Công nghệ, Lí thuyết) và TEL là Tăng cường Công nghệ trong Học tập.

trước. Hành động trên các biến cho phép chỉ rõ phân bổ sung vào các biến và nhờ đó làm rõ các kiểu nhiệm vụ con.

Biến

Các biến được giới thiệu trong định nghĩa máy sinh của kiểu nhiệm vụ có nhiều chức năng: sinh ra các nhiệm vụ con bằng cách thay đổi trên các giá trị của biến, chỉ rõ các tầm ảnh hưởng của kĩ thuật (Chaachoua và Bessot, 2016). Như vậy, nếu mục tiêu dạy học cần phải huy động một kĩ thuật nào đó, chọn lựa trên các biến (và các giá trị) cho phép xây dựng một chuỗi tình huống thích hợp tạo thuận lợi cho kĩ thuật này nảy sinh.

Kĩ thuật

Một kĩ thuật τ được miêu tả bởi một tập hợp các kiểu nhiệm vụ $\{(T_i)_i\}$.

Công nghệ

Công nghệ được mô hình hóa bằng một tập hợp các phát biểu dựa trên các yếu tố của miền kiến thức liên quan.

Lí thuyết

Lí thuyết có thể được mô hình hóa bởi một tập hợp các công nghệ dựa trên các yếu tố của miền kiến thức.

1.4. Kết luận

Chúng tôi đã phát biểu bốn giả thuyết công việc để tập trung vào phương diện thập phân trong dạy học hiện hành. Đối mặt với những khó khăn gắn với việc thao tác các tập hợp số lượng lớn, một dụng cụ tin học có thể mang đến giải pháp. Tuy nhiên, dụng cụ này cần đến một mô hình praxéologie tham chiếu có thể tính toán được. Sử dụng khung tham chiếu T4TEL giới thiệu ở trên là một giải pháp.

Để xây dựng mô hình tham chiếu này, chúng tôi xuất phát từ công trình của Tempier (2012) trong đó tác giả đã phát triển một praxéologie tham chiếu về phép đếm nhưng chưa được hình thức hóa theo mô hình tham chiếu T4TEL. Công việc của chúng tôi sẽ đóng góp cho việc hình thức hóa các praxéologie về phương diện thập phân của phép đếm thông qua thao tác.

2. Xây dựng một mô hình praxéologie tham chiếu

« Đếm một tập hợp » hay « Tạo ra một tập hợp » là hai kiểu nhiệm vụ cơ bản được đề cập khi khởi đầu học đếm từ chu kì 2 đến chu kì 3. Chúng liên hệ trực tiếp với hoạt động bằng thao tác để lập nhóm và đổi các nhóm đơn vị của hệ đếm. Hơn nữa, một số kĩ thuật của chúng huy động các mối liên hệ giữa các đơn vị của hệ đếm. Vì vậy chúng phù hợp với 4 giả thuyết công việc của chúng tôi để nghiên cứu phương diện thập phân của hệ đếm. Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu các biến của một mô hình praxéologie cho kiểu nhiệm vụ T_{DC} « Đếm một tập hợp ».

2.1. Lựa chọn các biến

Đầu tiên, chúng tôi sẽ giới thiệu các biến kiểu dụng cụ. Theo Van de Walle và cộng sự (2010) trích theo Tempier (2012), dụng cụ có thể tỉ lệ khi ta chuyển từ một đơn vị này sang một đơn vị khác với cùng một hệ số, chẳng hạn các que tính. Nó cũng có thể không tỉ lệ nếu ta chuyển từ đơn vị này sang đơn vị khác với cùng một hệ số, như đồng tiền hay bàn tính. Chúng tôi đã chọn làm việc với trường hợp dụng cụ tỉ lệ và có thể lập nhóm được.

Chúng tôi giới thiệu hai biến khác: tổ chức của dụng cụ và cấu hình cấp của các đơn vị.

Tổ chức của dụng cụ

Biến này chỉ có nghĩa nếu dụng cụ là tỉ lệ. Nó nhận các giá trị :

- Vrac: Chỉ cung cấp các đơn vị đơn giản và không có nhóm nào.
- Biến này được tính đến cho những tập nhỏ, khi đó việc đếm có thể dựa cách thức tri giác.

Chúng tôi phân biệt hai biến của « Vrac »:

- Vrac Xếp chồng: các đơn vị được bố trí theo cách mà cái này chồng lên số khác.
- Vrac Không Xếp chồng: trong trường hợp còn lại.
- Được nhóm lại một phần: Tồn tại ít nhất một nhóm và ít nhất một đơn vị đếm với số lượng lớn hơn 9. Ví dụ: 5 đơn vị đơn giản + 12 nhóm mười.
- Được nhóm lại: khi số lượng của mỗi đơn vị đếm không lớn hơn 9.

Chúng tôi phân biệt hai giá trị con của « Được nhóm lại »:

- Được nhóm lại có Thứ tự: Được bố trí bởi đơn vị đếm giảm từ trái qua phải. Các phần tử của mỗi đơn vị đếm không chồng lên nhau. Giá trị này cho trực tiếp dạng viết vật chất của số chuẩn tắc EMNC (tk. 2.3.)

- Được nhóm lại Không có Thứ tự: trong các trường hợp còn lại;

Tuy nhiên, chúng tôi không phân biệt trường hợp khi các nhóm khác nhau có lẫn lộn hay không. Chúng tôi cho rằng sự phân biệt giữa các nhóm khác nhau đã được lĩnh hội.

Cấu hình cấp của các đơn vị

Biến này nhận hai giá trị:

- Đồng loại: Dụng cụ được cấu tạo bởi một kiểu nhóm duy nhất ứng với cùng một đơn vị đếm. Chẳng hạn, dụng cụ được tạo thành chỉ từ những bó trăm.
- Khác loại: Dụng cụ được cấu tạo bởi ít nhất hai kiểu nhóm hay tương ứng với các đơn vị đếm khác nhau. Chẳng hạn, dụng cụ được cấu tạo từ những bó trăm và các đơn vị đơn giản.

Như vậy, chúng tôi đã ghi nhận 4 biến:

V	Tên	Các giá trị			
V1	Kích thước của tập hợp	Các khoảng dưới dạng $[10^n \dots 10^m]$ hay $[10^n \dots]$			
V2	Bội của 10	Phải		Không	
V3	Tổ chức dụng cụ	Vrac		Được nhóm lại	
		Xếp chồng	Không X. chồng	Được nhóm lại một phần	Được nhóm lại
V4	Cấu hình cấp của các đơn vị	Đồng loại		Khác loại	

Bảng 2 : Các biến cho kiểu nhiệm vụ T_{DC}

Các praxéologie gắn với kiểu nhiệm vụ T_{DC}

Theo Tempier (2012) « Các kĩ thuật thông kê một tập hợp dẫn đến việc thực hiện một cách đếm (hoặc bằng các đơn vị đơn giản hoặc bằng đơn vị) kể đến sử dụng các kĩ thuật đã mô tả để chuyển thành dạng viết chữ số từ việc đọc miệng. Các kĩ thuật này khác biệt nhau bởi cách đếm đã thực hiện ». Vì vậy, ta phân biệt 2 kĩ thuật đếm theo đơn vị đơn giản hay theo đơn vị của hệ đếm. Đếm theo đơn vị đơn giản là đếm một thành một, mười thành mười... và từ cuối cùng ứng với số lượng của tập hợp. Trong khi đó, đếm bằng các đơn vị của hệ đếm một thành một ... cho hết các đối tượng của cùng một đơn vị đếm (một chục, hai chục, ba chục, ...) tiếp theo cần chuyển từ (dùng để đếm) cuối cùng thành các đơn vị đơn giản để nhận được số lượng. Điều này cần thiết phải huy động phương diện thập phân.

Trong bài báo, chúng tôi phân biệt nhiều hơn hai kĩ thuật từ các biến giới thiệu ở trên. Tuy nhiên các kĩ thuật của chúng tôi có thể được nhóm thành hai loại: loại dựa trên việc đếm bằng các đơn vị đơn giản và loại dựa trên việc đếm bằng các đơn vị của hệ đếm. Từ đó, chúng tôi thêm một kĩ thuật dựa trên sự nhận diện nhờ thị giác với các tập hợp nhỏ. Tuy nhiên, chúng tôi không quan tâm đến các kĩ thuật không huy động các nguyên lí của hệ đếm và đặc biệt là phương diện thập phân. Tham chiếu giả thuyết công việc HT2 « Mỗi liên hệ giữa các đơn vị », sử dụng các kĩ thuật chuyển đổi là một tiêu chuẩn cho phép chúng tôi xác định các kiểu nhiệm vụ huy động phương diện thập phân trong yếu tố công nghệ của nó. Một cách tương tự, chúng ta thấy rằng các hoạt động lập nhóm, với điều kiện phải đổi nhóm, thỉnh thoảng sử dụng các kĩ thuật chuyển đổi và nhờ đó huy động phương diện thập phân. Tiêu chuẩn này sẽ được sử dụng tiếp theo để xác định các praxéologie huy động phương diện thập phân.

Chúng tôi đã xác định 10 kiểu nhiệm vụ từ các biến đã phân tích. Tập hợp các praxéologie tương ứng được giới thiệu trong phụ lục.

3. Kết quả và thảo luận

Trong phần cuối, chúng tôi sẽ giới thiệu một vài kết quả từ các praxéologie cần huy động phương diện thập phân.

Với 10 kiểu nhiệm vụ gắn với 19 kĩ thuật có thể, ta có 19 praxéologie điểm. Chỉ có 6 praxéologie tương tác với phương diện thập phân (tham khảo Cột 3 của bản trong phụ lục). Tuy nhiên các kiểu nhiệm vụ này có thể được giải bằng các kĩ thuật khác mà không huy động phương diện thập phân. Đặt ra các kiểu nhiệm vụ này cũng không đảm bảo học sinh phải làm việc với phương diện thập phân bởi vì tồn tại một kiểu nhiệm vụ khác để thực hiện nó.

Như vậy, ta có thể tạo thuận lợi cho việc huy động một kĩ thuật này hơn một kĩ thuật khác như thế nào? Làm sao khóa các kĩ thuật không huy động phương diện thập phân và tạo thuận lợi cho các kĩ thuật huy động khía cạnh này? Trên các biến nào ta có thể thay đổi giá trị để định hướng cho việc lựa chọn các kĩ thuật này?

Bằng cách phân tích kiểu nhiệm vụ « Đếm rồi ghi thành số một tập hợp được nhóm lại một phần », một kĩ thuật có thể xuất hiện là hủy các nhóm và đếm bằng các đơn vị đơn giản. Kĩ thuật này vừa không hiệu quả vừa không tương tác với phương diện thập phân. Ngược lại, tồn tại bốn kĩ thuật hiệu quả hơn và huy động mối liên hệ giữa các đơn vị đếm thông qua các hoạt động chuyển đổi. Nhằm tạo thuận lợi cho hai kĩ thuật cuối cùng, ta phải khóa kĩ thuật đầu tiên. Cấm khả năng hủy nhóm là một cách khóa.

Hơn nữa, với mọi kiểu nhiệm vụ con của kiểu nhiệm vụ « Đếm một tập hợp rồi ghi thành số » (TDC_EC) chúng ta có thể hủy các tập hợp và quay lại với praxéologie đầu tiên « Đếm rồi ghi thành số một tập hợp kiểu vrac » (TDC_EC.Vrac). Tương tự, ta có thể lập nhóm và đếm lại trong trường hợp dụng cụ có các nhóm. Vì vậy, lập nhóm hay hủy nhóm là những hành động điều chỉnh kĩ thuật đếm một tập hợp rồi ghi thành số. Khả năng cho phép hay khóa việc lập hay hủy nhóm có thể biểu diễn một biến thích hợp để chọn lựa kĩ thuật và bắt buộc phải huy động phương diện thập phân một cách trực tiếp.

Chúng tôi xem hai hoạt động « tạo » và « hủy » các nhóm như các biến mà việc chọn lựa giá trị của chúng có thể cho phép hay khóa một số kĩ thuật nào đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bednarz, N., Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N* 33, 5-31
2. Chaachoua, H. Ferraton, G., Desmoulins, C., (2013) Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.
3. Chaachoua H. (2010) *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. HDR. UGA.
4. Chaachoua, H., Bessot A. (2016) Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.
5. Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.
6. Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 221–266.

7. Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.

8. Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle*, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle (p. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

9. Parouty, V. (2005). Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres*. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ? Commission Inter-IREM COPIRELEM. Toulouse : IREM de Toulouse

10. Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris : Pétra.

11. Tempier (2012)

12. Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, (86), 59-90.

13. Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Paris-Diderot - Paris VII, French. Consulté à l'adresse <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00921691/document>.

14. Van de Walle, J.A. (2010). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally (Seventh edition)*. Boston : Pearson Education.

Phụ lục : Giới thiệu các praxéologie liên hệ với sự huy động phương diện thập phân

Kiểu nhiệm vụ	Tập hợp	Các kĩ thuật	Các kĩ thuật huy động phương diện thập phân
T _{DC_E C.Vrac}	Tập hợp kiểu vrac [Vrac : Chỉ cung cấp các đơn vị đơn giản và không có nhóm nào]	- Đếm đơn 1 đối 1 - Lập các nhóm và đếm - Tạo ra một tập hợp được nhóm lại - Tạo ra một tập hợp được nhóm một phân	- Không - Không - Ta không thể biết được ² - Ta không thể biết được
T _{DC_EC.VracNSup_Nhỏ}	Tập hợp kích thước nhỏ kiểu vrac không chồng lên nhau	- Nhận diện thị giác	- Không
T _{DC_EC.Vrac_10k}	Tập hợp kiểu vrac có số phần tử là bội của 10 và nhỏ hơn 100	- Đếm bằng đơn vị đơn giản X thành X theo nhóm - Đếm bằng các đơn vị của hệ đếm theo nhóm	- Không - Có

² Ở đây, kĩ thuật huy động một kiểu nhiệm vụ với nhiều praxéologie điểm trong đó có ít nhất một praxéologie huy động phương diện thập phân. Vì vậy ta phải biết tiến trình của kĩ thuật ở mức độ thấp hơn.

$T_{DC\_EC.Gr}$	Tập hợp được nhóm lại	- Hủy tất cả các nhóm thành đơn vị đơn giản và xử lý như trường hợp dụng cụ kiểu vrac	- Không
$T_{DC\_EC.Gr.Hom}$	Tập hợp được nhóm lại đồng loại	- Đếm bằng đơn vị đơn giản X thành X - Đếm bằng các đơn vị của hệ đếm theo nhóm	- Không - Có
$T_{DC\_EC.GrOrd\_Het}$	Tập hợp được nhóm lại có thứ tự và khác loại	- Đếm X thành X en Surcomptant. - Đếm X thành X với X là bội của 10 - Đếm thành đơn vị của hệ đếm	- Không - Không - Không
$T_{DC\_EC.GrDeso\_Het}$	Tập hợp được nhóm lại không có thứ tự và khác loại	- Sắp xếp lại rồi dùng $T_{DC\_EC.Gr\_ord}$	- Không
$T_{DC\_EC.PGr}$	Tập hợp được nhóm lại một phần	- Hủy hết các nhóm thành đơn vị đơn giản rồi chuyển về trường hợp dụng cụ kiểu vrac - Đếm bằng đơn vị của hệ đếm và chuyển đổi	- Ta không thể biết được - Có
$T_{DC\_EC.PGr\_Hom}$	Tập hợp được nhóm lại một phần đồng loại	- Đếm bằng các đơn vị của hệ đếm và chuyển đổi	- Có
$T_{DC\_EC.PGr\_Het}$	Tập hợp được nhóm lại một phần khác loại	- Đếm bằng các đơn vị của hệ đếm theo từng cấp và chuyển đổi - Đếm bằng các đơn vị của hệ đếm theo từng cấp và dịch	- Có - Có
TOTAL		19	6

MÔ PHỎNG PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN BẰNG PHẦN MỀM EXCEL VÀ R TRONG DẠY HỌC XÁC SUẤT Ở LỚP 11

Bùi Anh Kiệt*, Nguyễn Chí Thành**

Tóm tắt

Trong chương trình Toán 11 phổ thông, khái niệm xác suất được dạy chủ yếu dựa vào công thức xác suất cổ điển của Laplace. Cho nên học sinh dễ mắc phải các sai lầm khi học khái niệm này. Vận dụng dạy học mô hình hoá kết hợp với mô phỏng bằng phần mềm Excel và R giúp học sinh thực sự hiểu đúng nghĩa của xác suất thông qua tiếp cận tần suất. Hơn nữa, việc tiếp cận với các phần mềm thống kê như Excel và R sẽ giúp học sinh biết vận dụng công cụ tin học để giải quyết các bài toán thực tế. Bài báo này đề xuất một cải tiến trong việc dạy xác suất cho học sinh lớp 11 thông qua mô phỏng bằng Excel và R.

Từ khóa: tiếp cận tần suất, xác suất một biến cố, phần mềm thống kê, R, mô hình.

Abstract

In the mathematics curriculum grade 11, the teaching of the concept of probability gives an important place to a « classical » approach based on the formula of Laplace. Therefore, many students make mistakes when learning this concept. Using modeling teaching connected with simulation by Excel and R softwares can help students understand the real meaning of the concept of probability through the frequentist approach. Moreover, approaching with statistical softwares such as Excel and R will help students know how to use IT to solve real-world problems. This article aims to suggest an innovation to improve the teaching of probability in the mathematics curriculum grade 11.

Keywords: frequentist approach, probability of an event, statistical software, R, models.

1. Đặt vấn đề

Trong chương trình Toán lớp 11 phổ thông hiện nay, chương II của sách giáo khoa cơ bản (SGKCB) và nâng cao (SGKNC) giới thiệu khái niệm xác suất của một biến cố chủ yếu sử dụng công thức xác suất cổ điển của Laplace; trong khi định nghĩa thống kê của xác suất (dựa vào tần suất hay còn gọi là theo tiếp cận tần suất) được giới thiệu một cách rất sơ sài (Vũ Như Thư Hương, 2005). Điều này thể hiện ở số bài tập liên quan đến xác suất cổ điển rất nhiều, trong khi số bài tập liên quan đến tiếp cận tần suất rất ít (chỉ một bài về gieo con xúc sắc). Do đó, nhiều học sinh gặp các khó khăn khi học khái niệm này:

1. Học sinh hiểu sai khi tin rằng xác suất của tất cả các biến cố sơ cấp trong cùng một phép thử đều bằng nhau. Chẳng hạn như khi gieo đồng thời hai đồng xu cân đối và đồng chất. Gọi S là biến cố xuất hiện mặt sấp của đồng xu và N là biến cố xuất hiện mặt ngửa. Ta thấy rằng phép thử này cho chúng ta ba kết cục: xuất hiện mặt sấp hai lần, xuất hiện mặt ngửa hai lần, và xuất hiện mặt sấp, mặt sấp mỗi mặt một lần. Nhiều học sinh sai lầm khi cho rằng xác suất của ba biến cố này đều bằng nhau và bằng $1/3$. Sai lầm này theo chúng tôi và nhiều nhà nghiên cứu khác có thể do học sinh bị ảnh hưởng của định nghĩa theo xác suất cổ điển (yêu cầu các kết cục của phép thử phải đồng khả năng).

* TS, Đại học Cần Thơ

** PGS.TS, THPT Hoà Bình – La Trobe

2. Học sinh không thấy được mối liên hệ giữa tần suất và xác suất lý thuyết của một biến cố, nên không hiểu được nghĩa thực sự của xác suất (Vũ Như Thu Hương, 2005).

3. Học sinh không được trang bị các công cụ để tính toán xác suất của các biến cố trong trường hợp các kết cục của phép thử không đồng khả năng; ví dụ như bài toán:

Tung một cây đinh gắn giấy vẽ. Tính xác suất của biến cố “đầu nhọn của cây đinh hướng lên trên”.

Chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm bài toán này đối với học sinh lớp 11 sau khi học xong chương II, nhiều học sinh trả lời không biết dùng công cụ gì để tính xác suất nói trên.

4. Học sinh không biết được là có thể sử dụng các phần mềm thống kê để phục vụ cho việc dạy và học xác suất.

Những khó khăn nói trên có ảnh hưởng rất lớn đến học sinh khi họ học môn xác suất thống kê ở trường đại học hoặc cao đẳng sau này.

Mục tiêu chung của nghiên cứu này là chúng tôi muốn thử nghiệm việc giúp học sinh vượt qua các khó khăn nêu trên thông qua việc cải tiến chương trình: nhấn mạnh việc áp dụng tiếp cận tần suất trong việc dạy học khái niệm xác suất có sử dụng mô phỏng phép thử ngẫu nhiên bằng phần mềm Excel và R.

2. Lược khảo tài liệu và mục tiêu nghiên cứu

Thông qua việc tham khảo các tài liệu, chúng tôi thấy rằng, khi đề xuất và đánh giá sự đổi mới trong giảng dạy xác suất trong các lớp học, nhà nghiên cứu cần phải biết có những khó khăn nào, đặc biệt là những hiểu nhầm (misconceptions) học sinh có thể gặp phải trong khi lập luận về xác suất của họ. Điều này có thể được tiến hành nhờ vào đồ án dạy học. Giúp học sinh vượt qua những quan niệm sai lầm trong xác suất không phải là một nhiệm vụ dễ dàng. Garfield (2007) cho rằng quan niệm sai lầm về xác suất không biến mất sau những phương pháp giảng dạy truyền thống tập trung vào định nghĩa, các quy tắc và thủ tục. Mặc dù học sinh có thể tìm hiểu các quy tắc và thủ tục trong tính toán xác suất và thậm chí nếu họ có được câu trả lời chính xác trong các bài kiểm tra, các học sinh này thường hiểu sai các ý tưởng và khái niệm cơ bản và họ thường bỏ qua các quy tắc khi tự đánh giá đối với các sự kiện không chắc chắn; quan niệm sai lầm cũng có thể xuất hiện như là kết quả của việc giáo dục nhận được trong các hình thức của lý thuyết được sử dụng bên ngoài phạm vi của họ.

Cần thiết kế một can thiệp đặc biệt về mặt sư phạm để loại bỏ quan niệm sai lầm của học sinh đối với khái niệm xác suất, điều này nhằm cải thiện và ổn định các khái niệm mà học sinh có thể thu nhận được.

Sự tham gia tích cực của học sinh trong việc xây dựng các kiến thức khi làm việc với mẫu có kích cỡ lớn cần sử dụng đến các mô phỏng trong xác suất thống kê như công cụ cho mục tiêu này.

Chúng tôi nhắc lại rằng ý tưởng về tần suất của một biến cố và một dãy các phép thử lặp lại đóng một vai trò rất quan trọng. Vì « tiếp cận cổ điển » (classical approach) dựa trên công thức của Laplace và giải tích tổ hợp không cho học sinh một trực giác thực sự về vấn đề này nên đồ án dạy học của chúng tôi sẽ giới thiệu « tiếp cận tần suất » (frequentist approach) cho khái niệm xác suất một biến cố dựa trên quan sát sự hội tụ của dãy tần suất xuất hiện của biến cố này khi các phép thử ngẫu nhiên được lặp

lại thật nhiều lần. Chúng tôi hi vọng rằng việc sử dụng tiếp cận tần suất có thể khiến học sinh nhận thức rõ cả hai điều sau: không thể dự đoán được xác suất của một biến cố khi phép thử ngẫu nhiên được lặp lại một số ít lần; và thấy sự ổn định dần của dãy tần suất mô tả xác suất khi số phép thử tăng lên thật lớn. Hơn nữa, tiếp cận tần suất sẽ hữu ích khi cung cấp một giá trị xấp xỉ cho xác suất thực của một biến cố; khi cỡ mẫu đủ lớn, học sinh có thể so sánh kết quả nhận được của tần suất thực nghiệm và các kết quả lý thuyết từ tiếp cận cổ điển. Quan sát một dãy phân kỳ cũng có thể giúp họ nhận ra một sai lầm về xác suất (Bui, 2015).

Nhờ việc nghiên cứu tài liệu tham khảo, chúng tôi lưu ý rằng việc sử dụng mô phỏng – « đại diện mô phỏng của một hiện tượng ngẫu nhiên » là phù hợp với cách tiếp cận tần suất, bởi vì các quan sát về sự hội tụ của các tần suất thường không thể thực hiện trong thực tế. Ngoài ra, theo Garfield, Chance & Snell (2000), các mô phỏng được sử dụng để xây dựng một mô hình cho một hiện tượng ngẫu nhiên và do đó học sinh có một sự hiểu biết rõ hơn về tình huống ngẫu nhiên tiềm ẩn và chuẩn bị cho một « cách tiếp cận tần suất ».

Các nghiên cứu về tài liệu tham khảo cũng giúp làm nổi bật khả năng của phần mềm thống kê để xây dựng và mô phỏng trên các mẫu lớn: một bảng tính như Excel, và một ngôn ngữ lập trình như R.

Ưu điểm của Excel là hầu hết học sinh đều quen thuộc với phần mềm này vì nó được giới thiệu ở trường phổ thông. Khi học sinh thực hiện mô phỏng phép thử, họ có thể quan sát trực tiếp kết quả mô phỏng. Học sinh cũng có thể sử dụng phím F9 để tái lập mẫu mới và quan sát sự biến động của tần suất giữa các mẫu sau mỗi lần bấm phím F9.

Không giống như với Excel, R là một ngôn ngữ lập trình. Việc sử dụng các ngôn ngữ lập trình có thể là một thách thức đối với giáo viên và học sinh, nhưng nó cũng có lợi ích cho việc dạy học. Trong thực tế, nó ngăn chặn học sinh sử dụng menu giao diện, chọn một công cụ mà không hiểu biết về chức năng của công cụ đó; hành động này dẫn tới việc lựa chọn một thủ tục không phù hợp. Ngược lại, việc sử dụng một ngôn ngữ lập trình cho phép học sinh tập trung vào một số giới hạn các tính năng được giáo viên giới thiệu. Một lợi thế là R là một phần mềm thống kê chuyên nghiệp và do đó việc sử dụng nó giúp học sinh chuẩn bị cho những ứng dụng mới trong cuộc sống chuyên nghiệp của họ sau này. Ngoài ra, do R là một ngôn ngữ có cấu trúc nên học sinh có thể sử dụng một phương pháp tiếp cận mô-đun trong việc xây dựng một mô hình. Điều này giúp họ hiểu sâu hơn các mô hình khái niệm.

So với Excel, một mô phỏng trong R có thể được thực hiện trên các mẫu rất lớn, lên đến mười triệu và nhiều hơn nữa. Điều này giúp học sinh hình dung quá trình dãy tần suất tiến về xác suất lý thuyết của biến cố khi kích thước mẫu tăng đến một số rất lớn.

Hai phần mềm (Excel và R) cung cấp các khả năng cụ thể để thực hiện mô phỏng mà chúng tôi sẽ sử dụng trong đồ án dạy học của mình. Chúng tôi sẽ mô tả chi tiết dưới đây các tính năng sử dụng và các cơ hội mà chúng cung cấp cho đồ án dạy học này.

Từ những phân tích trên, chúng tôi đưa ra câu hỏi nghiên cứu:

1. Làm cách nào để kết nối tiếp cận cổ điển và tiếp cận tần suất? Đặc biệt, làm cách nào để xây dựng một môi trường học tập (milieu) (Brousseau, 1997) để thực thi các hợp đồng dạy học thích hợp cho sự kết hợp này?

2. Những kiểu nhiệm vụ và kỹ thuật nào liên quan với “tiếp cận tần suất”? Đặc biệt, làm thế nào chúng cải thiện việc dạy/học xác suất ở góc độ sai lầm về xác suất của học sinh và xây dựng mô hình đầy đủ cho các tình huống ngẫu nhiên?

3. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu của chúng tôi dựa trên phương pháp đồ án dạy học (Didactical engineering) (Artigue, 1989). Các buổi dạy thực nghiệm được thiết kế và tiến hành bởi tác giả đầu tiên của bài báo này nhằm nghiên cứu tính khả thi của đồ án dạy học như đã phân tích ở trên.

Các buổi thực nghiệm

Các buổi thực nghiệm được tiến hành tại lớp 11A1, Trường PTTH Nguyễn Việt Dũng, Quận Ninh Kiều, TP Cần thơ. Lớp 11A1 này học theo chương trình nâng cao hiện hành, bao gồm 30 học sinh, hầu hết là khá giỏi vì đây là lớp chọn nên khá thích hợp cho việc thử nghiệm mô hình giảng dạy mới. Các buổi thực nghiệm được tiến hành vào giữa học kỳ 2, sau khi học sinh đã học xong chương IV (Giới hạn của dãy số và hàm số). Mỗi buổi thực nghiệm được tiến hành trong 3 tiết tại phòng máy tính của trường. Chúng tôi đã dành một buổi để dạy cho học sinh một số cú pháp của phần mềm R trước khi tiến hành thực nghiệm. Ba buổi thực nghiệm tương ứng với ba bài toán về xác suất; trong mỗi bài toán, chúng tôi xem xét một biến cố hoặc nhiều hơn và đặt các câu hỏi liên quan đến các biến cố này. Chúng tôi lựa chọn những bài toán này vì trong mỗi bài toán, việc tính xác suất là không dễ dàng đối với học sinh và có thể là một đề tài tranh luận.

Đối với mỗi bài toán, việc xây dựng mô phỏng có hai đóng góp: đầu tiên là tần suất của một hay nhiều biến cố đối với một số cho trước phép thử; và sau đó là phát triển mô hình hữu ích cho việc tính toán các xác suất lý thuyết. Các buổi thực nghiệm được thực hiện theo tiến trình sau: đầu tiên học sinh sẽ tích lũy kinh nghiệm thực tế về bài toán qua việc tiến hành các thực nghiệm với cỡ mẫu nhỏ, sau đó đi đến dự đoán về xác suất của các biến cố. Kế tiếp, học sinh sẽ xây dựng mô phỏng để quan sát các tần suất và sự biến động của các tần suất này. Cuối cùng là quay lại tính xác suất bằng công thức cổ điển. Các bước này nhằm thực hiện các kiểu nhiệm vụ và xây dựng các kỹ thuật liên quan đến mô phỏng, kết nối tiếp cận tần suất và tiếp cận cổ điển, nhờ đó, giúp học sinh vượt qua các sai lầm trong xác suất.

4. Các bài toán

1. Bài toán hai con xúc sắc

a. Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối và đồng chất 100 lần. Gọi X là tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc. So sánh các tần suất của $(X = 7)$ và $(X = 8)$. Chúng ta có thể nói rằng $P(X = 7) = P(X = 8)$ hay không?

b. Mô phỏng gieo hai con xúc sắc cân đối và đồng chất dùng phần mềm Excel với số phép thử bằng $n = 1.000$. Lập bảng phân phối tần suất của X (dựa trên mô phỏng). Chúng ta có thể nói rằng $P(X = 7) = P(X = 8)$ hay không?

c. Mô phỏng gieo hai con xúc sắc cân đối và đồng chất dùng phần mềm R với số phép thử bằng $n = 100.000$. Lập bảng phân phối tần suất của X (dựa trên mô phỏng). Chúng ta có thể nói rằng $P(X = 7) = P(X = 8)$ hay không? Cần ít nhất bao nhiêu phép thử để có thể kết luận được về sự khác biệt giữa $P(X = 7)$ và $P(X = 8)$?

d. Tính các xác suất: $P(X = 7)$ và $P(X = 8)$. Các kết quả này có tương thích với câu b và câu c hay không?

$X = 7$ và $X = 8$ được chọn vì một sai lầm phổ biến của học sinh về các xác suất đồng khả năng, cặp $(4; 4)$ có thể được đếm hai lần trong số các biến cố sơ cấp. Học sinh cũng có thể quan sát: $P(X = 2) < P(X = 3) < P(X = 4) \dots$ Từ đó, học sinh có thể suy đoán rằng $P(X = 7) < P(X = 8)$.

2. Bài toán thỏ và rùa

Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất, nếu số 6 xuất hiện thì thỏ thắng cuộc; nếu số 6 không xuất hiện thì rùa bước lên một bước. Tiếp tục gieo con xúc sắc cho đến khi thỏ thắng cuộc hoặc rùa bước lên 4 bước, khi đó rùa thắng cuộc và trò chơi kết thúc.

a. Mô phỏng bài toán dùng phần mềm Excel với số phép thử bằng 1.000. Từ đó dự đoán khả năng thắng cuộc của ai nhiều hơn?

b. Mô phỏng bài toán dùng phần mềm R với số phép thử bằng 100.000. Từ đó dự đoán khả năng thắng cuộc của ai nhiều hơn? Cần ít nhất bao nhiêu phép thử để có thể quan sát được sự khác biệt có ý nghĩa giữa xác suất thắng cuộc của rùa và thỏ?

c. Tính các xác suất thắng cuộc của rùa và thỏ, xác suất nào lớn hơn? Kết quả này có tương thích với kết quả câu a và câu b hay không?

Thách thức ở đây là quyết định xem thỏ hay rùa có nhiều cơ hội thắng cuộc hơn. Số 4 đã được lựa chọn vì câu trả lời là không hiển nhiên (xác suất rùa thắng $\cong 0,5177$ và xác suất thỏ thắng $\cong 0,4823$).

3. Bài toán săn vịt (Engel, 1990)

Có năm người thợ săn và năm con vịt. Mỗi thợ săn bắn một phát đạn ngẫu nhiên vào một trong năm con vịt; biết rằng mỗi thợ săn luôn bắn trúng. Gọi X là số con vịt còn sống sót.

a. Mô phỏng bài toán dùng phần mềm Excel với số phép thử bằng 1.000. Từ đó dự đoán trung bình số vịt còn sống sót.

b. Mô phỏng bài toán dùng phần mềm R với số phép thử bằng 100.000. Từ đó dự đoán trung bình số vịt còn sống sót. Cần ít nhất bao nhiêu phép thử để có thể quan sát được sự ổn định của trung bình số vịt còn sống sót?

c. Tính trung bình lý thuyết của số vịt còn sống sót. Con số này có gần với các kết quả thu được từ mô phỏng của câu a và câu b hay không?

Thách thức ở đây là xác định qui luật phân phối xác suất và tính kỳ vọng của X . Số 5 được chọn để số phần tử của không gian mẫu đủ lớn ($5^5 = 3125$) và việc tính xác suất của các biến cố liên quan là tương đối thách thức với học sinh.

Sự tiến triển của các bài toán

Mỗi bài toán có đặc trưng riêng và chúng tôi chọn một trình tự để trình bày các bài toán dựa trên các đặc trưng này.

Trong bài toán hai con xúc sắc, một phép thử đơn giản sử dụng hai con xúc sắc là khả dĩ đối với cỡ mẫu nhỏ, nhưng nó không được thuyết phục. Mô phỏng dựa trên phép cộng đơn giản các số (giả) ngẫu nhiên và một thử nghiệm so sánh. Đây là cơ hội

để giới thiệu cú pháp và phương thức của các phép toán đối với các số ngẫu nhiên này, cũng như kiểm tra cả hai đối với Excel và R. Việc tính toán xác suất lý thuyết bằng cách đếm các kết cục đồng khả năng là không hiển nhiên đối với biến cố « tổng của một số cho trước », khi số này là số chẵn, học sinh có thể nghĩ rằng, chẳng hạn biến cố « tổng bằng 8 » chứa hai lần cặp (4, 4), nhưng mô phỏng sẽ giúp vô hiệu hoá sai lầm này. Tóm lại, chúng tôi hi vọng rằng tình huống này đủ đơn giản để là một khởi đầu tốt đối với học sinh về mô phỏng và tính toán toán học.

Bài toán thử và rùa phức tạp hơn: nó bao gồm một loạt các phép thử độc lập và một qui tắc dừng. Biết khả năng thắng cuộc của ai cao hơn không phải là điều hiển nhiên nơi học sinh và họ cũng chưa được học về luật phân phối bội cắt ngang (mô hình lý thuyết ở đây). Để mô phỏng phép thử này, học sinh phải viết chương trình cho hai phép thử liên tiếp và tuân theo các qui tắc của bài toán; điều này là không dễ đối với cả Excel và R.

Đối với bài toán săn vịt, học sinh phải xử lý tất cả các biến cố liên quan đến phép thử, sau đó sử dụng luật phân phối xác suất và kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc. Mô phỏng cho phép học sinh có được tần suất của các biến cố liên quan và trung bình thống kê ứng với cỡ mẫu cho trước. Việc tính toán xác suất lý thuyết là không đơn giản và mô phỏng thực sự giúp học sinh vô hiệu hoá các sai lầm.

Vì vậy, sự tiến triển theo độ phức tạp của bài toán. Học sinh được yêu cầu xây dựng các mô hình tinh vi hơn và xem xét nhiều hơn các chọn lựa từ buổi thực nghiệm này đến buổi khác.

Phần mềm và mô phỏng

Để giới thiệu việc sử dụng các phần mềm trong khoa học thực nghiệm, chúng tôi dùng khái niệm chức năng didactic của một công cụ kỹ thuật số (Cerulli *et al.*, 2006); được định nghĩa bởi ba yếu tố:

a. Một tập hợp các chức năng / đặc trưng của công cụ

Excel là phần mềm dựa trên các công thức được viết trong bảng. Chúng ta có thể xem kết quả trực tiếp trên màn hình máy tính ngay sau khi cập nhật công thức. Sự lặp lại có thể được thực hiện bằng cách sao chép các công thức trên dòng hoặc cột. Không có cách thuận tiện nào để biểu diễn cho điều kiện dừng và số phép lặp bị giới hạn trong thực tiễn. Tuy nhiên, có thuận lợi là không cần viết một chương trình giống như một ngôn ngữ lập trình. Excel cũng có các hàm tiêu chuẩn cho thống kê mô tả (mean, countif...) và một bộ sinh số giả ngẫu nhiên dưới hai dạng: hàm RAND, một phân phối đều giữa 0 và 1; hàm RANDBETWEEN(a,b), phân phối đều của các số nguyên từ a đến b. Đồ hoạ của Excel cũng rất tốt để trình bày các dữ liệu thu thập từ mô phỏng. Excel có phím chức năng F9 dùng để tái tính các công thức, cho các số liệu mới dùng cho các dữ liệu giả ngẫu nhiên.

R là một ngôn ngữ lập trình. R có thể được sử dụng bởi các dòng lệnh hoặc bởi các chương trình có cấu trúc.

R có cấu trúc luân phiên (if ... else ...). Cấu trúc chính của sự lặp lại là vòng lặp for. R có chức năng đối với vector (mean, unique) hữu ích để xử lý thống kê. Các bộ sinh số giả ngẫu nhiên được gọi thông qua hàm sample(a:b, n, repl). Nếu a và b là các số nguyên, hàm trả về một vector giả ngẫu nhiên của n số nguyên phân bố đồng đều

giữa a và b. Các tham số repl điều khiển mẫu có lặp hay không. Nếu repl = T thì mẫu có lặp, nếu repl = F thì mẫu không lặp.

Việc tái lập các mẫu có thể được thực hiện bằng cách chạy lại chương trình; cỡ mẫu trong mô phỏng bằng R có thể là số rất lớn.

b. Mục tiêu giáo dục

Theo luật số lớn, Excel và R có thể được dùng để mô phỏng một tình huống ngẫu nhiên, thu thập dữ liệu để xấp xỉ xác suất lý thuyết của một biến cố ngẫu nhiên hoặc trung bình lý thuyết của một biến ngẫu nhiên.

Chúng tôi dự kiến yêu cầu học sinh sử dụng mô phỏng trong cách tiếp cận tần suất của xác suất của một biến cố hay kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên.

Kết quả của các dữ liệu mô phỏng trong Excel hoặc R sẽ được sử dụng để xác nhận hoặc phủ nhận tính toán xác suất lý thuyết và giúp học sinh kiểm soát tốt hơn những tính toán này. Đây là chiều hướng thực tế của mô phỏng.

Mô phỏng trong bối cảnh giảng dạy cũng có thể có một chiều hướng khái niệm. Đầu tiên, học sinh có thể nhận thức được quá trình tần suất của một biến cố hay trung bình thống kê của một biến ngẫu nhiên tiến về một giới hạn khi cỡ mẫu tăng rất lớn và độ biến động giảm dần; họ cũng hiểu được các giới hạn này là xác suất lý thuyết của biến cố đó hoặc kỳ vọng lý thuyết của biến ngẫu nhiên.

Thứ hai, để xây dựng một mô phỏng, học sinh sẽ xây dựng một mô hình. Chúng tôi hy vọng rằng suy nghĩ về mô hình này sẽ giúp học sinh thực hiện tốt hơn việc kiểm soát các tính toán về xác suất.

c. Thể thức sử dụng công cụ trong quá trình dạy / học

Học sinh có thể sử dụng phím chức năng F9 trong Excel để tái lập mẫu và hình dung sự biến động của tần suất của một biến cố hay các trung bình thống kê của một biến ngẫu nhiên.

R có thể được sử dụng để mô phỏng một thử nghiệm với một kích thước mẫu rất lớn lên đến một triệu hoặc hơn nữa. R chạy rất nhanh và do đó chúng ta có thể tiết kiệm thời gian cho các lớp học mô phỏng. Khi chúng ta cố định kích thước mẫu để mô phỏng một thí nghiệm, R có thể cho phép quan sát sự biến động của tần suất của một biến cố hoặc giá trị trung bình thống kê của một biến ngẫu nhiên bằng cách lặp lại câu lệnh. Khả năng đồ họa của R cũng có thể được sử dụng như trong Excel.

Như một kết quả của phân tích này, trong mỗi buổi thực nghiệm, học sinh đầu tiên sẽ thực hiện một mô phỏng với Excel và sau đó mô phỏng với R, kế đến thực hiện một tính toán lý thuyết. Do đó, đầu tiên họ sẽ xây dựng một mô hình đối với Excel và nhận được kết quả trên mẫu hạn chế, và sau đó điều chỉnh các mô hình hoặc tạo ra một cái mới với R và có được kết quả trên các mẫu lớn hơn. Những mô phỏng này được sử dụng có hiệu quả cho việc xấp xỉ các tính toán lý thuyết.

5. Kết quả thực nghiệm

Buổi thực nghiệm thứ 1: Tổng hai con xúc xắc

Giáo viên giúp học sinh làm quen với việc thực hiện một thí nghiệm cụ thể và thu thập dữ liệu. Giáo viên sử dụng các dữ liệu thu thập được từ việc tung con xúc sắc để

học sinh thấy được sự cần thiết một kích thước mẫu lớn hơn. Sau đó, học sinh sẽ thực hiện mô phỏng bằng cách sử dụng Excel theo sự hướng dẫn của giáo viên. Sự biến động của các kết quả nhận được sẽ giúp học sinh thấy được sự cần thiết có một mẫu lớn hơn để so sánh hai xác suất $P(X = 7)$ và $P(X = 8)$. Sau đó, giáo viên sẽ trình bày cách sử dụng phần mềm R cho các mô phỏng. Trong pha cuối cùng, ông ấy sẽ thảo luận với các học sinh về giá trị của các mô phỏng.

Học sinh khá nhạy cảm với sự biến động của các tần suất và gắn kết với kích thước mẫu mà không cần khai thác trực tiếp để so sánh hai xác suất của bài toán. Liên quan đến kích thước mẫu, giáo viên và học sinh giới hạn trong hai kích thước: 1.000 (quá nhỏ) và 100.000 (đủ lớn); một cơ hội đã bị bỏ qua để hỏi về kích thước mẫu, xác định kích thước mẫu tối ưu để phân biệt hai xác suất của bài toán này (chẳng hạn $P(X = 7) > P(X = 8)$ với độ tin cậy 95%).

Học sinh có khó khăn khi tạo ra số ngẫu nhiên trong Excel nhưng họ không gặp nhiều khó khăn khi lập trình với R.

Buổi thực nghiệm này phản ánh những quan niệm sai lầm của học sinh trong các pha khác nhau. Những quan niệm sai lầm bị vô hiệu hoá bằng cách so sánh tần suất thu được từ mô phỏng trên một mẫu lớn, chứ không phải là một sự suy nghĩ về các mô hình được phát triển cho mô phỏng này. Đặc biệt, trong pha cuối cùng, khi tính toán xác suất lý thuyết, các tần suất thu được từ mô phỏng được sử dụng để vô hiệu hoá quan niệm sai lầm về không gian mẫu (bao gồm các cặp không có thứ tự). Tuy nhiên, các mô hình phát triển cho mô phỏng không được sử dụng, chẳng hạn khi xem xét các dữ liệu được tạo ra bởi Excel, học sinh có thể thấy rằng các tổng $4 + 3$, $3 + 4$ và $4 + 4$ xuất hiện với cùng tần suất. Giáo viên thể chế hoá vai trò thực dụng này của mô phỏng hơn là một sự suy nghĩ trên mô hình được xây dựng trong pha mô phỏng.

Buổi thực nghiệm 2: bài toán rùa và thỏ

Buổi thực nghiệm này đánh dấu một bước tiến trong sự phức tạp của bài toán và không dễ đối với nhiều học sinh.

Sau pha đầu tiên, giáo viên và học sinh không nhắc lại câu hỏi ban đầu (khả năng thắng cuộc của ai nhiều hơn ?) điều này bị bỏ quên mà tập trung chủ yếu vào xác suất của mỗi biến cố, đầu tiên là tiếp cận tần suất và tính toán xác suất lý thuyết. Đây có thể là kết quả của hợp đồng dạy học, định hướng vào các giá trị xác suất mà giảm thiểu các câu hỏi về thống kê.

Giống như trong buổi thực nghiệm trước, học sinh ít gặp khó khăn với R hơn là với Excel. Với Excel, mô hình là tương thích với tình huống theo nghĩa quá trình sẽ dừng sau khi một người thắng cuộc, điều này không dễ nhận ra khi xử lý trong Excel. Mô hình để mô phỏng với R quay về việc gieo con xúc sắc 4 lần và kết luận rằng thỏ sẽ thắng cuộc nếu nhận được ít nhất một mặt 6 chấm, điều này dễ dàng thực hiện trong R. Mô hình được đề nghị bởi giáo viên để tính toán xác suất lý thuyết và hướng đến sử dụng công thức Laplace, một cách ngấm ẩn, để tìm không gian mẫu của các kết cục đồng khả năng nhưng nhanh chóng bị bỏ qua sau khi một học sinh đề nghị sử dụng công thức nhân xác suất. Các mô hình khác nhau được sử dụng trong các pha khác nhau; thay đổi mô hình này đơn giản hóa việc lập trình bằng R và tính toán lý thuyết, nhưng không phải là chủ đề của một cuộc thảo luận lớp. Các mô hình mới được so sánh với các mô hình trước đó và sự tương đương của các mô hình không được thảo

luận. Đây lại là một cơ hội bỏ lỡ, và như trong những buổi thực nghiệm trước đó, vai trò thực dụng trong mô phỏng được ưu tiên bởi giáo viên thay vì suy nghĩ trên các mô hình sử dụng trong các pha mô phỏng.

Buổi thực nghiệm thứ 3: bài toán săn vịt

Dường như học sinh không gặp nhiều khó khăn trong việc sử dụng các hàm trong Excel và R để mô phỏng. Như trong các buổi thực nghiệm trước đó, giáo viên nhấn mạnh sự cần thiết phải tăng kích thước của các mẫu thích hợp trong mô phỏng để làm cầu nối cho việc chuyển đổi sang sử dụng R. Bằng cách này, học sinh đề nghị một kích thước mẫu rất lớn mà không có một cuộc thảo luận về một kích thước phù hợp.

Phân tích này xác nhận rằng mô phỏng có thể cung cấp một môi trường phong phú cho sự phản ánh của học sinh. Tuy nhiên, dường như tốt hơn nếu giáo viên đòi hỏi kích thước mẫu nhỏ nhất với độ chính xác cho trước.

Chiến lược để tính trung bình số vịt sống sót khác nhau đối với hai mô phỏng : đối với Excel, trung bình số vịt sống sót được tính trực tiếp (tổng số vịt còn sống chia cho số lần bắn); đối với R, đầu tiên học sinh tính tần suất thực nghiệm của mỗi biến cố, (số vịt còn sống sót) nhưng sau khi giáo viên giới thiệu hàm `mean()` để tính trung bình trong R thì học sinh bỏ các tần suất thực nghiệm mà tính trực tiếp trung bình số vịt sống sót như trong Excel. Đối với các tính toán lý thuyết, giáo viên hướng dẫn học sinh tính các xác suất của số vịt còn sống sót bằng cách so sánh các tần suất thực nghiệm nhận được từ mô phỏng bằng R như một tiên quyết cho việc tính trung bình. Thất bại trong việc thảo luận khả năng tính trực tiếp trung bình không qua bảng phân phối xác suất là một cơ hội khác bị bỏ lỡ. Thực vậy, thảo luận về vấn đề này có thể hướng học sinh vào khai thác tính chất tổng của các kì vọng trong các phép thử lặp.

6. Thảo luận

Kiểu nhiệm vụ và kỹ thuật

Các mô phỏng đã mang lại kiểu nhiệm vụ mới liên quan đến câu hỏi thống kê. Sự lựa chọn trong buổi thực nghiệm đề xuất các kiểu nhiệm vụ này trước các nhiệm vụ cũ/quen thuộc. Chúng tôi quan sát thấy rằng học sinh thường xuyên kiểm tra kết quả tính toán xác suất lý thuyết của họ dựa trên các kết quả thực nghiệm, đặc biệt là trong buổi thực nghiệm thứ ba nơi mà năm xác suất lý thuyết được tính toán, và cũng để vô hiệu hoá các quan niệm sai lầm hoặc các mô hình sai. Việc kiểm tra này xuất hiện như là một kỹ thuật được tích hợp trong các kiểu nhiệm vụ. Điều này có nghĩa là các học sinh thực hiện các mô phỏng với các kỹ thuật cổ điển đã được học, sau đó nhận được kiểm soát tốt hơn các kỹ thuật này. Việc thực hành của kỹ thuật « pha trộn » này dường như có một tác động tích cực đối với việc vô hiệu hoá các quan niệm sai lầm: quan sát chứng tỏ học sinh đặt câu hỏi về mô hình của họ dựa trên các dữ liệu từ mô phỏng. Nó cũng có những hạn chế: học sinh có thể chấp nhận một mô hình sai nhằm đạt được giá trị lý thuyết tương thích với dữ liệu thu được từ mô phỏng.

Môi trường và hợp đồng dạy học

Trong các buổi thực nghiệm, mô phỏng có thể được coi như một môi trường ở hai cấp độ:

1. Một môi trường của hành động

Các tần suất và những biến động của chúng có thể được xem rằng học sinh đã nhận các phản hồi trong khi xây dựng và thực hiện các mô phỏng trên máy tính, những điều này đã củng cố sự hiểu biết của họ về mối liên hệ giữa tần suất và xác suất. Một cách ngầm ẩn, mô phỏng đã cho phép học sinh xây dựng các mô hình « trong hành động » để loại bỏ các sai lầm. Mô phỏng cũng đóng vai trò như một môi trường của hành động trong việc tính toán các xác suất lý thuyết khi học sinh kiểm tra kết quả tính toán dựa trên tần suất thực nghiệm.

2. Một môi trường của sự phản ánh

Chúng tôi thấy rằng trong mỗi buổi thực nghiệm, nhiều mô hình của các tình huống ngẫu nhiên được xem xét, nhưng chúng không được đem ra thảo luận trong lớp học. Hơn nữa, độ biến động không được nghiên cứu một cách chính xác như đề cập đến những câu hỏi ban đầu: giáo viên khuyến khích chiều hướng thực dụng của mô phỏng, nhấn mạnh cỡ mẫu thích hợp để thúc đẩy việc sử dụng R thay vì thảo luận cỡ mẫu thích hợp dựa trên các câu hỏi thống kê. Điều này chứng tỏ rằng, mô phỏng đã giúp tạo ra môi trường của sự phản ánh mà nó không được khai thác: sự tồn tại của nhiều mô hình nên là cơ hội để thảo luận về sự tương đương của chúng.

Những câu hỏi nêu ra trong ba buổi thực nghiệm là thách thức với học sinh và thúc đẩy xây dựng các mô phỏng. Tuy nhiên, trong các buổi này, ngay sau khi tiến hành mô phỏng và tính các xác suất lý thuyết, giáo viên và học sinh đã không quay lại các câu hỏi gốc. Vì vậy, các câu hỏi ban đầu này đã tạo ra các động cơ thúc đẩy học sinh tính các giá trị xác suất thay vì các khảo sát thống kê thực sự. Chúng tôi giải thích điều này như là một thú nhận của hợp đồng dạy học hướng tới tính thực dụng của mô phỏng dùng để xấp xỉ các giá trị lý thuyết hơn là dùng để khảo sát các vấn đề trong câu hỏi, dưới ảnh hưởng của hợp đồng dạy học « truyền thống » khuyến khích các tính toán xác suất lý thuyết.

Các phân tích này cho phép chúng tôi xây dựng lại các buổi thực nghiệm nhằm khai thác tốt hơn các tiềm năng của chúng bằng cách nhấn mạnh hơn các vấn đề về xác suất và chú trọng hơn mô phỏng như là môi trường của sự phản ánh dựa trên mô hình của các tình huống xác suất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, n°3, p. 281—308.
2. Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (p. 241–266). New York : Springer.
3. Bui, A.K. (2015). *Apports de la simulation et de l'utilisation de logiciels pour l'enseignement /apprentissage des probabilités et des statistiques en première année d'Université au Vietnam dans un cursus non mathématique*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.
4. Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer.

5. Cerulli, M., Pedemonte, B., & Robotti, E. (2006). An integrated perspective to approach technology in mathematics education, In *Proceedings of CERME 4*, Sant Feliu de Guíxols, Spain (pp. 1389-1399).
6. Engel, A. (1990). *Les certitudes du hasard* (Certainty of chance). Aléas Editeur, Lyon.
7. Garfield, J., Chance, B. L., & Snell, J. L. (2000). Technology in college statistics courses. In Holton, D. et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 357–370). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
8. Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372–396.
9. Vu Nhu, T.H. (2005). *La notion de probabilité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques au lycée*, Mémoire de Thac Si de l'Université Pédagogique de Ho Chi Minh Ville.

VẬN DỤNG LÝ THUYẾT TÌNH HUỐNG TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM DIỆN TÍCH Ở TIỂU HỌC

Bùi Quang Thịnh*, Ngô Thị Mỹ Phượng**

Tóm tắt

Với mục đích phát huy tính tích cực của học sinh và đổi mới phương pháp dạy học theo nhu cầu của giáo dục hiện nay, bài viết này mong muốn vận dụng Lý thuyết tình huống trong dạy học Toán ở Tiểu học thông qua việc thiết kế những tình huống cụ thể khi giảng dạy khái niệm diện tích.

Abstract

For the purposes of promoting the students' positivity and changing the teaching methods to response the pedagogical needs today, this paper's authors want to apply the theory of didactical situations in teaching mathematics by designing the specific situations when teaching the concept of area for primary students.

1. Mở đầu

Đổi mới phương pháp dạy học là một nhiệm vụ quan trọng. “Phải đổi mới phương pháp giáo dục đào tạo, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện thành nếp tư duy sáng tạo của học sinh. Từng bước áp dụng các phương pháp tiên tiến và phương tiện hiện đại vào quá trình dạy học.” (Nghị quyết hội nghị II, Ban chấp hành trung ương Đảng Cộng sản Việt Nam khóa VIII, 1997). Để đáp ứng yêu cầu đổi mới phương pháp dạy học, trên cơ sở phát huy các mặt tích cực của phương pháp dạy học truyền thống, người giáo viên cần tìm tòi vận dụng các phương pháp dạy học mới theo hướng phát huy tính tích cực, độc lập, tăng cường các hoạt động tìm tòi – phát hiện của học sinh. Một trong những xu hướng hiện nay đang được các nhà giáo dục quan tâm là vận dụng Lý thuyết tình huống theo lối kiến tạo vào dạy học, đặc biệt là trong dạy học các môn Toán và khoa học.

Lý thuyết tình huống là một trong những lý thuyết dạy học hiện đại được nghiên cứu một cách có hệ thống ở Cộng hòa Pháp, đứng đầu là G. Brousseau, từ những năm 1986. Theo lý thuyết này, các thành tố cơ bản của quá trình dạy học được bổ sung thành tố thứ tư là môi trường, liên hệ mật thiết với ba thành tố người học, người dạy, tri thức. Bốn thành tố này sẽ tạo thành một tứ diện sự phạm và gắn kết chặt chẽ với nhau trong quá trình dạy học.

Lý thuyết tình huống được du nhập vào Việt Nam thông qua những hội nghị chuyên đề mang tính quốc tế và được các chuyên gia về didactic toán Việt Nam tiếp tục nghiên cứu, phát triển. Ngoài việc giới thiệu cơ sở khoa học của Lý thuyết tình huống một cách gần gũi hơn, các nhà khoa học Việt Nam đã đưa ra các kết luận sự phạm có tính chất định hướng và chỉ dẫn hoạt động cho giáo viên. Tuy nhiên, do vẫn còn tồn tại một số khó khăn nhất là trong nghiên cứu khoa học luận nên những ví dụ minh họa Lý thuyết tình huống còn hiếm hoi, đặc biệt là đối với môn Toán ở Tiểu học.

* ThS, Đại học Tiền Giang

** ThS, Cao đẳng Y tế Tiền Giang

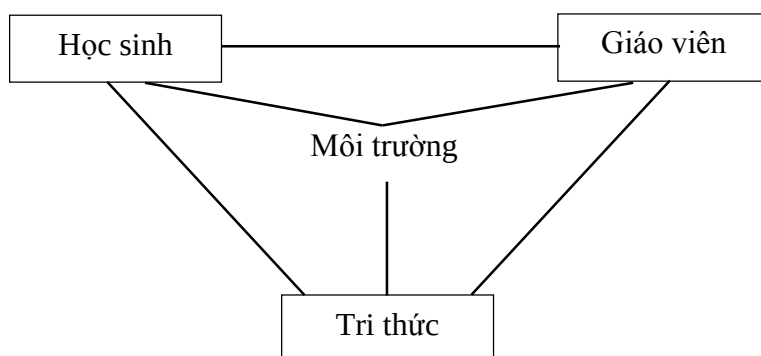
Với mục đích phát huy tính tích cực của học sinh và đổi mới phương pháp dạy học theo nhu cầu của giáo dục hiện nay, chúng tôi mong muốn vận dụng Lý thuyết tình huống trong dạy học Toán ở Tiểu học thông qua việc thiết kế những tình huống cụ thể khi giảng dạy nội dung diện tích.

2. Lý thuyết tình huống

Trước khi đi vào tình huống cụ thể được thiết kế khi giảng dạy nội dung diện tích, chúng ta cần điểu qua một số khái niệm cơ bản, sơ lược của Lý thuyết tình huống.

2.1. Hệ thống dạy học tối thiểu và một số giả thuyết học tập

Theo lý thuyết tình huống, hệ thống dạy học, trong đó diễn ra các hoạt động dạy và học, tối thiểu gồm có các thành tố cơ bản của quá trình dạy học là giáo viên, học sinh, tri thức và được bổ sung thêm thành tố thứ tư là môi trường. Giáo viên, học sinh, môi trường sẽ tương tác với tri thức trong hệ thống dạy học, cụ thể theo sơ đồ sau:



Hình 1. Sự tương tác giữa giáo viên, học sinh, môi trường với tri thức

Dựa vào các khái niệm của hệ thống dạy học tối thiểu, các tác giả của Lý thuyết tình huống phát biểu một số giả thuyết về học tập:

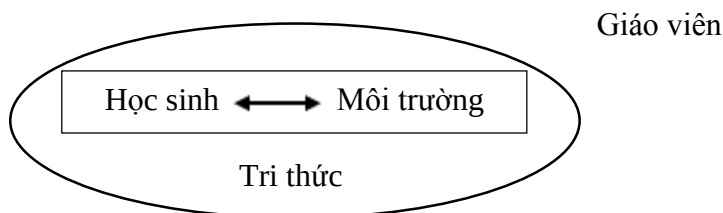
- Giả thuyết thứ nhất (giả thuyết về tâm lý): Chủ thể học tập bằng cách thích nghi (đồng hóa – điều ứng) với một môi trường gây ra những mâu thuẫn, những khó khăn và những sự mất cân bằng.

- Giả thuyết thứ hai (giả thuyết về dạy học): Một môi trường không có chủ ý dạy học, tức là môi trường không được cố ý tổ chức để dạy một tri thức, không đủ để tạo ra cho chủ thể mọi kiến thức xã hội mong muốn chủ thể đó lĩnh hội. Giả thuyết này không công nhận một quá trình học tập hoàn toàn dựa trên hoạt động tự phát của chủ thể trong một môi trường tùy tiện, không được thiết kế với dụng ý sư phạm.

- Giả thuyết thứ ba (giả thuyết về xây dựng kiến thức): Kiến thức mới được xây dựng trên cơ sở hoặc đôi khi phản bác lại những kiến thức đã có trước đó, còn mang tính nguyên sơ, địa phương và phiến diện, bộ phận. Những kiến thức có sẵn có được đem sử dụng hay không tùy thuộc vào tình huống chủ thể gặp phải.

2.2. Tình huống học tập lý tưởng

Tình huống học tập lý tưởng là tình huống mà giáo viên đề xuất sao cho học sinh kiến tạo hoặc điều chỉnh những kiến thức của họ để đáp ứng những nhu cầu của môi trường, được bản thân tình huống cuốn hút vào hoạt động chứ không phải do ý thích của người dạy.



Hình 2. Tình huống học tập lý tưởng

Việc khẳng định một tình huống học tập có lý tưởng về nguyên tắc đòi hỏi phải qua thực nghiệm. Tuy nhiên, trong thực tế, đôi khi, người ta chấp nhận chỉ sử dụng gần đúng khái niệm này. Một câu hỏi được đặt ra là “Trong những điều kiện nào một tình huống được cảm nhận là một tình huống học tập lý tưởng hay những tình huống nào có nhiều khả năng trở thành tình huống học tập lý tưởng?”. Với những ý tưởng đó, các nhà nghiên cứu Lý thuyết tình huống đã tìm kiếm và đưa ra được các điều kiện cần của một tình huống dạy học lý tưởng, cụ thể như sau:

- Điều kiện thứ nhất: Học sinh có thể có một cách trả lời, được gọi là quy trình cơ sở, dựa vào kiến thức đã có, tuy đó chỉ là cách trả lời chưa có gì đảm bảo phù hợp với mục tiêu hoạt động của học sinh.
- Điều kiện thứ hai: Quy trình cơ sở phải chưa đầy đủ, kém hiệu quả hoặc không hiệu quả.
- Điều kiện thứ ba: Môi trường phải có khả năng phản hồi để người học tự đánh giá kết quả hoạt động của mình, do đó có nhu cầu điều chỉnh kiến thức, quan điểm để đi đến kết quả mong muốn.
- Điều kiện thứ tư: Bản thân tình huống phải gọi ra, thúc đẩy, lôi cuốn hoạt động của học sinh chứ không phải học sinh làm theo ý thích của giáo viên.

Xuất phát từ các chức năng khác nhau của tri thức toán học, có ba kiểu tình huống học tập lý tưởng như sau:

- Tình huống hành động, tương ứng với chức năng phương tiện điều khiển hành động, cho phép thực hiện những quyết định trong quá trình hành động. Trong tình huống hành động, có sự tác động qua lại của học sinh và môi trường. Học sinh sẽ biểu thị những sự lựa chọn và quyết định của mình bằng những hành động lên môi trường mà không sử dụng một ngôn ngữ.
- Tình huống diễn đạt hay còn được gọi là tình huống giao lưu, tương ứng với chức năng phương tiện giao lưu, cho phép trao đổi thông tin trong tình huống. Trong tình huống giao lưu, học sinh có nhu cầu diễn đạt trong quá trình tác động qua lại với môi trường.
- Tình huống kiểm chứng, tương ứng với chức năng phương tiện kiểm chứng, cho phép xác nhận hay bác bỏ một kiến thức. Trong tình huống kiểm chứng, những kiến thức được kiểm chứng, xác nhận trong quá trình học sinh giao lưu với nhau và tác động qua lại với môi trường.

Có thể nói rằng “Lý thuyết tình huống không có gì khác hơn là một danh mục các điều kiện cần thỏa mãn để tạo những cơ hội cho người học đi tới lời giải trong những điều kiện tốt”.

2.4. *Biến dạy học và chương ngại*

Một yếu tố của tình huống mà sự thay đổi giá trị của nó có thể gây ra thay đổi quy trình giải quyết vấn đề của người học được gọi là *biến dạy học*. Tuy nhiên, không phải mọi yếu tố có thể thay đổi trong một tình huống dạy học đều là biến dạy học. Việc xác định những biến dạy học có thể giúp giáo viên điều khiển học sinh học tập trong tình huống. Học tập chính là sự chỉnh lý kiến thức do bản thân học sinh tự thực hiện và giáo viên chỉ là người gợi ra những chỉnh lý đó bằng cách lựa chọn những giá trị của các biến dạy học. Thông qua việc thay đổi các giá trị một cách hợp lý sẽ giúp học sinh tránh được những quan niệm sai lầm.

Khái niệm *chương ngại* trong khoa học do tác giả G. Bachelard đưa vào quyển “Sự hình thành trí tuệ khoa học”. Chúng ta cần phân biệt hai từ đồng nghĩa “khó khăn” và “chương ngại” trong từ điển. *Khó khăn* được hiểu theo nghĩa nếu vấn đề được giải quyết khi không đòi hỏi xem xét lại quan điểm của lý thuyết đang được xem xét hay những quan niệm hiện hành. *Chương ngại* được hiểu theo nghĩa nếu vấn đề chỉ được giải quyết khi đã cấu trúc lại những quan điểm hay thay đổi quan điểm lý thuyết.

3. Tình huống “Đội lót gạch tí hon”

Tình huống “Đội lót gạch tí hon” được thiết kế nhằm đến việc hình thành khái niệm diện tích của một hình, khái niệm bằng nhau về diện tích của các hình và khái niệm về sự so sánh diện tích (lớn hơn và bé hơn) của các hình.

Tình huống được xây dựng trên cơ sở ba hoạt động được tạo thành từ các pha với các chức năng khác nhau. Tình huống được thiết kế dành cho học sinh trình độ khối lớp Ba vào tuần thứ 28, học kỳ II.

Để tiến hành hoạt động, giáo viên sẽ chia lớp với khoảng 24-28 học sinh thành bốn nhóm học tập và mỗi nhóm khoảng 6-7 học sinh. Trong trường hợp lớp học ít hoặc đông, giáo viên có thể giảm hoặc tăng số nhóm sao cho hợp lý. Đối với ba hoạt động được đưa ra, học sinh đều làm việc theo nhóm.

3.1. *Hoạt động 1*

Mục đích của hoạt động là thiết lập tình huống để giới thiệu và hình thành cho học sinh khái niệm diện tích của một hình.

3.1.1. *Pha thứ nhất với mục đích tạo quy trình cơ sở cho học sinh giúp hình thành khái niệm diện tích của một hình*

Bốn nhóm học sinh đóng vai bốn đội lót gạch và giáo viên đóng vai người thuê đội lót gạch làm việc.

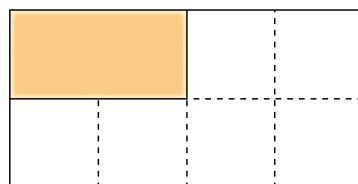
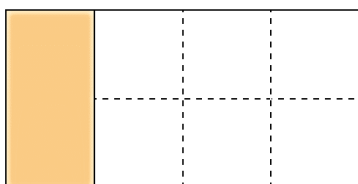
Giáo viên cần chuẩn bị cho mỗi nhóm học sinh một số đồ dùng học tập phục vụ cho hoạt động gồm:

- 1 mô hình cái sân hình chữ nhật với kích thước 2×4 có khả năng dán gạch nhiều lần;
- 4 mô hình gạch như nhau với kích thước 1×2 có khả năng dán gạch nhiều lần.

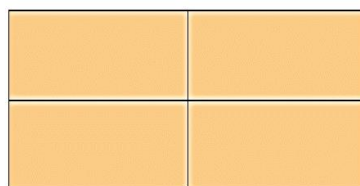
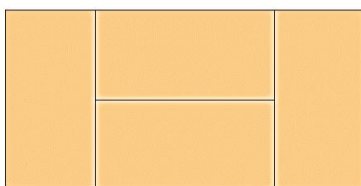
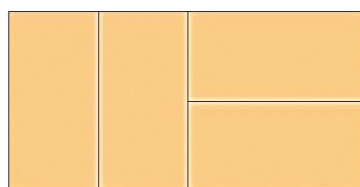
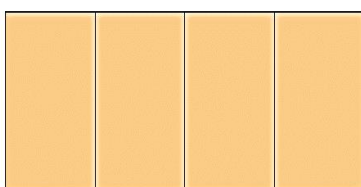
Học sinh, trong vai những người thợ lót gạch, sẽ nhận nhiệm vụ từ giáo viên, trong vai người thuê đội lót gạch, để lót gạch cái sân.

Học sinh phải thực hiện nhiệm vụ: *Lót gạch trên mô hình cái sân bằng những mô hình gạch.*

Kết quả mong đợi của giáo viên đối với pha thứ nhất là học sinh sẽ dán các mô hình gạch phủ kín mô hình cái sân. Học sinh có thể có hai kiểu dán gồm gạch ngang và gạch dọc:



Ngoài ra, có bốn trường hợp có thể được học sinh đưa ra, cụ thể như sau:



3.1.2. Pha thứ hai với mục đích tạo chương ngại giúp hình thành khái niệm diện tích của một hình

Bốn nhóm học sinh vẫn đóng vai bốn đội lót gạch và giáo viên vẫn đóng vai người thuê đội lót gạch làm việc.

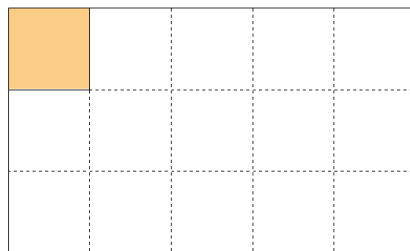
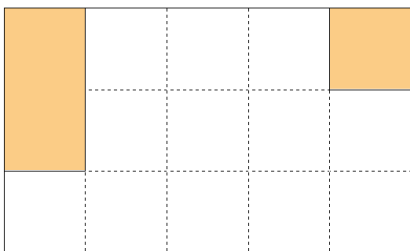
Giáo viên cần chuẩn bị cho mỗi nhóm học sinh một số đồ dùng học tập phục vụ cho hoạt động gồm:

- 1 mô hình cái sân hình chữ nhật với kích thước 3×5 có khả năng dán gạch nhiều lần;
- 8 mô hình gạch hình chữ nhật như nhau với kích thước 1×2 và 15 mô hình gạch hình vuông như nhau với kích thước 1×1 có khả năng dán gạch nhiều lần.

Học sinh, trong vai những người thợ lót gạch, sẽ nhận nhiệm vụ từ giáo viên, trong vai người thuê đội lót gạch, để lót gạch cái sân sao cho đẹp (cần lưu ý rằng, chuẩn đẹp của người thuê ở đây là chỉ có một loại gạch được lát).

Học sinh phải thực hiện nhiệm vụ: *Lót gạch trên mô hình cái sân thật đẹp bằng những mô hình gạch.*

Kết quả mong đợi của giáo viên đối với pha thứ hai là học sinh sẽ dán các mô hình gạch phủ kín mô hình cái sân. Học sinh có thể có hai kiểu dán gồm hai loại gạch và một loại gạch:



Trong pha thứ hai, này học sinh sẽ vấp phải một số chương ngại khi kích thước mô hình cái sân có thay đổi và có hai loại mô hình gạch được đưa ra. Các chương ngại này đòi hỏi học sinh phải tương tác với môi trường, trong đó có cả sự giao lưu, tranh luận giữa các thành viên trong một nhóm để có thể hoàn thành nhiệm vụ. Lưu ý rằng, trong tình huống này, chúng tôi đưa ra chuẩn đẹp của người thuê đội lót gạch để người thuê cũng chính là một môi trường tương tác với học sinh, trong vai người thợ lót gạch.

3.1.3. Pha thứ ba: Giáo viên tổng kết hai pha làm việc và hình thành khái niệm diện tích của một hình

Giáo viên đưa ra những nhận xét về kết quả làm việc của các nhóm qua hai pha làm việc và hình thành khái niệm diện tích một hình cho học sinh thông qua hệ thống các câu hỏi dẫn dắt.

3.2. Hoạt động 2

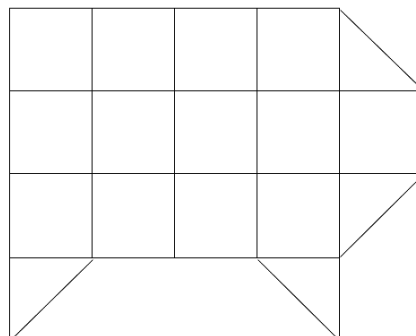
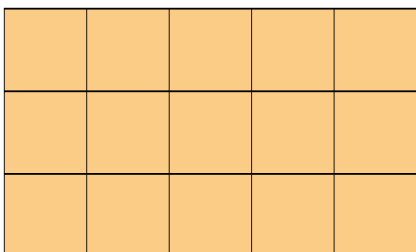
Mục đích của hoạt động là thiết lập tình huống để giới thiệu và hình thành cho học sinh khái niệm bằng nhau về diện tích của các hình.

3.2.1. Pha thứ nhất với mục đích hình thành khái niệm bằng nhau về diện tích của một hình

Bốn nhóm học sinh vẫn đóng vai bốn đội lót gạch và giáo viên vẫn đóng vai người thuê đội lót gạch làm việc.

Giáo viên cần chuẩn bị cho mỗi nhóm học sinh một số đồ dùng học tập phục vụ cho hoạt động gồm:

- 1 mô hình cái sân hình chữ nhật với kích thước 3×5 và một mô hình cái sân với hình dạng nhất định theo dụng ý của giáo viên có khả năng dán gạch nhiều lần;



- 15 mô hình gạch hình vuông như nhau với kích thước 1×1 có khả năng dán gạch nhiều lần và đã được dán trên mô hình cái sân hình chữ nhật ;

- Một cái kéo.

Học sinh, trong vai những người thợ lát gạch, sẽ nhận nhiệm vụ từ giáo viên, trong vai người thuê đội lát gạch, để gỡ gạch đã lát trên cái sân của người thuê và lát gạch cái sân của người hàng xóm.

Học sinh phải thực hiện hai nhiệm vụ:

- Gỡ mô hình gạch đã lát trên mô hình cái sân hình chữ nhật;
- Lát gạch trên mô hình cái sân có hình dạng nhất định bằng những mô hình gạch vừa gỡ.

Kết quả mong đợi của giáo viên đối với pha thứ nhất là học sinh sẽ dán các mô hình gạch, lấy từ cái sân của người thuê, phủ kín mô hình cái sân của người hàng xóm.

Trong pha thứ nhất này, học sinh sẽ vấp phải một số chướng ngại khi kích thước, hình dạng của mô hình hai cái sân hoàn toàn khác nhau và mô hình gạch sẵn có không thể dán kín mô hình cái sân của người hàng xóm. Các chướng ngại này đòi hỏi học sinh phải tương tác với môi trường để có thể hoàn thành nhiệm vụ. Ngoài sự giao lưu, tranh luận giữa các thành viên trong một nhóm, trong tình huống này, người giáo viên cũng là một môi trường tương tác khi đóng vai người thuê đội lát gạch. Khi các người thợ không thể lát kín cái sân của người hàng xóm với gạch sẵn có, các người thợ sẽ trao đổi với người thuê về ý tưởng cắt gạch do trong dụng cụ của người thợ có máy cắt tương ứng với cái kéo.

3.2.2. Pha thứ hai: Giáo viên tổng kết pha vừa làm việc và hình thành khái niệm bằng nhau về diện tích của các hình

Giáo viên đưa ra những nhận xét về kết quả làm việc của các nhóm qua pha vừa làm việc và hình thành khái niệm bằng nhau về diện tích các hình cho học sinh thông qua hệ thống các câu hỏi dẫn dắt:

- Nhận xét gì về hình dạng của hai cái sân?
- Nhận xét về lượng gạch được lát ở hai cái sân?

3.3. Hoạt động 3

Mục đích của hoạt động là thiết lập tình huống để giới thiệu và hình thành cho học sinh khái niệm về sự so sánh diện tích (lớn hơn và bé hơn) của các hình.

3.3.1. Pha thứ nhất với mục đích hình thành khái niệm về sự so sánh diện tích (lớn hơn và bé hơn) của các hình

Bốn nhóm học sinh vẫn đóng vai bốn đội lát gạch và giáo viên vẫn đóng vai người thuê đội lát gạch làm việc.

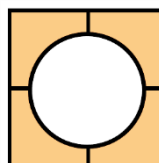
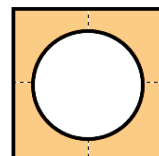
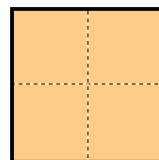
Giáo viên cần chuẩn bị cho mỗi nhóm học sinh một số đồ dùng học tập phục vụ cho hoạt động gồm:

- 1 mô hình cái sân hình chữ nhật với kích thước 3×5 có khả năng dán gạch nhiều lần.
- 1 mô hình mặt đế của hòn non bộ hình tròn có đường kính 1,5 nên có thể đặt bên trong một hình vuông kích thước 2×2 .

– 11 mô hình gạch hình vuông như nhau với kích thước 1×1 có khả năng dán gạch nhiều lần.

– 4 mô hình gạch như nhau có khả năng dán gạch nhiều lần được tạo ra bằng cách sau:

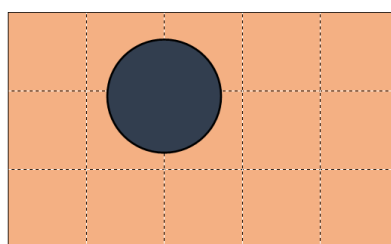
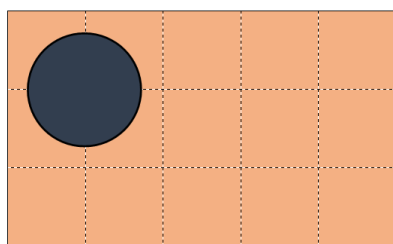
- Lấy một mô hình gạch hình vuông với kích thước 2×2 ;
- Cắt bỏ hình tròn, kích thước bằng với mô hình mặt đế của hòn non bộ, ở vị trí chính giữa mô hình gạch;
- Chia mô hình gạch vừa tạo thành thành bốn phần bằng nhau như hình vẽ bên.



Học sinh, trong vai những người thợ lát gạch, sẽ nhận nhiệm vụ từ giáo viên, trong vai người thuê đội lát gạch, để lát gạch lại cái sân và có xây thêm một hòn non bộ.

Học sinh phải thực hiện nhiệm vụ: *Lát gạch trên mô hình cái sân bằng những mô hình gạch và có xây thêm một hòn non bộ.*

Kết quả mong đợi của giáo viên đối với pha thứ nhất là học sinh sẽ dán các mô hình gạch và mô hình mặt đế của hòn non bộ phủ kín mô hình cái sân (hòn non bộ có thể được đặt ở nhiều vị trí khác nhau). Mặc dù có học sinh có thể đưa ra tám trường hợp khác nhau đối với vị trí của mô hình mặt đế của hòn non bộ, nhưng do tính đối xứng, chúng tôi chỉ quan tâm hai dạng như bên dưới.



3.2.2. Pha thứ hai: Giáo viên tổng kết pha vừa làm việc và hình thành khái niệm về sự so sánh diện tích (lớn hơn và bé hơn) của các hình

Giáo viên đưa ra những nhận xét về kết quả làm việc của các nhóm qua pha vừa làm việc và hình thành khái niệm về sự so sánh diện tích (lớn hơn và bé hơn) của các hình cho học sinh thông qua hệ thống các câu hỏi dẫn dắt.

4. Phân tích tình huống “Đội lát gạch tí hon”

Tình huống “Đội lát gạch tí hon” thỏa mãn gần như đầy đủ các điều kiện cần của một tình huống dạy học lý tưởng, cụ thể như sau:

Hoạt động 1:

- Trong pha thứ hai, học sinh có một cách lát gạch đã được hình thành ở pha thứ nhất và cách lát gạch này chưa đảm bảo phù hợp với yêu cầu của người thuê.
- Cách lát gạch được hình thành ở pha thứ nhất sẽ tỏ ra kém hiệu quả do kích thước của cái sân đã được thay đổi và có hai loại gạch được đưa ra.
- Môi trường trong pha thứ hai chính là sự giao lưu, tranh luận giữa các thành viên trong nhóm để có thể hoàn thành nhiệm vụ và cần lưu ý chính giáo viên, trong vai trò người thuê, cũng là một môi trường để học sinh có thể tự đánh giá cách lát gạch của nhóm đã phù hợp hay chưa.
- Tình huống đóng vai lời cuốn, thúc đẩy học sinh tham gia vào hoạt động.

Hoạt động 2:

- Học sinh có một cách lát gạch đã được hình thành ở hoạt động 1 và cách lát gạch này chưa đảm bảo phù hợp với yêu cầu của người thuê.
- Cách lát gạch được hình thành ở hoạt động 1 sẽ tỏ ra kém hiệu quả do hình dạng của cái sân đã được thay đổi.
- Môi trường chính là sự giao lưu, tranh luận giữa các thành viên trong nhóm để có thể hoàn thành nhiệm vụ và chính giáo viên, trong vai trò người thuê, cũng là một môi trường để học sinh có thể tự đánh giá tính phù hợp của cách lát gạch.
- Tình huống đóng vai lời cuốn, thúc đẩy học sinh tham gia vào hoạt động.

Hoạt động 3:

- Học sinh có một cách lát gạch đã được hình thành ở hoạt động 1 và cách lát gạch này chưa đảm bảo phù hợp với yêu cầu của người thuê.
- Cách lát gạch được hình thành ở hoạt động 1 sẽ tỏ ra kém hiệu quả do có thêm yếu tố hòn non bộ.
- Môi trường chính là sự giao lưu, tranh luận giữa các thành viên trong nhóm để có thể hoàn thành nhiệm vụ và chính giáo viên, trong vai trò người thuê, cũng là một môi trường để học sinh có thể tự đánh giá tính phù hợp của cách lát gạch.
- Tình huống đóng vai lời cuốn, thúc đẩy học sinh tham gia vào hoạt động.

5. Kết luận

Thông qua những tình huống cụ thể khi giảng dạy nội dung diện tích ở Tiểu học, bài viết đã vận dụng Lý thuyết tình huống ở một mức độ nhất định vào thực tiễn giảng dạy, góp một phần nhỏ trong việc cải tiến và đổi mới các phương pháp giảng dạy sao cho ngày càng phát huy tính tích cực và tự giác của học sinh trong học tập.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Annie Bessot, Claude Comiti, Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến, *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán, Sách song ngữ Việt - Pháp*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2009.

2. Nguyễn Bá Kim, *Phương pháp dạy học môn Toán*, Tái bản lần thứ 7, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2015.
3. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Toán 3*, Sách giáo khoa, Tái bản lần thứ tư, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.
4. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Toán 3*, Sách giáo viên, Tái bản lần thứ tư, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.
5. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Hướng dẫn học Toán 3 - Tập 2B*, Sách thử nghiệm, Dự án Mô hình trường học mới Việt Nam, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

GIẢI BÀI TOÁN HERON VỀ TIA SÁNG VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA PHẦN MỀM ĐỘNG GEOGEBRA: CÁC KẾT QUẢ TỪ THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

Lê Viết Minh Triết*, Nguyễn Phú Lộc**

Tóm tắt

Bài toán Heron về tia sáng (hay bài toán đường đi ngắn nhất của tia sáng) là một trong những bài toán tối ưu nổi tiếng, và được giải quyết bởi Heron. Các nghiên cứu của Nguyễn Chí Thành (2007), Nguyễn.D.N (2012), Hoa Anh Tuong (2013) cho thấy, học sinh được giáo viên hướng vào việc sử dụng chiến lược đối xứng trục để xác định vị trí của điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Bài viết này trình bày các thực nghiệm trên đối tượng học sinh chưa từng biết bài toán này trước đây với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra. Kết quả từ các thực nghiệm sư phạm cho thấy, với sự trợ giúp của GeoGebra, học sinh không sử dụng chiến lược phép đối xứng trục. Thay vào đó, các em đã phát hiện hai chiến lược khác để dựng điểm thỏa mãn bài toán.

Từ khóa: GeoGebra, mô hình SPWG, phần mềm hình học động, bài toán Heron về tia sáng.

Abstract

The Heron's problem of the light ray (or the Heron's shortest distance problem) is one of the first non-trivial optimized problems that was solved by Heron of Alexandria. The study of Nguyễn Chí Thành (2007), Nguyễn.D.N (2012) and Hoa Anh Tuong (2013) have shown that the teachers had directed the students to apply the properties of reflection to solve it. This paper illustrates practical experiment where school students who have never solved such problem, with the support of the GeoGebra. The results showed that with the assistance of GeoGebra, students did not use the symmetric strategy. Instead, they discovered two other strategies to construct the coordinates that satisfy the requirements of the problem.

Keyword: GeoGebra, SPWG model, dynamic geometry software, Heron's the problem of light.

1. Đặt vấn đề

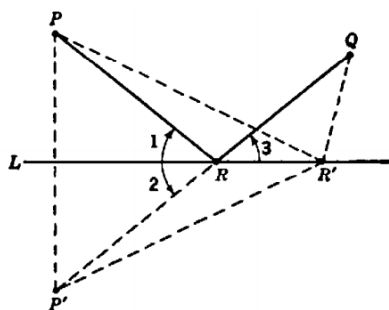
Bài toán đường đi của tia sáng là một trong những bài toán tối ưu nổi tiếng được giải quyết bởi Heron (Alexandria, 10-75 C.E). Bài toán Heron tia sáng hay bài toán đường đi ngắn nhất được phát biểu như sau:

“Cho một đường thẳng L và hai điểm P và Q nằm về cùng phía so với L . Điểm R nằm ở vị trí nào trên L để tổng $PR + RQ$ là đường ngắn nhất từ P đến L tới Q ?” (Courant & Robbins, 1996). (1)

Để giải quyết vấn đề này, ta lấy P' là điểm đối xứng của P qua đường thẳng L sao cho L là đường trung trực của PP' . Đường thẳng $P'Q$ cắt L tại điểm R và R là vị trí cần tìm. Việc chứng minh $PR + RQ > PR' + R'Q$ luôn đúng với mọi điểm R' (khác R) thuộc L là đơn giản bằng cách sử dụng bất đẳng thức tam giác. Cụ thể, vì $PR = P'R$ và $PR' = P'R$ nên $PR + RQ > P'Q$, do đó, $PR' + R'Q > PR + RQ$.

* NCS, Trường phổ thông Thái Bình Dương, Cần Thơ

** PGS.TS, Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ



Hình 1: Bài toán Heron

Tại Việt Nam, bài toán này được đề cập ở sách giáo khoa hình học 11. Qua các nghiên cứu của Nguyễn Chí Thành (2007), Danh Nam Nguyen (2012), Hoa Anh Tuong (2013), chúng tôi thấy rằng các tác giả hướng học sinh sử dụng chiến lược đối xứng trục để giải quyết bài toán và chiến lược này không phải do học sinh tự phát hiện. Một câu hỏi được đặt ra: *Đối với học sinh chưa từng tiếp xúc với bài toán trên, với sự hỗ trợ của phần mềm Geogebra, các em sẽ giải quyết bài toán theo chiến lược nào?* Để trả lời cho câu hỏi đặt ra, chúng tôi tiến hành các thực nghiệm sư phạm trên đối tượng là học sinh trung học phổ thông. Trong các tình huống thực nghiệm, chúng tôi phát biểu bài toán (1) lại thành bài toán (2) với nội dung như sau:

“Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;2)$ và $B(8;6)$. Xác định vị trí của điểm C thuộc trục hoành Ox sao cho tổng khoảng cách $AC+CB$ là ngắn nhất” (2)

2. GeoGebra là gì?

Theo Hohenwater, M. và Preiner, J. (2007), GeoGebra là phần mềm toán học động được thiết kế dành cho việc giảng dạy và học tập toán từ bậc tiểu học đến cả bậc đại học. Bằng sự tích hợp hệ thống hình học động với các tính năng cơ bản của hệ thống đại số máy tính và cả bảng tính, GeoGebra như là cầu nối giữa các nhánh của Toán học như Hình học, Đại số và cả Giải tích.

Trong GeoGebra, các sự biểu diễn khác nhau của cùng một đối tượng toán học được liên kết động, cho phép người sử dụng nghiên cứu sự kết nối qua lại giữa chúng. Từ đó, làm cho học sinh dễ dàng hiểu được mối quan hệ giữa các biểu diễn khác nhau đó. Bất cứ khi nào một trong những sự biểu diễn của một đối tượng toán học bị thay đổi, tất cả những sự biểu diễn tương ứng của đối tượng đó sẽ tự động thay đổi theo để duy trì các mối quan hệ giữa chúng. Các đối tượng mới có thể được tạo ra bằng cách sử dụng công cụ hình học động hoặc khung nhập lệnh đầu vào từ bàn phím đại số. Bằng việc cung cấp khung nhập lệnh đầu vào từ bàn phím, một loạt các lệnh được định nghĩa trước có thể được sử dụng trong GeoGebra và những chủ đề toán học khác không chỉ trong phạm vi Hình học (ví dụ như Đại số, Giải tích, Thống kê).

Hơn nữa, cả hai sự biểu diễn đó có thể bị ảnh hưởng trực tiếp bởi người sử dụng. Nói cách khác, *các sự biểu diễn hình học của một đối tượng toán học có thể được thay đổi bằng cách di chuyển nó bởi chuột máy tính. Khi đó, sự biểu diễn đại số của nó tự động thay đổi theo. Mặt khác, sự biểu diễn đại số cũng có thể được thay đổi bằng cách nhập số liệu mới thông qua bàn phím máy tính, lúc đó, GeoGebra tự động điều chỉnh sự biểu diễn hình học tương ứng.*

Một mặt, GeoGebra có thể được sử dụng để biểu diễn trực quan các khái niệm toán học. Mặt khác, *GeoGebra còn là môi trường tương tác dành cho người học có thể trải nghiệm, khám phá.*

Phần mềm toán học động GeoGebra được nhiều nhà giáo dục toán học quan tâm và nó còn được nhắc đến với thuật ngữ gọn hơn là “*phần mềm động GeoGebra*” (xem Mehanovic, S. (2011), Akkaya, A., Tatar, E., & Kağızmanlı, T. B. (2011).

3. Mô hình giải toán với GeoGebra

Với quan điểm “nhiệm vụ giải quyết vấn đề là một hoạt động” và các đặc trưng của phần mềm GeoGebra, Nguyễn Phú Lộc (2014) đã phát triển mô hình SPWG (Giải toán với GeoGebra) bao gồm 5 bước chính sau đây (xem Loc, 2014).

Bước 1: Sử dụng GeoGebra như một công cụ để biểu diễn bài toán: dựng hình, vẽ đồ thị hàm số, lập bảng dữ liệu, ...

Bước 2: Thực nghiệm trong môi trường GeoGebra bằng cách sử dụng tính chất động, những công cụ hỗ trợ tính toán, bảng tính, ...

Bước 3: Quan sát dữ liệu: những hình động, số liệu động, bất biến ... tìm ra những mối liên hệ giữa các dữ liệu được quan sát

Bước 4: Dựa vào những mối liên hệ được tìm thấy ở bước 3, người học có thể hình thành những giả thuyết.

Bước 5: Với những giả thuyết ở bước 4, người học kiểm tra giả thuyết. Giả thuyết này hoặc được chấp nhận hoặc bị bác bỏ thông qua việc sử dụng GeoGebra để đưa ra phản ví dụ hoặc chứng minh.

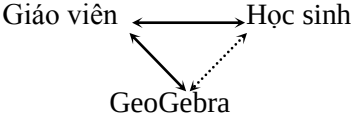
Bước 6: Kiểm tra lời giải, khái quát hóa, mở rộng bài toán.

4. Thiết kế nghiên cứu

Để trả lời cho câu hỏi nghiên cứu được đặt ra ở phần 1, chúng tôi tiến hành các thực nghiệm sư phạm trên đối tượng là học sinh được mô tả chi tiết ở bảng 1.

Bảng 1. Bảng mô tả các thực nghiệm sư phạm

	Thực nghiệm thứ 1	Thực nghiệm thứ 2
Đối tượng thực nghiệm	11 học sinh lớp 12, trường phổ thông Thái Bình Dương, Cần Thơ.	18 học sinh lớp 11, trường phổ thông Thái Bình Dương, Cần Thơ.
Thời gian thực nghiệm	Học kì 1, năm học 2013-2014.	Học kì 1, năm học 2014-2015.
Nhiệm vụ của học sinh	Giải bài toán “ <i>Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2,2)$ và $B(8, 6)$. Xác định tọa độ điểm C trên Ox sao cho tổng độ dài</i>	Giải bài toán “ <i>Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2,2)$ và $B(8, 6)$. Xác định tọa độ điểm C trên Ox sao</i>

	$C + CB$ là nhỏ nhất” với sự trợ giúp của GeoGebra.	cho tổng độ dài $AC + CB$ là nhỏ nhất” với sự trợ giúp của GeoGebra.
Phương pháp dạy học	Dạy học khám phá có hướng dẫn.	Dạy học khám phá (khám phá tự do).
Cách thức tương tác giữa học sinh với GeoGebra	 Lớp học được tổ chức theo kiểu truyền thống với 01 máy chiếu, 01 laptop. Giáo viên trực tiếp thao tác GeoGebra theo yêu cầu của học sinh.	Học sinh $\longleftrightarrow$ GeoGebra Học sinh làm việc theo nhóm đôi và trực tiếp thao tác GeoGebra. Giáo viên hỗ trợ kĩ thuật thao tác khi cần thiết.

5. Tiến trình và kết quả thực nghiệm

Tiến trình giải quyết các tình huống thực nghiệm của học sinh được chúng tôi phân tích dựa trên mô hình SPWG và được trình bày chi tiết ở mục 5.1 và 5.2.

5.1 Tiến trình giải quyết vấn đề và kết quả của thực nghiệm thứ 1

Trong tình huống thực nghiệm này, học sinh không tương tác trực tiếp với GeoGebra. Thay vào đó, giáo viên sẽ trực tiếp thao tác với GeoGebra theo các yêu cầu mà học sinh đưa ra. Tiến trình giải quyết vấn đề trong tình huống này được chia thành 6 pha như sau:

Pha 1 (Biểu diễn bài toán): Trong pha này, giáo viên sử dụng GeoGebra biểu diễn bài toán và học sinh quan sát các dữ liệu hình và số.

Pha 2 (Thực nghiệm với GeoGebra): Trong pha này, giáo viên thực hiện các thao tác với GeoGebra theo yêu cầu của học sinh.

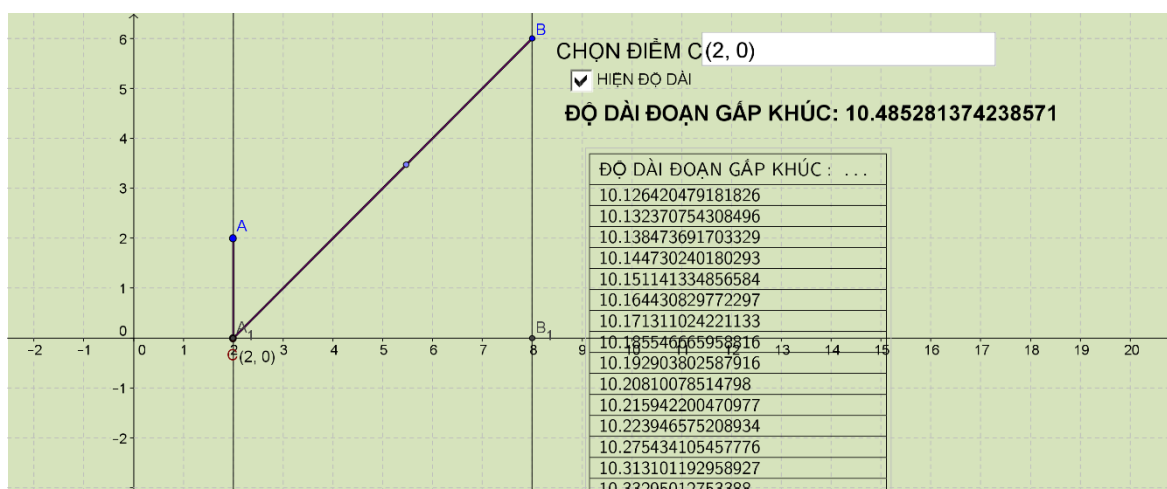
Pha 3 (Quan sát dữ liệu): Giáo viên tiếp tục thao tác GeoGebra theo yêu cầu của học sinh. Học sinh khám phá các mối liên hệ giữa các hình ảnh, số liệu có được từ màn hình.

Pha 4 (Hình thành và kiểm tra giả thuyết với sự hỗ trợ của GeoGebra): Ngay sau khi biểu diễn bài toán trong mặt phẳng tọa độ Oxy , học sinh đã đưa ra hai giả thuyết mang tính trực giác như sau về vị trí của điểm C .

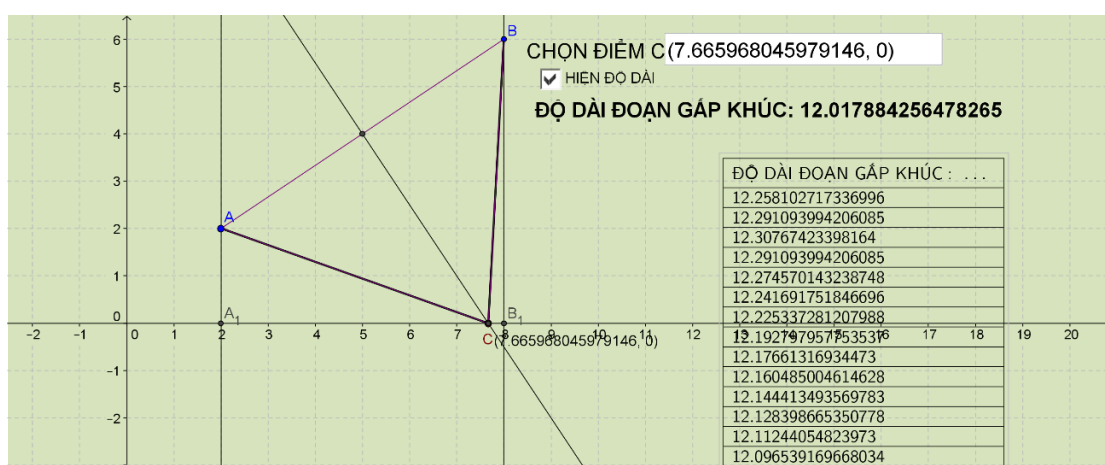
Giả thuyết 1: Dựng A_1 và B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox . Khi $C \equiv A_1$ hoặc $C \equiv B_1$, thì $(AC + CB)$ nhỏ nhất (xem hình 2).

Giả thuyết 2: Dựng d là đường trung trực của AB , nếu C ở vị trí tại giao điểm của d và Ox , thì $(AC + CB)$ nhỏ nhất (xem hình 3).

Tuy nhiên, hai giả thuyết có tính trực giác này nhanh chóng bị bác bỏ khi giáo viên dịch chuyển điểm C trên Ox thông qua thao tác chuột máy tính (xem hình 4). Kết quả từ bảng tính ở hình 4 cho thấy giả thuyết 1 và 2 đã được loại bỏ.

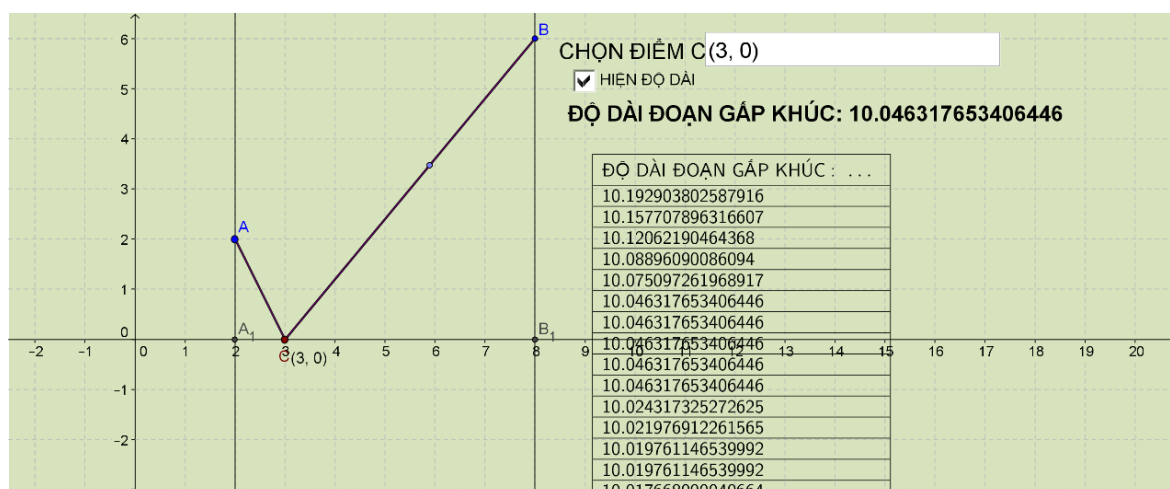


Hình 2: Hình minh họa cho giả thuyết 1: trường hợp $C \equiv A_1$

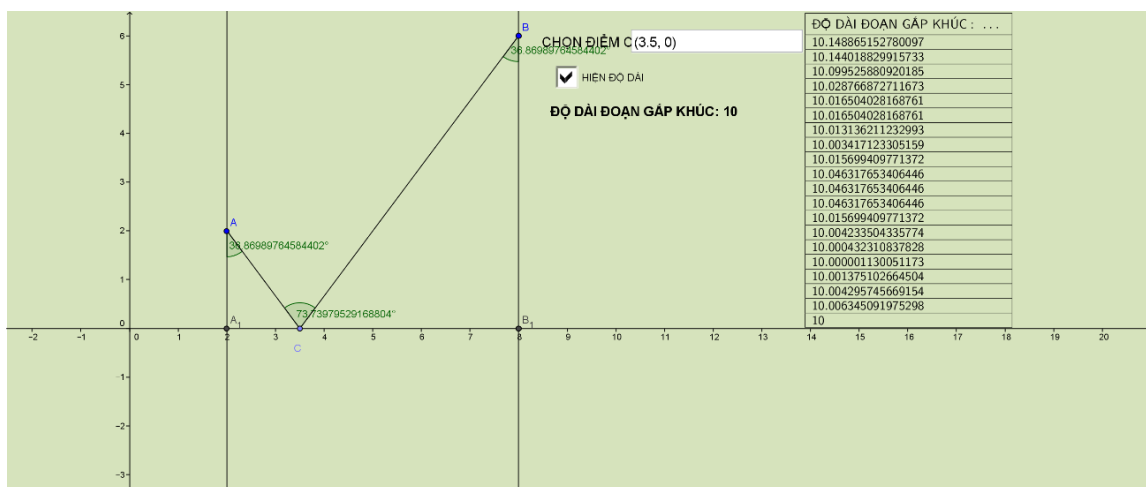


Hình 3: Hình minh họa cho giả thuyết 2: trường hợp d là đường trung trực

Bởi vì các phỏng đoán đưa ra là chưa đúng nên học sinh tiếp tục yêu cầu giáo viên dịch chuyển điểm C trên Ox, và quan sát các giá trị thay đổi tương ứng của tổng $(AC + CB)$.

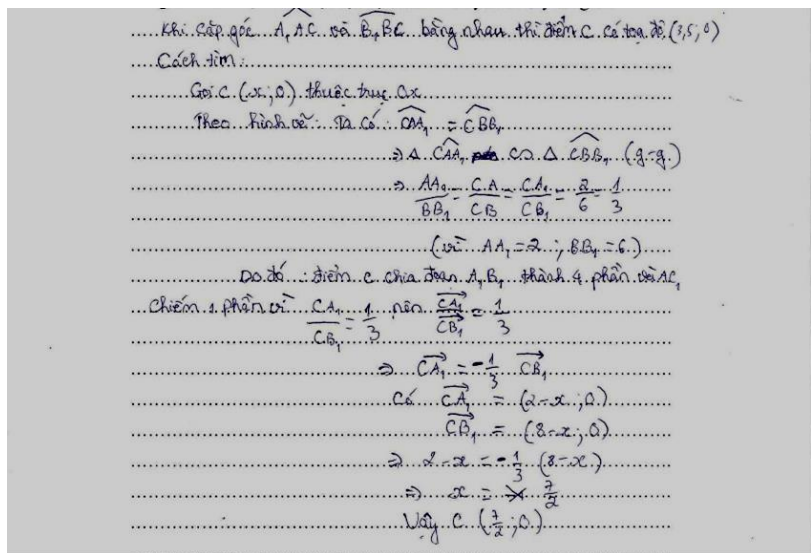


Hình 4: Vị trí của điểm C dùng để bác bỏ giả thuyết 1 và 2



Hình 5: Vị trí của điểm C để $(AC + CB)$ nhỏ nhất

Cuối cùng, học sinh đưa ra giả thuyết đúng về vị trí của điểm M như hình 5. Hơn nữa, thông qua quan sát hình 5 và bảng tính, học sinh đưa ra *giả thuyết 3* rằng nếu C ở tại vị trí trên Ox sao cho $\widehat{CAA_1} = \widehat{CBB_1}$, hoặc $\widehat{ACA_1} = \widehat{BCB_1}$, thì $(AC + CB)$ nhỏ nhất. Ngoài ra, dựa vào thông tin phản hồi có được từ GeoGebra, chiến lược tam giác đồng dạng như hình 6 cũng đã xuất hiện trong giấy làm bài của 3 học sinh trong lớp thực nghiệm.

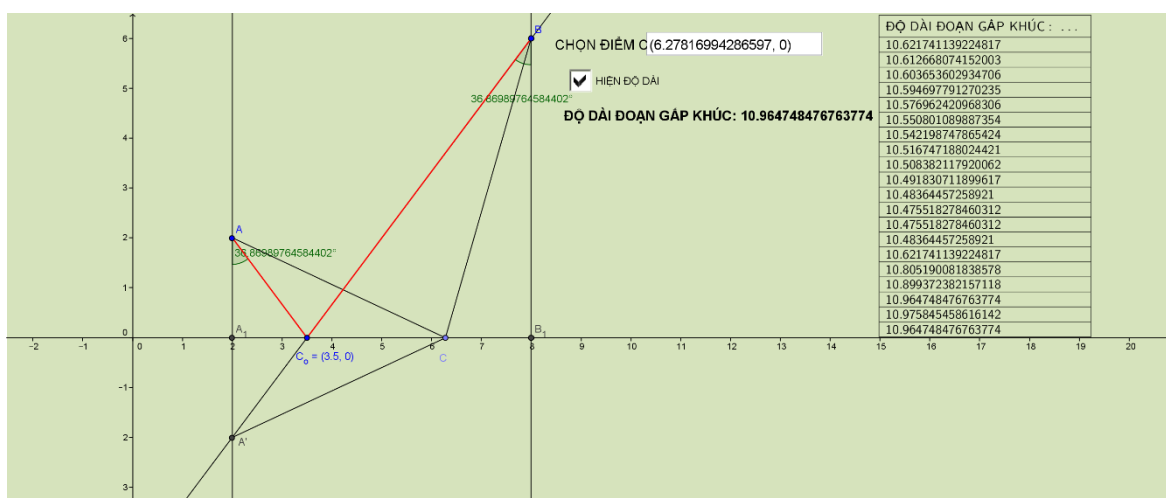


Hình 6: Xác định vị trí điểm C bằng chiến lược tam giác đồng dạng

Pha 5: Kiểm tra giả thuyết bằng công cụ lý thuyết

Vấn đề được đặt ra trong pha này là học sinh phải chứng minh $(AC + CB)$ là nhỏ nhất khi và chỉ khi $\widehat{CAA_1} = \widehat{CBB_1}$, hoặc $\widehat{ACA_1} = \widehat{BCB_1}$. Bởi vì, học sinh chỉ dừng lại ở việc đưa ra chiến lược đúng để tìm chính xác vị trí của điểm C thỏa mãn yêu cầu của bài toán mà không đưa được bất kì sự chứng minh bằng công cụ lý thuyết. Vì thế, giáo viên hướng dẫn học sinh chứng minh giả thuyết 3 bằng hai cách sau:

Cách thứ nhất: Tại điểm C có tọa độ $(3,5; 0)$, giáo viên dựng điểm A' là giao điểm của đường thẳng BC với đường thẳng AA_1 như hình 7 và hướng dẫn học sinh chứng minh như sau:



Hình 7: Hình minh họa cho việc chứng minh giả thuyết 3

Yêu cầu HS so sánh độ dài: AC và $A'C$; $AC + CB$ và $A'B$.

Sau đó, lấy C' là điểm bất kì trên Ox , so sánh: $AC' + C'B$ và $A'C' + C'B$; $A'B$ và $A'C' + C'B$.

Cuối cùng, kết luận? $AC' + C'B \geq AC + CB$.

Cách thứ 2: Gọi $C'(x; 0)$ là điểm bất kì thuộc Ox . Ta cần chứng minh rằng $AC' + C'B \geq 10, \forall x$.

Thật vậy,

$$AC' + C'B \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 2^2} + \sqrt{(8-x)^2 + 6^2} \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 2^2} \geq 10 - \sqrt{(8-x)^2 + 6^2}. \quad (*)$$

Dễ thấy rằng (*) là luôn đúng và dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = 3,5$.

Pha 6: Khái quát hóa

Sau khi kết thúc quá trình giải quyết bài toán (2), giáo viên giới thiệu bài toán Heron về tia sáng (1) như là sự tổng quát của bài toán (2), và tóm tắt các cách dựng điểm C thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

5.2 Tiến trình và kết quả của thực nghiệm 2

Trong thực nghiệm này, đối tượng thực nghiệm đã được làm quen và sử dụng thành thạo các công cụ chức năng của GeoGebra nên học sinh độc lập tương tác với GeoGebra theo nhóm đôi (02 học sinh sử dụng 01 máy tính). Tiến trình giải quyết vấn đề trong tình huống này cũng được chia thành 6 pha như thực nghiệm thứ 1.

Pha 1(Biểu diễn bài toán): Trong pha này, học sinh không gặp bất kì chướng ngại nào khi dùng GeoGebra để biểu diễn bài toán. Ở đây, chúng tôi minh họa kết quả biểu diễn của nhóm 5. Họ lần lượt thực hiện các thao tác: dựng điểm A, B, C ; dựng đoạn gấp khúc ACB ; hiển thị lưới ô vuông.

Pha 2 (Thực nghiệm với GeoGebra): Học sinh lần lượt thực hiện các thao tác: dùng công cụ « khoảng cách » để đo độ dài đoạn gấp khúc ACB ; dùng thuộc tính « hiển thị tên và giá trị » để hiển thị giá trị của đoạn gấp khúc ACB trên màn hình; dùng công cụ « hiển thị Spreadsheet » để hiển thị giá trị tổng độ dài của AB và CB ; di chuyển điểm C trên Ox

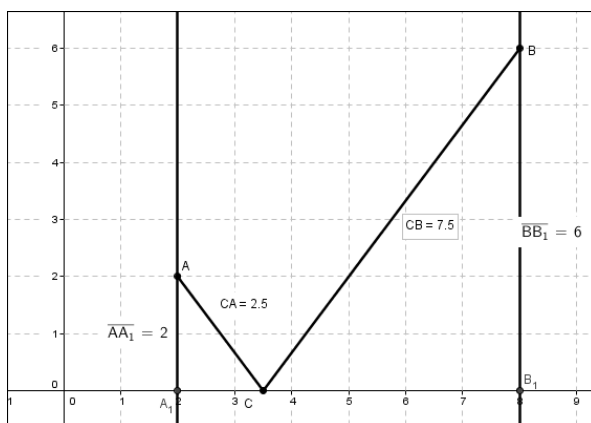
Pha 3 (Quan sát dữ liệu): Học sinh quan sát và tìm kiếm mối liên hệ giữa các dữ liệu được phản hồi từ môi trường GeoGebra (do điểm C được cho di chuyển).

Pha 4 (Hình thành và kiểm tra giả thuyết bằng công cụ GeoGebra): Kết thúc quá trình thao tác với GeoGebra, có ba giả thuyết về cách dựng điểm C được học sinh đưa ra, chúng được mô tả chi tiết như sau:

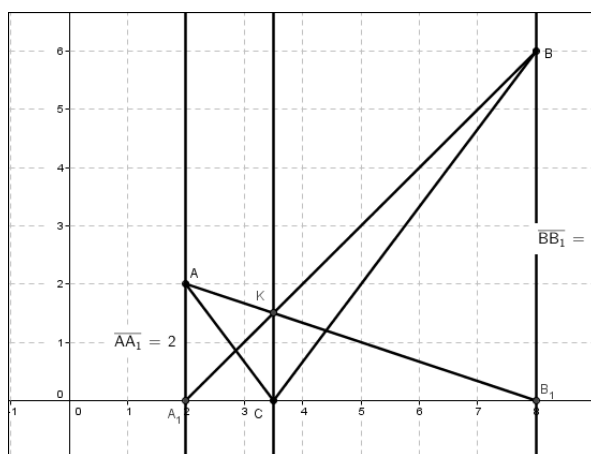
Giả thuyết 1 (Nhóm 1): Dựng A_1 và B_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A , B lên trục Ox . Tổng $(AC+CB)$ nhỏ nhất khi $C \equiv A_1$ hoặc $C \equiv B_1$. Và, giả thuyết này nhanh chóng bị bác bỏ bởi chính học sinh thông qua thao tác dịch chuyển điểm C trên trục Ox và quan sát “dữ liệu động”.

Giả thuyết 2 (Nhóm 5, nhóm 8): Tổng $AC + CB$ nhỏ nhất bằng 10 khi C nằm trên trục Ox khi tam giác $\triangle AA_1C$ đồng dạng với $\triangle BB_1C$, $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1C}{B_1C} = \frac{1}{3}$ và $C(3,5; 0)$ (Hình 8).

Giả thuyết 3 (Nhóm 4): Dựng K là giao điểm của AB_1 và A_1B . Tổng $(AC+CB)$ nhỏ nhất bằng 10 khi $C(3,5; 0)$ là giao điểm của đường thẳng đi qua K và vuông góc với trục Ox (Hình 9).



Hình 8: Vị trí điểm C để $(AC + CB)$ nhỏ nhất: trường hợp đồng dạng



Hình 9: Vị trí điểm C để $(AC + CB)$ ngắn nhất: trường hợp giao điểm

Pha 5 (Kiểm tra giả thuyết bằng công cụ lý thuyết): Chúng tôi thấy rằng, mặc dù học sinh đưa ra được 2 chiến lược xác định vị trí của điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán, nhưng họ không thể lý giải lý do vì sao C ở tại vị trí đó thì tổng $AC + CB$ là ngắn nhất bằng công cụ lý thuyết. Do đó, bài toán (3) với nội dung “*Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-2)$ và $B(8;6)$. Xác định vị trí của điểm C thuộc trục hoành Ox sao cho tổng khoảng cách $AC + CB$ là ngắn nhất*” được giáo viên đưa ra. Với bài toán này, học sinh dễ dàng nhận ra tổng $(AC + CB)$ ngắn nhất khi C nằm ở vị trí sao cho A, C, B thẳng hàng và chứng minh bằng cách dựa vào bất đẳng thức tam giác. Bằng cách qui lạ về quen, học sinh các nhóm phát hiện cách chứng minh cho giả thuyết 2 và 3 là đúng bằng cách lấy A' là điểm đối xứng của A qua trục Ox.

Pha 6 (Khái quát hóa). Kết thúc quá trình giải quyết bài toán (2), sau khi yêu cầu học sinh phát biểu bài toán tổng quát và tóm tắt cách dựng điểm C, giáo viên giới thiệu bài toán Heron về tia sáng (1).

6. Kết luận và thảo luận

Kết quả từ các thực nghiệm cho thấy, đối với bài toán (1), ngoài chiến lược truyền thống (dựng điểm C bằng phép đối xứng trục) được giới thiệu bởi giáo viên, còn có các chiến lược sau được phát hiện bởi học sinh.

– Chiến lược 1 (xuất hiện ở cả 2 tình huống thực nghiệm và được phát hiện bởi học sinh): Dựng $A_1; B_1$ lần lượt là hình chiếu của A; B lên đường thẳng L, điểm C cần tìm là điểm thuộc đoạn A_1B_1 sao cho $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1C}{B_1C}$

– Chiến lược 2 (chỉ xuất hiện trong tình huống thực nghiệm thứ 2 và được phát hiện bởi học sinh): Dựng $A_1; B_1$ lần lượt là hình chiếu của A; B lên đường thẳng L; K là giao điểm của AB_1 và A_1B , điểm C cần tìm là giao điểm của đường thẳng đi qua K và vuông góc với đường thẳng L.

Có thể thấy rằng, việc sử dụng phần mềm sẽ tạo thuận lợi cho việc thực nghiệm phỏng đoán câu trả lời hơn là môi trường giấy bút truyền thống. Hơn nữa, nhờ vào việc trực tiếp thao tác trong môi trường GeoGebra, học sinh có nhiều cơ hội để tiếp cận với phương pháp khoa học: thu thập và phân tích dữ liệu, phỏng đoán và xác minh phỏng đoán, khái quát hóa và mở rộng vấn đề. Bên cạnh đó, một hạn chế của học sinh trong các tình huống thực nghiệm là họ chưa thể độc lập đưa ra được sự chứng minh các chiến lược dựng hình là đúng bằng công cụ lý thuyết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Akkaya, A., Tatar, E., & Kağızmanlı, T. B. (2011). Using dynamic software in teaching of the symmetry in analytic geometry: The case of GeoGebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 15, 2540-2544.
2. Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. OUP Us.
3. Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 49-54.

4. Loc, N. P. (2014). Dynamic software “GeoGebra” for solving problem: A try-out of mathematics teachers. *Journal of international academic research for multidisciplinary*, 2(9).
5. Nguyen, D. N. (2012). Understanding the development of the proving process within a dynamic geometry environment. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, 46. *Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 5.3. 2012 bis 9.3. 2012 in Weingarten*.
6. Mehanovic, S. (2011). *The potential and challenges of the use of Dynamic Software in upper secondary mathematics: Students’ and teachers’ work with integrals in Geogebra based environments* (Doctoral dissertation, Linköping University Electronic Press).
7. Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 2, 363-391.
8. Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy và ctv. (2010). *Sách giáo khoa hình học 11*. Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam.
9. Nguyễn Chí Thành (2007). Ứng dụng phần mềm dạy học Cabri II Plus trong dạy học toán cực trị trong chương trình Toán lớp 10 trung học phổ thông. *Hội thảo Chương trình, sách giáo khoa và vấn đề kiểm tra đánh giá ở lớp 10 phân ban sau một năm thực hiện, Viện Nghiên cứu Giáo dục*, Tp HCM.2007.
10. Hoa Anh Tuong (2013), « L’animation » de Sketchpad-Géomètre pour soutenir des élèves dans l’apprentissage des mathématiques, *Colloque International Franco-Vietnamien en didactique des mathématiques*, Ho Chi Minh ville, 02–04/01/2013.

KHÁI NIỆM TỈ SỐ PHẦN TRĂM TRONG SÁCH GIÁO KHOA TOÁN TIỂU HỌC VIỆT NAM VÀ SINGAPORE

Ngô Trúc Phương*

Tóm tắt

Tỉ số phần trăm là khái niệm rất thường gặp trong cuộc sống. Ở Việt Nam và Singapore, khái niệm này cũng được đưa vào giảng dạy ở lớp 5. Bài viết này tập trung nghiên cứu các kiến thức về tỉ số phần trăm trong sách Toán lớp 5 của Việt Nam và Singapore. Qua sự phân tích hai bộ sách giáo khoa được lựa chọn, tác giả đưa ra một vài so sánh về sự lựa chọn của mỗi thể chế đối với khái niệm này.

Từ khóa: Singapore, tỉ số phần trăm, Toán tiểu học, Việt Nam.

Abstract

Percentage is a concept commonly used in life. In Vietnam and in Singapore, this concept is introduced at Grade 5. The paper aims to present our research about knowledge of percentages in Vietnamese and Singaporean mathematics textbooks. Through analyzing of selected mathematics textbooks, we represent some results of comparison about the choice of each institution for concept of percentage.

Keywords: percentage, Primary Mathematics, Vietnam, Singapore.

1. Mở đầu

Để có được một chương trình giáo dục phổ thông hoàn thiện theo tinh thần đổi mới căn bản và toàn diện của giáo dục Việt Nam trong những năm tới, chúng ta phải bắt đầu từ nhiều khâu, bao gồm việc xây dựng chương trình và thiết kế sách giáo khoa (SGK). Chúng tôi cho rằng, có một so sánh, đối chiếu giữa chương trình và SGK của Việt Nam với một số nước tiên tiến trên thế giới là rất cần thiết.

Trong phạm vi của bài viết, chúng tôi chọn nội dung dạy học về tỉ số phần trăm (TSPT) ở lớp 5. Việc so sánh được thực hiện trên hai bộ sách: SGK Toán 5 hiện hành của Việt Nam và sách My Pals Are Here Maths 5 (sách học sinh) của Singapore. Đây là các SGK hiện hành ở cả hai nước, được nhiều trường tiểu học chọn dạy.

Khi phân tích các kiến thức liên quan đến khái niệm TSPT trong các SGK, trong bài viết chúng tôi sẽ sử dụng công cụ tổ chức toán học của Thuyết Nhân học. Tổ chức toán học liên quan đến một đối tượng toán học là bộ bốn $[T, \tau, \theta, \Theta]$ bao gồm khối thực hành - kỹ thuật $[T, \tau]$ và khối công nghệ - lý thuyết $[\theta, \Theta]$. Ở đây, kiểu nhiệm vụ T phải liên quan đến một đối tượng tri thức O đã được xác định rõ và phải được thể chế dạy học xây dựng. Kỹ thuật τ là cách làm, cách giải quyết T . Công nghệ θ là yếu tố giải thích cho kỹ thuật. Lý thuyết Θ là công nghệ của công nghệ. Thường ta chỉ dừng lại ở ba yếu tố đầu, không đi sâu vào khía cạnh lý thuyết.

2. Tỉ số phần trăm trong sách giáo khoa Toán 5 Việt Nam

Về mức độ cần đạt của học sinh (HS) khi học về TSPT ở lớp 5, Chương trình tiểu học Việt Nam ([2], tr. 143-144) xác định: “HS cần biết được sự liên hệ với phân số, có

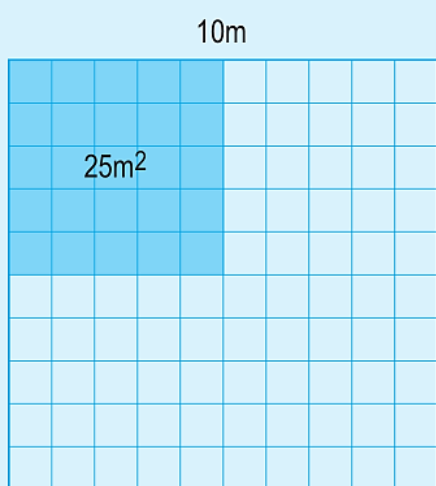
* ThS, Đại học Bạc Liêu

thể thực hiện được phép tính cộng, trừ, nhân và chia về TSPT và giải được ba dạng toán có lời văn liên quan”. Ở đây, chương trình không nhắc đến nội dung viết TSPT thành số thập phân và ngược lại trong khi TSPT được đưa vào trong chương trình Toán 5 ngay sau kiến thức về số thập phân.

2.1. Hình thành khái niệm và các dạng toán

SGK Toán 5 hiện hành không định nghĩa cụ thể TSPT của hai đại lượng mà chỉ đưa vào một ví dụ minh họa để hình thành khái niệm như sau:

a) Ví dụ 1 : Diện tích một vườn hoa là 100m^2 , trong đó có 25m^2 trồng hoa hồng. Tìm tỉ số của diện tích trồng hoa hồng và diện tích vườn hoa.



Tỉ số của diện tích trồng hoa hồng và diện tích vườn hoa là $25 : 100$

hay $\frac{25}{100}$.

Ta viết : $\frac{25}{100} = 25\%$;

đọc là : hai mươi lăm phần trăm.

Ta nói : Tỉ số phần trăm của diện tích trồng hoa hồng và diện tích vườn hoa là 25% ; hoặc : Diện tích trồng hoa hồng chiếm 25% diện tích vườn hoa.

Hình 1. Giới thiệu khái niệm tỉ số phần trăm (Toán 5, tr.73)

Ta thấy trong cách hình thành khái niệm nổi lên sự liên hệ giữa TSPT và phân số có mẫu số là 100, từ tỉ số chuyển thành TSPT. Có thể thấy SGK đã xem TSPT là tỉ số của hai đại lượng được viết dưới dạng phần trăm. Số $a\%$ là sự thay thế cho kiểu viết “ $\frac{a}{100}$ ”. Cách viết $25 : 100 = \frac{25}{100}$ còn cho thấy phân số này mang nghĩa của phép chia, như vậy có thể thực hiện phép chia để tìm thương.

Nhìn chung, mục tiêu của SGK qua ví dụ trên là giúp HS “*bước đầu hiểu về TSPT xuất phát từ khái niệm tỉ số và ý nghĩa thực tế của TSPT*” (Toán 5 – SGK, tr. 143). Trong ví dụ này, qua hình minh họa, Toán 5 không đề cập sự rút gọn phân số $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Sau ví dụ trên, SGK đưa thêm Ví dụ 2 là bài toán có lời văn về tìm tỉ số của 2 số 80 và 400. Lời giải là tìm tỉ số $\frac{80}{400}$, rút gọn thành $\frac{20}{100}$ và bằng 20%. Một lần nữa, HS được biết $a\%$ là sự thay thế cho kiểu viết “ $\frac{a}{100}$ ”, muốn viết phân số thành TSPT thì phải chuyển phân số về dạng có mẫu số là 100.

Tiếp sau đó, SGK giới thiệu ba kiểu nhiệm vụ liên quan đến toán có lời văn về TSPT:

- T_3 : “Tìm TSPT của hai số”.

- T_4 : “Tìm giá trị một TSPT của một số”.
- T_5 : “Tìm một số biết giá trị một TSPT của số đó”.

Trong T_3 , quy tắc tìm TSPT được thực hiện không theo kỹ thuật của Ví dụ 2 phía trước. Toán 5 đưa ra kỹ thuật thực hiện phép chia có thương là số thập phân. Tiếp theo, nhân thương với 100 rồi viết ký hiệu % vào kết quả. HS đã biết nhân rồi chia lại cho 100 thì giá trị số không đổi. Bên cạnh đó, kiến thức về chia số tự nhiên cho số tự nhiên mà thương tìm được là số thập phân, nhân số thập phân với 100 vừa được học trước đó. Cách làm này có vẻ đơn giản hơn với HS và áp dụng được cho việc tìm TSPT của hai số khác 0 bất kỳ.

Về kiểu nhiệm vụ T_4 , SGK đưa ra quy tắc sau: “Muốn tìm 52,5% của 800 ta có thể lấy 800 chia cho 100 rồi nhân với 52,5 hoặc lấy 800 nhân với 52,5 rồi chia cho 100” (Toán 5, tr. 76). Ở đây, SGK không nhắc đến kiến thức “tìm phân số của một số” đã học ở lớp 4. Nếu chuyển 52,5% về phân số $\frac{525}{10}$ thì bài toán trở thành tìm $\frac{525}{10}$ của 800, ta có ngay phép nhân $\frac{525}{10} \times 800$. Hay nói cách khác, đây là phép nhân 52,5% $\times$ 800 (nhân tỉ số phần trăm với một số tự nhiên). SGK đã ưu tiên kỹ thuật giải là tìm trước giá trị của 1% theo phương pháp Rút về đơn vị (một phương pháp giải toán có lời văn rất quen thuộc được giới thiệu ở Toán 3).

Phương pháp này tiếp tục được áp dụng trong kỹ thuật của T_5 , một quy tắc được trình bày là: “Muốn tìm một số biết 52,5% của nó là 420, ta có thể lấy 420 chia cho 52,5 rồi nhân với 100 hoặc lấy 420 nhân với 100 rồi chia cho 52,5” (Toán 5, tr. 78). Có thể thấy dụng ý của SGK là thực hiện kỹ thuật tương tự ở hai kiểu nhiệm vụ và có sẵn quy tắc giúp HS dễ nhớ, dễ vận dụng.

2.2. Các tổ chức toán học về TSPT trong SGK và Vở bài tập Toán 5

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ
T_0 : “Viết số thập phân thành TSPT”.	τ_0 : Nhân số thập phân với 100 rồi viết ký hiệu % vào bên phải số tìm được.	- Dạng phân số của TSPT. - Một số không đổi khi nhân rồi chia cho cùng một số.
T_1 : “Viết phân số $\frac{a}{b}$ thành TSPT”.	τ_1 : - Nếu $b = 100$ thì viết ngay thành $a\%$. - Nếu $\frac{a}{b}$ đưa được về dạng phân số thập phân $\frac{c}{100}$ thì viết thành $c\%$.	- Dạng phân số của TSPT. - Phân số bằng nhau.
T_{21} : “Cộng (trừ) các TSPT”.	τ_2 : Thực hiện cộng (hoặc trừ), nhân (hoặc chia) đối với các số, viết thêm ký hiệu % vào sau kết quả phép toán.	- Dạng phân số của TSPT. - Phép toán về phân số.
T_{22} : “Nhân TSPT với một số tự nhiên”.		
T_{23} : “Chia TSPT cho một số tự nhiên khác 0”.		
T_3 : “Tìm TSPT của hai số a và b ” (kể cả toán có lời văn).	τ_3 : - Chia a cho b được thương là số thập phân c . - Viết c thành TSPT (kiểu T_0).	- TSPT là tỉ số của hai đại lượng. - Dạng số thập phân của TSPT.

T ₄ : “Tìm giá trị x% của một số b cho trước” (kể cả toán có lời văn).	τ_4 : Thực hiện phép tính $b : 100 \times x$ hoặc $b \times x : 100$.	- Phương pháp Rút về đơn vị. - 100% của một số là chính nó.
T ₅ : “Tìm một số biết giá trị a của x% của số đó” (kể cả toán có lời văn).	τ_5 : Thực hiện phép tính $a : x \times 100$ hoặc $a \times 100 : x$.	

Bảng 1: Thống kê các kiểu nhiệm vụ về TSPT trong SGK và Vở bài tập Toán 5

2.3. Một vài nhận xét

Về TSPT, SGK Toán 5 thể hiện các nội dung sau:

– Khái niệm TSPT được xây dựng từ tỉ số của hai đại lượng. HS biết về TSPT thông qua phân số có mẫu số là 100. Việc thực hiện cộng trừ các TSPT như đối với các phân số có cùng mẫu số là 100.

– Hệ thống bài tập thể hiện rõ sự liên hệ giữa số thập phân, phân số, TSPT. Có 2 kiểu nhiệm vụ về chuyển đổi qua lại giữa 3 dạng biểu thị này của số hữu tỉ. Trong khi việc chuyển TSPT về phân số không phải là kiến thức trọng tâm, giải toán về TSPT rất thường gắn với hoặc được đưa về dạng có sử dụng phép toán trên số thập phân.

– Đối với mỗi kiểu nhiệm vụ, SGK chỉ giới thiệu một kỹ thuật.

– SGK lựa chọn kỹ thuật dùng được cho cả số tự nhiên và số thập phân trong các tổ chức toán học về TSPT. Không chỉ có các số phần trăm nhỏ hơn hoặc bằng 100% mà còn có số lớn hơn 100% (bài 2b, 3b, tr. 76), có phần trăm của số thập phân (như 52,5%). Có một vấn đề ở kỹ thuật τ_3 là có thể xuất hiện thương dạng thập phân vô hạn tuần hoàn mà HS chưa hề gặp. Sách GV đã giải thích như sau: “*Lần đầu tiên HS làm quen với cách viết gần đúng 0,6333... là 63,33%. Hầu hết tính toán về tỉ số phần trăm trong cuộc sống hàng ngày đều rơi vào trường hợp gần đúng. Nói chung, khi đó người ta quy ước lấy 4 chữ số sau dấu phẩy khi chia để số phần trăm có hai chữ số sau dấu phẩy*” (Toán 5-SGV, tr.147). Như vậy, nếu gặp trường hợp số gần đúng thì chỉ lấy 4 chữ số, Toán 5 chỉ đưa vào 1 bài tập dạng này với mục đích giới thiệu một tình huống thường gặp trong cuộc sống. Nhìn chung, việc đưa vào bài toán về số gần đúng này có thể gây bối rối cho HS.

– Ba kiểu nhiệm vụ liên quan đến toán có lời văn về TSPT được giới thiệu đầy đủ trong SGK. Toán 5 lựa chọn xây dựng kỹ thuật thông qua quy tắc giải cho từng dạng toán mà không có hình ảnh hoặc sơ đồ minh họa. Quy tắc được phát biểu với các số cụ thể. Khi giải toán, HS chỉ cần xác định dạng và áp dụng quy tắc.

Có thể thấy, với TSPT, SGK Toán 5 ưu tiên cho trình bày các tính toán số học, không đưa vào các minh họa hình học. Toàn bộ nội dung về tỉ số phần trăm chỉ có duy nhất một hình vuông 10m x 10m có hình vuông 5m x 5m bên trong minh họa 25% (xem Hình 1).

3. Tỉ số phần trăm trong sách Maths 5 của Singapore

3.1. Hình thành khái niệm và các dạng toán

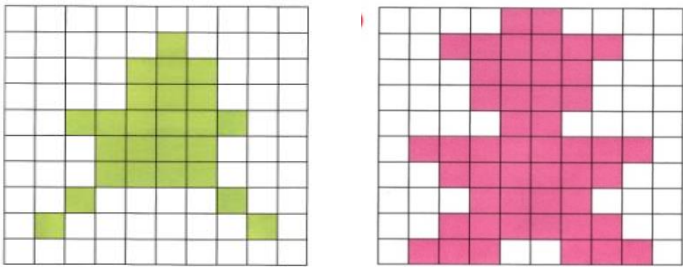
Sách Maths 5B giới thiệu khái niệm TSPT qua ba ví dụ. Ví dụ 1 như sau:

“Trong vườn có 100 hoa tulip và 75 hoa trong số đó có màu đỏ. Vì vậy, 75 trên 100 là hoa tulip đỏ. Có 3 cách để biểu diễn:

- Phân số: $\frac{75}{100}$
- Số thập phân: 0,75
- Tỷ số phần trăm: 75%”

(Maths 5B, tr.64)

Sự trình bày trên cho ta thấy ba cách biểu diễn như nhau của số phần trăm. Sau đó, Ví dụ 2, 3 dành cho biểu diễn phân số $\frac{25}{100}, \frac{48}{100}$ (phần tô màu xanh và hồng). Ở đây hình có dạng tùy ý trong hình vuông 10x10 nên HS phải đếm số ô vuông được tô màu. Như vậy, sách Maths 5B đưa cách tiếp cận phân số (số phần/số tổng thể) trong xây dựng khái niệm TSPT.



Hình 2. Biểu diễn tỉ số phần trăm trong Maths 5B

Sau khi đưa vào số phần trăm, Maths 5B trình bày nhiều bài tập về chuyển đổi qua lại của 3 dạng: phân số – số thập phân – TSPT trong đó rất chú trọng vấn đề rút gọn phân số. Trong ba bài học, sách dành riêng một bài về đổi phân số sang TSPT.

Về toán có lời văn, sách Maths 5B chỉ đặt tên chính thức cho kiểu nhiệm vụ T₄. Trong khi đó, T₃ nằm trong các ứng dụng của tìm tỉ số phần trăm của hai số cụ thể. Không có sự xuất hiện của T₅.

3.2. Các tổ chức toán học về tỉ số phần trăm trong Maths 5B

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ
T ₀ : “Viết số thập phân thành TSPT”.	τ _{0a} : - Đổi số thập phân sang phân số thập phân. - Đổi phân số thập phân sang TSPT.	- Cách viết số thập phân thành phân số. - Dạng phân số của TSPT.
T ₀₁ : “Viết TSPT thành phân số tối giản”.	τ ₀₁ : - Đổi TSPT thành phân số thập phân. - Rút gọn phân số tìm được.	- Dạng phân số của TSPT. - Phân số bằng nhau.
T ₀₂ : “Viết TSPT thành số thập phân”.	τ ₀₂ : - Đổi TSPT thành phân số thập phân. - Viết phân số thập phân thành số thập phân.	- Dạng phân số của TSPT. - Cách viết số thập phân thành phân số.
T ₀₃ : “Đánh dấu TSPT trên trục số”.	τ ₀₃ : - Đổi TSPT thành số thập phân. - Tìm số thập phân trên trục.	- Dạng số thập phân của TSPT.

T ₁ : “Viết phân số $\frac{a}{b}$ thành TSPT”.	τ_1	- Dạng phân số của TSPT. - Phân số bằng nhau.
	τ_{1a} : - b phần ứng với 100%. - 1 phần ứng với $\frac{100}{b}$ %. - a phần ứng với $a \times \frac{100}{b}$ %.	- a là số phần còn b là số tổng thể. - Tổng thể là 100%.
	τ_{1b} : - Viết tích phân số $\frac{a}{b}$ với 100%. - Nhân phân số với 100, viết % vào kết quả.	- Số không đổi khi nhân với 1. - 100% = 1.
T ₂₁ : “Cộng (trừ) các TSPT”.	τ_2	- Dạng phân số của TSPT. - Phép toán về phân số.
T ₂₂ : “Nhân TSPT với một số tự nhiên”.	τ_{22} : - Đổi TSPT thành phân số. - Nhân phân số này với số tự nhiên đã cho.	
T ₃ : “Tìm TSPT của hai số a và b” (kể cả toán có lời văn).	τ_{3a} : - Xác định phân số $\frac{a}{b}$ và rút gọn thành phân số tối giản. - Viết phân số tối giản thành TSPT: sử dụng kỹ thuật τ_{1a}, τ_{1b} .	Dạng phân số của TSPT.
T ₄ : “Tìm giá trị x% của một số b cho trước” (kể cả toán có lời văn).	τ_4	- Phương pháp Rút về đơn vị. - 100% của một số là chính nó.
	τ_{4a} : Thực hiện phép nhân x% với b.	Dạng phân số của TSPT. Phân số của một số.

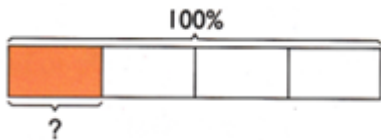
Bảng 2: Thống kê các kiểu nhiệm vụ về TSPT trong Maths 5B

3.3. Một vài nhận xét

Về khái niệm TSPT, sách Maths 5B thể hiện các nội dung sau:

- Khái niệm TSPT được xây dựng từ phân số theo nghĩa tiếp cận số phần trên số tổng thể.
- Để chỉ ra sự liên hệ giữa số thập phân, phân số, TSPT, sách đã giới thiệu rất nhiều bài tập (gồm 5 kiểu nhiệm vụ) chuyển đổi giữa ba loại số này. Trong đó, chuyển TSPT về phân số là kiến thức trọng tâm của giải toán, rút gọn phân số xuất hiện trong hầu hết kỹ thuật của các kiểu nhiệm vụ.
- Có một số kiểu nhiệm vụ được giới thiệu nhiều kỹ thuật.
- Sách chỉ lựa chọn đưa vào TSPT của các số tự nhiên, chỉ có các số phần trăm nhỏ hơn hoặc bằng 100%, không có phần trăm của số thập phân. Các mẫu số được giới hạn trong phạm vi các ước số của 100.

– Với toán có lời văn về TSPT, chỉ có T_3 và T_4 được giới thiệu trong Maths 5B, không có T_5 . Mỗi bài toán đều có hình ảnh minh họa (sơ đồ hình chữ nhật) biểu diễn tỉ số và TSPT, chẳng hạn sơ đồ sau:



4. Một số kết quả so sánh

Bảng tổng hợp sau sẽ giúp ta có một cái nhìn tổng thể về sự tương đồng và khác biệt đối với tri thức TSPT được thể hiện trong sách Toán 5 và Maths 5B:

Kiểu nhiệm vụ	Toán 5 (Việt Nam)			Maths 5B (Singapore)		
	Kỹ thuật	Bài tập		Kỹ thuật	Bài tập	
		Số lượng	Tỉ lệ (%)		Số lượng	Tỉ lệ (%)
T_0	τ_0	1	4.2	τ_{0a}	4	9.1
T_{01}	Không có			τ_{01}	3	6.8
T_{02}				τ_{02}	2	4.5
T_{03}				τ_{03}	2	4.5
T_1	τ_1	1	4.2	$\tau_1, \tau_{1a}, \tau_{1b}$	5	11.4
T_{21}	τ_2	2	8.4	τ_2	1	2.3
T_{22}				τ_{22}	1	2.3
T_{23}				Không có		
T_3	τ_3	6	25.0	τ_{3a}	11	25.0
T_4	τ_4	9	37.5	τ_4, τ_{4a}	14	31.8
T_5	τ_5	5	20.7	Không có		

Bảng 3: Thống kê số lượng bài tập về TSPT trong Toán 5 và Maths 5B

4.1. Những điểm tương đồng

- Ở hai sách có sự lựa chọn giống nhau khi đưa vào khái niệm TSPT có hình vuông kẻ ô 10 x 10, thông qua xây dựng phân số có mẫu số là 100.
- Có 6 kiểu nhiệm vụ cùng có mặt là: $T_0, T_1, T_{21}, T_{22}, T_3, T_4$.
- Về toán có lời văn, cả hai sách đều ưu tiên cho kiểu nhiệm vụ T_3 và T_4 . Để hình thành kỹ thuật cho các kiểu nhiệm vụ này, HS được làm quen trước kỹ thuật chuyển phân số, số thập phân về TSPT. Ở mỗi kiểu đều có nhiều ví dụ minh họa, có lời giải và hướng dẫn giải. Khi giải toán, HS áp dụng tương tự với các số được cho. Điều này thể hiện việc giải toán ưu tiên dùng tính toán số học.
- Thứ tự sắp xếp kiến thức đưa vào sách hoàn toàn giống nhau: số thập phân – giới thiệu TSPT – tìm TSPT của hai số – tìm giá trị TSPT của một số.

– Những ứng dụng của TSPT trong cuộc sống được đưa vào thông qua các bài toán có lời văn: tính lãi suất, tiền thuế, số tiền giảm giá...

– Việc sử dụng máy tính bỏ túi để giải toán TSPT được đưa vào giới thiệu trong sách sau khi HS đã biết kỹ thuật giải.

4.2. Những điểm khác biệt

– Sách Toán 5 Việt Nam có sự ưu tiên cho toán có lời văn, hai kiểu nhiệm vụ đầu T_0 , T_1 ít được đưa vào thực hành (có 2 bài tập) vì chúng đã có mặt trong ba kiểu nhiệm vụ sau, các phép toán về TSPT được tách thành bài tập riêng với toán có lời văn. Trong khi đó, sách Maths 5B chú trọng thao tác chuyển đổi giữa 3 kiểu số và hình thành mối liên kết giữa chúng (có 16 bài tập), T_1 và T_{22} lần lượt được chuẩn bị làm tiền đề cho T_3 và T_4 .

– Ở Maths 5B, trong mỗi kỹ thuật giải đều có minh họa bằng sơ đồ, bài giải thể hiện rõ kỹ thuật chứ không phát biểu thành quy tắc để HS vận dụng như trong sách Toán 5.

– Toán 5 giới thiệu phần trăm của số thập phân, số lớn hơn 100% trong khi Maths 5B không có.

– Sách Maths 5B có nhiều kiểu nhiệm vụ và nhiều bài tập thực hành hơn sách Toán 5.

– Ở kiểu nhiệm vụ T_1 , T_3 , T_4 , công nghệ giải thích cho kỹ thuật ở hai sách có một vài điểm khác nhau, cụ thể là:

+ Với sách Việt Nam, T_1 và T_3 hoàn toàn tách biệt. Việc tìm TSPT của hai số thông qua tìm thương trong phép chia. Do đó, dạng số thập phân của TSPT được dùng để giải thích cho kỹ thuật của T_3 .

+ Ở sách Singapore, T_1 là kiểu nhiệm vụ con của T_3 . T_1 được giới thiệu 3 kỹ thuật, trong đó chỉ có τ_1 giống ở Toán 5. Việc tìm TSPT của hai số chỉ cần chuyển về tìm phân số của chúng và đổi phân số sang TSPT. Ở đây, công nghệ của T_3 là dạng phân số của TSPT. Bên cạnh đó, T_4 có thêm kỹ thuật τ_{41} so với Toán 5 (chỉ có τ_4), công nghệ của kỹ thuật này là dạng phân số của TSPT và tính chất phân số của một số.

5. Kết luận

Kết quả phân tích các SGK, về khái niệm TSPT, cho phép chỉ ra một số đặc trưng của hai thể chế dạy học.

– Thể chế dạy học Toán 5 của Việt Nam:

+ Chọn nghĩa tỉ số của hai đại lượng (có kèm đơn vị đo diện tích) để tiếp cận khái niệm TSPT.

+ Yêu cầu HS biết cách giải quyết cả ba kiểu nhiệm vụ liên quan đến toán có lời văn theo một quy tắc cho trước. Mỗi kiểu chỉ giới thiệu duy nhất một kỹ thuật giải và không yêu cầu vẽ sơ đồ minh họa.

+ Không nhắc lại tính chất phân số của một số trong dạy học TSPT. Việc chuyển TSPT về phân số không phải là trọng tâm.

+ Giới thiệu các TSPT lớn hơn 100% và số gần đúng.

+ Trong kỹ thuật thường sử dụng các phép toán liên quan đến số thập phân.

– Thẻ chế dạy học Toán 5 của Singapore:

+ Chọn hình thức đưa vào phân số theo nghĩa số phần trên số tổng thể để tiếp cận khái niệm TSPT.

+ Yêu cầu HS biết cách giải quyết 2 kiểu nhiệm vụ liên quan đến toán có lời văn về TSPT. Ở mỗi kiểu, sách giới thiệu nhiều kỹ thuật và luôn có sự minh họa bằng sơ đồ.

+ Vận dụng tính chất phân số của một số và chuyển TSPT về phân số tối giản là trọng tâm trong thực hiện kỹ thuật. Luyện tập kỹ năng rút gọn phân số là mục tiêu mà thẻ chế hướng đến.

+ Chỉ đưa vào các TSPT nhỏ hơn hoặc bằng 100%.

+ Tạo ra một sự liên kết giữa ba cách biểu diễn: phân số – số thập phân – TSPT.

Mỗi thẻ chế có một sự lựa chọn khác nhau đối với tri thức. Để giải thích sự khác nhau này cần nghiên cứu thêm nhiều yếu tố khác như quy định của chương trình, đặc điểm của Giáo dục Tiểu học ở mỗi nước, ... Nội dung này xin dành cho một nghiên cứu khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Annie Bessot, Claudie Comiti, Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của Didactic toán*. Hồ Chí Minh: NXB Đại học Quốc Gia TP HCM.

2. Bộ Giáo dục và đào tạo. (2009). *Chương trình Toán Tiểu học*.

3. Vũ Quốc Chung (CB), Đào Thái Lai, Đỗ Tiến Đạt, Trần Ngọc Lan, Nguyễn Hùng Quang và Lê Ngọc Sơn. (2007). *Phương pháp dạy học Toán ở Tiểu học – Tài liệu đào tạo giáo viên*. Hà Nội: NXB Giáo dục – NXB Đại học Sư phạm.

4. Đỗ Đình Hoan. (2006). *Toán 5* (SGK hiện hành). Hà Nội: NXB Giáo dục.

5. Đỗ Đình Hoan. (2006). *Toán 5* (SGV hiện hành). Hà Nội: NXB Giáo dục.

6. Đỗ Đình Hoan. (2006). *Vở bài tập Toán 5 – Tập 1 & 2*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.

7. Kheong, F. H., Soon, G. K., & Krishman, C. R. (2009). *My Pals Are Here Maths 5B (Pupil's book)*. Singapore: Marshall Cavendis education.

MỘT SỐ BÀN LUẬN VỀ DẠY HỌC TOÁN VÀ VẤN ĐỀ KẾT NỐI TOÁN HỌC VỚI THỰC TIỄN TRONG DẠY HỌC TOÁN

Nguyễn Tiến Trung^{*}, Hoàng Ngọc Anh^{**}, Nguyễn Mạnh Tuấn^{***}

Tóm tắt

Bài báo trình bày một số bàn luận về mục tiêu học và mục tiêu dạy học môn Toán trong nhà trường. Tiếp đó, bài báo đưa ra những nhận định và những ví dụ về việc kết nối với thực tiễn trong dạy học môn Toán góp phần phát triển năng lực học sinh. Đồng thời, trong bối cảnh sự phát triển mạnh mẽ của khoa học và công nghệ, bài báo đề xuất một số gợi ý về việc điều chỉnh về nội dung, chương trình môn Toán ở phổ thông; trình bày một số ví dụ về việc ứng dụng các phần mềm online, phần mềm toán học trong dạy và học môn Toán.

Từ khoá: toán học, thực tiễn, kết nối toán học với thực tiễn, dạy học môn Toán.

Abstract

This paper presents some discussions on the goal of mathematics learning and the goals of mathematics teaching in schools. The article provides insights and some examples of real-word connection in mathematics teaching that contribute to the development of student's competences. Simultaneously, in the context of vigorous development of science and technology, the paper proposes some suggestions for modifying the content and curriculum of mathematics in general; Presenting some examples of the application of online software, mathematics software in mathematics teaching and mathematics learning.

Keywords: mathematics, reallity, real-word connection, mathematics teaching.

1. Đặt vấn đề nghiên cứu

Trong bối cảnh đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, mục tiêu giáo dục đang được chuyển theo hướng từ trang bị kiến thức, kỹ năng sang phát triển năng lực học sinh. Hiện nay, ở Việt Nam, có nhiều nghiên cứu khác nhau trong lĩnh vực giáo dục toán học theo hướng kết nối, liên hệ các kiến thức toán học với thực tiễn. Các nghiên cứu đó có thể kể tới như của Bùi Văn Nghị [6], Trần Vui [13], [14], Nguyễn Danh Nam [5], Phan Văn Lý [7], Nguyễn Tiến Trung [9], [10], [11] ... cho các đối tượng học sinh khác nhau từ bậc tiểu học đến đại học. Các kết quả nghiên cứu trên cũng tập trung vào các khía cạnh khác nhau của dạy và học toán như: văn hóa toán học, việc kết nối toán học với thực tiễn, năng lực toán học, về việc bồi dưỡng, phát triển năng lực toán học cho học sinh thông qua việc tổ chức cho học sinh sử dụng các kiến thức toán học để giải các bài toán có nội dung thực tiễn hay các bài toán thực tiễn. Đó là xu hướng tiếp cận trong giáo dục phù hợp với cơ sở triết học của quá trình dạy học. Mọi hoạt động, trong đó có hoạt động học tập, cần bắt đầu từ thực tiễn và cần hướng tới, phục vụ thực tiễn.

Toán học là một khoa học nảy sinh, phát triển từ thực tiễn và phục vụ thực tiễn. Do vậy, dạy học môn Toán cần thiết nên có sự gắn kết với thực tiễn, bao gồm thực tiễn của đời sống xã hội và thực tiễn của người học. Tuy vậy, không phải kiến thức toán

^{*} TS, Tạp chí Giáo dục, Bộ Giáo dục và Đào tạo

^{**} TS, Đại học Tây Bắc

^{***} TS, Đại học Sư phạm Hà Nội

học nào cũng nảy sinh, bắt nguồn từ thực tiễn đời sống. Nhiều tri thức toán học được sáng tạo từ các nhà toán học, nó đã trừu tượng hóa vượt lên trên thực tiễn, xa hơn thực tiễn, ẩn đi trong thực tiễn.

Sự phát triển nhanh và mạnh mẽ của khoa học và công nghệ dẫn đến những tác động toàn diện, đôi khi tạo nên những thay đổi lớn trong đời sống xã hội. Từ đó, khoa học và công nghệ có nhiều đóng góp, ứng dụng trong giáo dục, đồng thời đặt ra những thách thức, vấn đề mới cho giáo dục. Chẳng hạn, sự phát triển mạnh mẽ của các phần mềm, trong đó có phần mềm toán học, các phần mềm trò chơi, ... đặt cho giáo dục toán học một cơ hội phát triển, ứng dụng, sử dụng. Nhưng cần nghiên cứu xem xét và cho phép những chức năng nào, những ứng dụng, phần mềm nào được sử dụng và sử dụng đến mức độ nào trong nhà trường để nhằm đạt tới và không ảnh hưởng tới mục tiêu giáo dục môn Toán.

Do đó, việc dạy học toán gắn với thực tiễn như thế nào, với mức độ nào là phù hợp và trong bối cảnh tiên bộ của khoa học công nghệ, cần có những điều chỉnh như thế nào trong quá trình dạy học môn Toán là những vấn đề cần phải được nghiên cứu, luận giải.

2. Giải quyết vấn đề

Để góp phần luận giải cho hai vấn đề trên, cần thiết phải phải trả lời hai câu hỏi:

- Học sinh cần học toán để làm gì?
- Giáo viên cần dạy toán như thế nào (đặt trong mối quan hệ với thực tiễn)?

2.1. Về mục tiêu của việc học toán

Với câu hỏi thứ nhất, tiếp cận với các nghiên cứu về giáo dục toán học thế giới [1], [4], [8] cũng như của Việt Nam [13], [14], có thể chỉ ra một số mục tiêu, hình thành cho học sinh mục tiêu học toán trong quá trình học tập như sau:

- (i) học các giá trị của toán học (ý nghĩa, sự vận dụng);
- (2i) học để trở thành những người giải toán giỏi (kỹ năng giải toán, kỹ thuật giải toán, nắm các khái niệm, sử dụng thành thạo các định lý, bổ đề, hệ quả như những công cụ để giải toán...);
- (3i) học để giao tiếp toán học, phát triển tư duy (đặc biệt là các loại hình tư duy toán học);
- (4i) học để hiểu các lý luận, lý thuyết toán học, từ đó có thể giới quan khoa học, vận dụng trong đời sống;
- (5i) học để phát triển năng lực giải quyết vấn đề nói chung, trong đó đặc biệt là năng lực giải quyết vấn đề liên quan đến toán học.

Như vậy, chúng ta có thể thấy rằng, việc học toán nếu được gắn với thực tiễn sẽ góp phần cho việc thực hiện các mục tiêu (i), (4i), (5i).

Hơn nữa, cần lưu ý rằng:

– Học toán là một quá trình hoạt động một cách tích cực. Học toán trước hết là phải làm toán, tức là giải toán và học cách giải toán. Do vậy, học sinh cần phải được trang bị các kiến thức cơ bản, tối thiểu, các kỹ năng tối thiểu vừa đủ để làm toán.

– Học toán không chỉ đơn giản là học trong Số học, Đại số, Hình học và Giải tích. Toán học còn có ở trong Tài chính, Kinh tế, Y học, Sinh học, Xã hội học... và ở trong đời sống; và nhất định cần gắn Toán học với các lĩnh vực ấy. Chỉ khi đó, Toán học mới trở nên có giá trị, hiệu quả và hấp dẫn, với nhiều học sinh.

2.2. Một số lưu ý về việc dạy học môn Toán

Đối với câu hỏi thứ hai, từ những phân tích về vị trí và vai trò của môn Toán, về quá trình học toán và những thành tựu, sự phát triển của khoa học công nghệ, từ sự hội nhập quốc tế trong giáo dục, từ nghiên cứu về mối liên hệ giữa nội dung của toán học phổ thông và đại học, có thể chỉ ra một số lưu ý trong dạy học môn Toán là:

Thứ nhất, dạy học toán cần tập trung trước hết vào việc trang bị các tri thức và kỹ năng toán học. Có thể kể tới các tri thức như: khái niệm, định lý, bổ đề, tiên đề, hệ quả, quy trình, quy tắc,... Việc trang bị cho học sinh nắm vững các kiến thức nền tảng, sẽ giúp họ có cơ hội vận dụng trong giải toán, với các kỹ năng giải toán, kỹ năng chứng minh, ...

Thứ hai, dạy học môn Toán cần tập trung vào việc phát triển tư duy cho học sinh.

Thứ ba, cần thiết và phải tăng cường một cách hợp lý sự liên hệ, kết nối các tri thức toán học, các tư tưởng toán học với thực tiễn (thực tiễn đời sống xã hội, thực tiễn đời sống của người học) và thông qua thực tiễn để dạy cho học sinh các tư tưởng, nguyên lý toán học (chẳng hạn như: tư tưởng về mở rộng các tập hợp số; tư tưởng cấu trúc trong toán học; tư tưởng biến thiên; tư tưởng liên tục; tư tưởng tối ưu, tư tưởng hàm hay vấn đề liên hệ và phụ thuộc lẫn nhau giữa các đối tượng trong tự nhiên, xã hội; tư tưởng tập hợp; ... một số nguyên lý quan trọng như nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực trị rời rạc, nguyên lý xuống thang (theo [12, tr. 214-231]), ... Có thể chỉ ra một số kết quả nghiên cứu như thế trong [6], [9], [10], [11], [14].

Thứ tư, cần ứng dụng công nghệ thông tin nhiều hơn nữa trong dạy toán: dạy học sinh sử dụng các phần mềm toán học; cho phép học sinh sử dụng các phần mềm khác nhau trong quá trình học môn Toán để giải quyết vấn đề, để giải toán. Theo đó, công nghệ thông tin (máy tính, máy vi tính, phần mềm,...) cần được dùng nhiều hơn trong lớp học, với tư cách là một phần của hoạt động học chứ không phải là hoạt động trình chiếu hay tìm kiếm, mà đa số lại chỉ của giáo viên. Chẳng hạn như cần giảm bớt yêu cầu về kỹ năng tính toán khi đã có máy tính bỏ túi; cần cân nhắc việc dạy cho học sinh sử dụng các phần mềm toán học ngay từ phổ thông (đánh công thức toán như Mathtype; vẽ hình như Geogebra; tính toán đơn giản như Mapple, ...) để nâng cao khả năng và giảm thời gian sử dụng toán học để giải quyết vấn đề cho học sinh.

Thứ năm, cần cân nhắc đến việc điều chỉnh nội dung dạy học cho phù hợp đảm bảo có sự liên thông với chương trình ở bậc đại học. Chẳng hạn, một số vấn đề có thể xem xét

như: nghiên cứu đưa vào nhiều hơn và xuống thấp hơn các kiến thức về thống kê, xác suất vào chương trình; nên chăng thống nhất giữa phổ thông, đại học về cách viết ma trận, định thức, tọa độ của điểm, vector; ...

2.3. Một số ví dụ trong dạy học môn Toán theo hướng gắn với thực tiễn, lợi dụng sự tiến bộ của công nghệ thông tin

Dưới đây, chúng tôi trình bày một số ví dụ có thể khai thác trong quá trình dạy học môn Toán trong nhà trường theo hướng kết nối với thực tiễn nhằm phát triển năng lực học sinh.

Bài toán 1. Để chuẩn bị cho chương trình khai giảng, chào mừng năm học mới, cô giáo có một yêu cầu dành cho các nhóm học sinh như sau: Mỗi nhóm sẽ có một nửa tờ giấy màu đỏ, với kích thước là $40 \times 60 \text{cm}$. Hãy cắt tờ giấy đã cho thành các lá cờ hình chữ nhật nhỏ với kích thước là $9 \times 12 \text{cm}$ sao cho được nhiều lá cờ nhất.

Phân tích. Bài toán này (dành cho học sinh lớp 4) góp phần giúp giáo viên bồi dưỡng, phát triển cũng như đánh giá năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn, năng lực tư duy toán học và năng lực tính toán (viết theo thứ tự ưu tiên) [9]. Bài toán cho học sinh một yêu cầu hoạt động. Để hoàn thành hoạt động này, từng nhóm học sinh phải thực hiện hai hoạt động thành phần là:

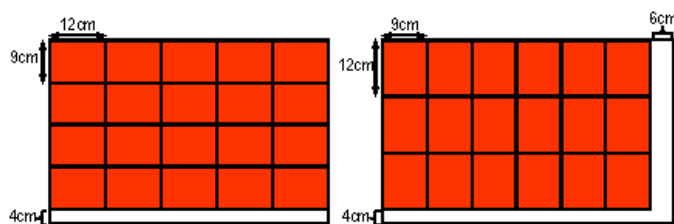
– Hoạt động 1. Xây dựng phương án cắt giấy trên giấy nháp (bao gồm hai hoạt động thành phần là xác định một phương án cắt và tiếp đó xác định phương án nào cho nhiều lá cờ hơn, cho nhiều lá cờ nhất);

– Hoạt động 2. Hoạt động cắt hình theo phương án đã lựa chọn.

Có thể xảy ra một số trường hợp như sau:

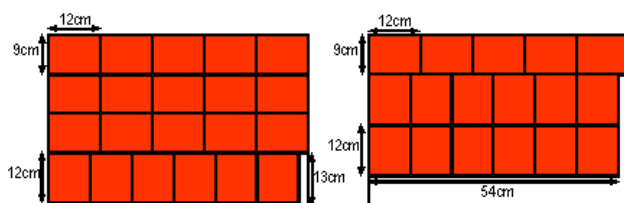
- Trường hợp 1. Học sinh cắt được 20 lá cờ;
- Trường hợp 2. Học sinh cắt được 18 lá cờ;
- Trường hợp 3. Học sinh cắt được 21 lá cờ;
- Trường hợp 4. Học sinh cắt được 17 lá cờ.

Trong đó, trường hợp 1, 2, 3, 4 tương ứng với các hình 1, hình 2, hình 3, hình 4 dưới đây.



Hình 1

Hình 2



Hình 3

Hình 4

Khi yêu cầu các nhóm học sinh đọc số lá cờ cắt được và cách làm, giáo viên có thể tổ chức cho học sinh tranh luận, hợp tác để nghĩ tới, tìm một phương án tối ưu (số hình lớn nhất). Đôi khi, phương án đó cũng có thể đặt vấn đề từ trường hợp 2, chỉ có 18 lá cờ.

Chú ý rằng, học sinh còn có thể có các phương án đề xuất khác nhau, nhưng phương án trình bày trong hình 3 là phương án tốt nhất (cắt được nhiều hình nhất). Vấn đề là cách tổ chức dạy học của giáo viên sao cho học sinh được tranh luận, phân tích để có cảm giác chưa hài lòng với hai phương án cắt ở hình 1, hình 2. Chẳng hạn, có thể so sánh tổng diện tích các hình chữ nhật nhỏ ở các phương án trên hình 1, hình 2 với diện tích của mảnh giấy như đề bài đã cho: Hiệu của số lớn trừ số bé là một số lớn hơn 108cm^2 , tức là lớn hơn diện tích một hình chữ nhật nhỏ! Có cơ hội nào để cắt tiết kiệm giấy hơn không?... Như vậy, có thể hướng dẫn cho học sinh xác định số lượng tối đa các miếng bìa có thể cắt được thông qua việc thực hiện phép chia diện tích mảnh giấy cho diện tích hình chữ nhật nhỏ. Cụ thể ta có phép chia có dư $(40 \times 64) : 108 = 22$ (dư 24) nên ta có thể cắt tối đa được 22 lá cờ. Cũng cần chú ý thêm rằng, có thể có được hình tối đa như vậy nhưng lại không cắt được số hình như tính toán. Tư tưởng toán học ở đây cần trang bị cho học sinh là tư tưởng tối ưu, vận dụng trong đời sống chính là sự tiết kiệm, suy nghĩ, hành động, làm việc một cách tiết kiệm.

Bài toán 2. Một ông chủ cửa hàng bán cà phê cần cắt thay toàn bộ kính cho các bàn cà phê trong quán. Quán của ông có 12 bàn cà phê hình tròn, mỗi bàn có đường kính 1,2m. Báo giá tốt nhất mà ông chủ nhận được từ một số công ty như sau:

Bảng 1. Báo giá kính làm bàn, vách ngăn của Công Ty TNHH Đầu tư Window Việt Nam

STT	Quy cách sản phẩm	Đơn vị tính	Đơn giá
1	Kính thường 10 ly (mm) Việt Nhật	m^2	380.000
2	Kính thường 12 ly (mm) Việt Nhật	m^2	490.000
3	Kính 8 ly (mm) temper trắng trong (kính cường lực) - Việt	m^2	580.000
4	Kính 10 ly (mm) temper trắng trong (kính cường lực) - Việt	m^2	650.000
5	Kính 12 ly (mm) temper trắng trong (kính cường lực) - Việt	m^2	680.000
6	Kính gián an toàn 10,38 ly (mm) trắng trong (làm vách kính)	m^2	650.000
7	Kính gián an toàn 12,38 ly (mm) trắng trong (làm vách kính)	m^2	720.000

(**Ghi chú:** Báo giá này đã bao gồm công cắt, vận chuyển trong nội thành Hà Nội và VAT)

a) Với tiêu chí tiết kiệm nhất, em sẽ tư vấn cho ông chủ cửa hàng cà phê chọn loại kính nào?

b) Với tiêu chí đã chọn, ông chủ cửa hàng cà phê phải trả bao nhiêu tiền?

Phân tích. Bài toán này (dành cho học sinh lớp 5) góp phần giúp giáo viên bồi dưỡng, phát triển cũng như đánh giá năng lực xử lý thông tin toán học, năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn, năng lực tư duy toán học và năng lực tính toán (viết theo thứ tự ưu tiên). Bài toán cho học sinh hai yêu cầu hoạt động. Để hoàn thành các yêu cầu này, từng nhóm học sinh phải thực hiện hai hoạt động thành phần là:

– Hoạt động 1. Chọn loại kính: Có thể chọn một trong hai phương án, ở dòng 2 và dòng 5 (kính 12mm), tuy vậy, nếu đọc kỹ đề bài, thì học sinh chỉ có thể chọn phương án ở dòng 5 (vì yêu cầu là kính cường lực);

- Hoạt động 2. Xác định chi phí của ông chủ quán cà phê.

Giáo viên có thể đánh giá năng lực của học sinh thông qua kết quả các hoạt động 1, 2. Với hoạt động 1, nếu học sinh không xác định đúng thì chứng tỏ không kiểm tra hết các yêu cầu công việc trong đề bài; Với hoạt động 2, học sinh phải xác định được diện tích của từng mặt bàn, từ đó xác định được tổng diện tích của 10 bàn và suy ra tổng chi phí phải trả để cắt kính. Ở hoạt động 2, có thể có nhiều học sinh sẽ mắc sai lầm. Sai lầm này chỉ có thể thấy được trong thực tế, như sau:

Diện tích một mặt bàn là:

$$3,14 \times 0,6 \times 0,6 = 1,1304\text{m}^2.$$

Diện tích 10 mặt bàn là:

$$10 \times 1,1304 = 11,304\text{m}^2.$$

Tổng số tiền (tổng chi chi phí) là (nếu chọn phương án ở dòng 5):

$$680\,000 \times 11,304 = 7\,686\,720 \text{ (đồng)}.$$

Tuy vậy, cần phải thấy được một thực tế là, người mua phải trả tiền cho cả phần diện tích kính cắt đi, không sử dụng được, thừa đi (phần trắng như trên hình 5). Do vậy, phải tính chi phí như sau:

Diện tích một mặt bàn là:

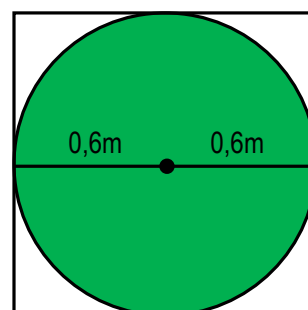
$$1,2 \times 1,2 = 1,44\text{m}^2.$$

Diện tích 10 mặt bàn là:

$$10 \times 1,44 = 14,4\text{m}^2.$$

Tổng số tiền (tổng chi chi phí) là (nếu chọn phương án ở dòng 5):

$$680\,000 \times 14,4 = 9\,792\,000 \text{ (đồng)}.$$

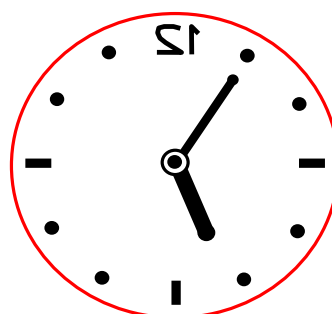


Hình 5

Đây là một bài toán thực tiễn, một vấn đề thực tiễn mà có thể trong cuộc sống học sinh, bố mẹ hay người thân của học sinh có thể gặp phải. Tư tưởng toán học trong bài toán này là tư tưởng tối ưu, vận dụng trong đời sống chính là sự tiết kiệm, suy nghĩ, hành động, làm việc một cách tiết kiệm. Đồng thời, cần nhắc học sinh lưu ý đến sự vận dụng kiến thức đã học phải phù hợp với thực tiễn, theo cách của thực tiễn chứ không chỉ trong suy nghĩ, không chỉ trong sách vở.

Bài toán 3. Có hai bố con đang ngồi chơi trước gương vào buổi tối. Để nhắc khéo người con trai của mình về thời gian biểu học tập đã xác lập, người bố chỉ vào ảnh của chiếc đồng hồ trong gương như dưới đây và hỏi: Đố con biết bây giờ là mấy giờ?

- Em có thể trả lời giúp bạn được không?
- Em hãy ra một số đề xác định giờ tương tự như trên.
- Có những cách làm nào để giải được bài toán của bạn trong câu chuyện và cả những bài toán mà em vừa đặt ra?

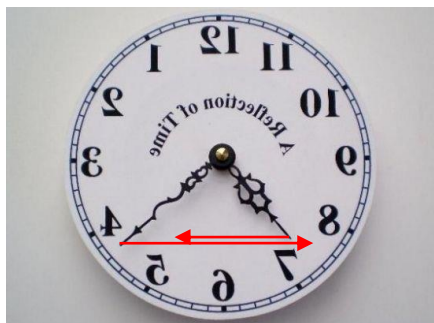
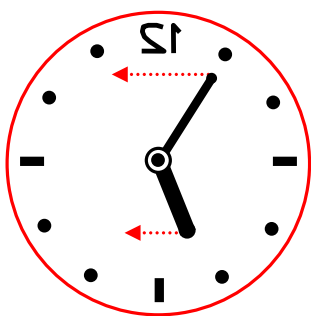


Hình 6

Phân tích. Bài toán này (dành cho học sinh lớp 3) góp phần giúp giáo viên bồi dưỡng, phát triển cũng như đánh giá năng lực xử lý thông tin toán học, năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn, năng lực tư duy toán học và năng lực tính toán và trí tưởng tượng không gian (viết theo thứ tự ưu tiên). Đây là bài toán với ý tưởng lấy trong tài liệu [2], để kiểm tra học sinh về khả năng xem giờ. Bài toán cho học sinh ba yêu cầu hoạt động. Để hoàn thành hoạt động này, từng nhóm học sinh phải thực hiện các hoạt động thành phần là:

- Hoạt động 1. Xem giờ thông qua gương;
- Hoạt động 2. Ra đề bài tập tương tự;
- Hoạt động 3. Xác định nguyên tắc, cách xem giờ nhanh trong gương.

Đối với bài toán này, có nhiều cách hướng dẫn học sinh thực hiện tìm lời giải. Chẳng hạn, có thể yêu cầu học sinh lấy đồng hồ điện tử để bàn có kim giờ, kim phút, đặt trước gương, quay các kim để nhìn trong gương giống với hình vẽ trên (hình 6); hoặc cũng có thể đặt đồng hồ trước gương rồi quay sao cho đồng hồ có hình dạng như trong hình 6 (trừ các con số là không ngược được) thì nhìn hình trong gương sẽ xác định được mấy giờ. Chúng tôi còn ghi nhận được một cách làm nữa của học sinh, ngoài dự kiến là các em dùng cách kẻ đối xứng như hình dưới đây (hình 7). Như vậy, ngoài việc dạy các em xem giờ, thì cũng cần giúp các em đưa ra nhận xét về tính đối xứng của các ảnh các đồ vật qua gương, chẳng hạn như tay phải thì sang bên trái, tay trái thì sang bên phải.



Hình 7.

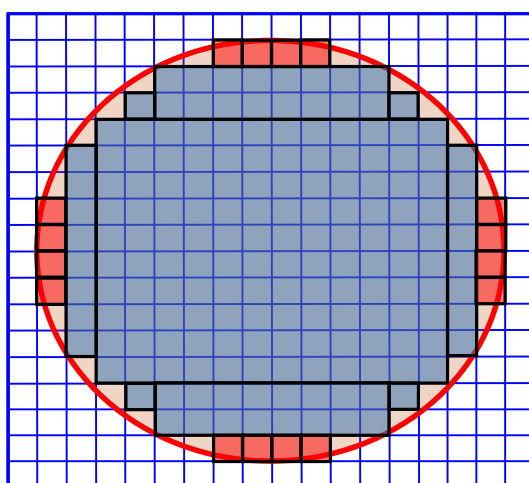
Bài toán 4. Tính gần đúng diện tích hình tròn. Giáo viên yêu cầu học sinh tính diện tích hình tròn, đã được vẽ sẵn kích thước như hình 8, mỗi ô vuông có cạnh là 1cm.

Phân tích: Mục tiêu dạy học bài toán này (dành cho học sinh lớp 5) là giúp học sinh ước lượng để tính gần đúng diện tích hình tròn. Tư tưởng phân hoạch trong cách tính diện tích, hiểu một cách đơn giản, là chia một hình ra thành các hình nhỏ đã biết cách tính, tính được diện tích; cộng diện tích các hình nhỏ lại thì được diện tích hình ban đầu (sau này học sinh có thể gặp trong khi học về tích phân, tính diện tích các hình thang cong, ...). Một tư tưởng nữa cần trang bị cho học sinh là khả năng tính gần đúng, ước lượng (nhiều khi rất quan trọng) chứ không phải là yêu cầu tính chính xác (lưu ý rằng, 3,14 cũng là một số gần đúng của số pi). Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh chỉ tính diện tích của một phần tư hình tròn, sau đó nhân với 4 thì được diện tích hình tròn.

Ở đây, học sinh có thể làm theo hai cách:

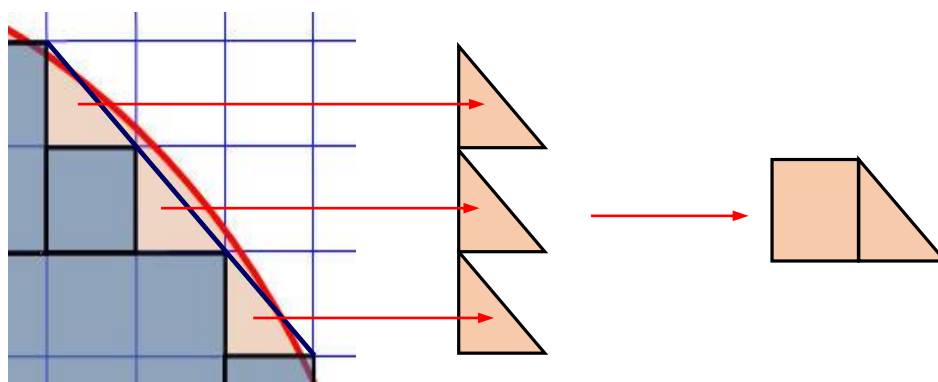
- *Cách 1*: Đếm số ô vuông trong hình tròn, còn các ô không nằm trọn vẹn trong hình tròn thì ước lượng (gần đúng-khi đó có thể cần đến sự hướng dẫn của giáo viên);
- *Cách 2*: Đếm số ô vuông của hình vuông ngoài hình tròn, lấy diện tích của hình vuông lớn trừ đi phần đó (cũng làm bằng cách ước lượng, gần đúng).

Giáo viên có thể hướng dẫn cho học sinh tính diện tích hình tròn với kích thước lớn hơn, nhưng vẫn chia thành các hình vuông có diện tích bằng 1cm^2 (thì sai số sẽ nhỏ hơn). Từ đó, tính tỉ lệ giữa diện tích hình tròn với diện tích hình vuông ngoại tiếp nó, thì sẽ ra được một tỉ lệ khoảng từ 0,72 đến 0,90 (trong khi đó $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} \approx 0,785$).



Hình 8

Nếu tính theo cách 1, học sinh có thể tính như sau: tính tổng các ô vuông nằm trọn trong hình tròn; ước lượng tính các ô vuông không nằm trọn trong đường tròn về thành số các ô vuông nào đó; cộng tổng số các ô vuông lại thì suy ra gần đúng diện tích hình tròn.



Hình 9. Cách ước lượng, tính gần đúng diện tích

Như vậy, bằng cách vẽ, học sinh sẽ ước chừng diện tích của hình tròn khoảng bằng $12 \times 10 + 2 \times (8 \times 2) + 2 \times (8 \times 1) + 4 + 4 \times (4 \times 1) + 6 = 186 (\text{cm}^2)$.

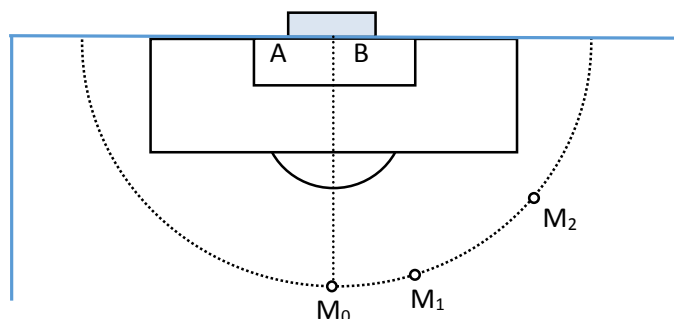
Khi đó, tỉ lệ diện tích hình tròn chia cho diện tích hình vuông ngoại tiếp hình tròn (có cạnh bằng đường kính) bằng 0,726.

Dưới đây là hai bài toán thực tiễn có thể đưa vào dạy học cho học sinh lớp 10 ở trường trung học phổ thông, sau khi đã học về hàm số.

Bài toán 5. Chúng ta cùng nghiên cứu một tình huống xảy ra trong bóng đá - Tình huống thực hiện quả đá phạt trực tiếp: Giả sử rằng, các vị trí đặt bóng M_0 , M_1 , M_2 (hình 10) và thủ môn chỉ chạy trên vạch biên dọc, trên đoạn AB.

a) Theo em, thủ môn nên chọn vị trí như thế nào để không mắc lỗi vị trí? Giải thích?

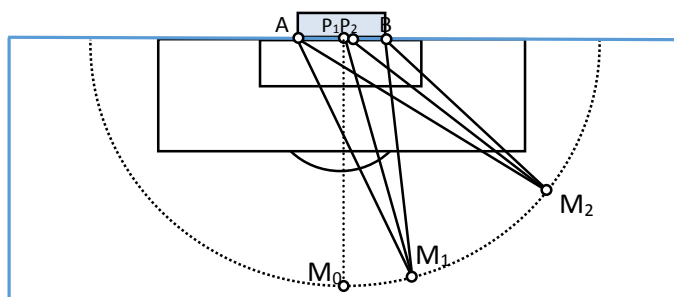
b) Em hãy xem video (<https://www.youtube.com/watch?v=k62C8NNKnOM>) và cho biết thủ môn nào mắc lỗi vị trí, thủ môn nào không mắc lỗi vị trí? Hãy đối chiếu video với kết quả tính toán và cho nhận xét.



Hình 10

Phân tích. HS cần sử dụng các kiến thức hình học (góc, phân giác, ...), những kiến thức về môn bóng đá (góc sút, tốc độ đi bóng, khả năng cản phá, khép góc, ...). Theo lý thuyết thì:

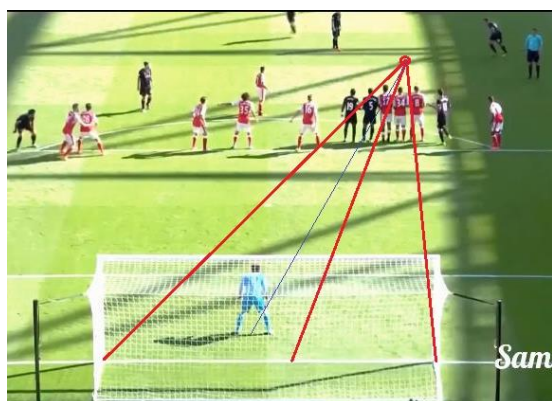
- Nếu điểm đặt bóng sút phạt ở vị trí M_0 , thì thủ môn nên đứng ở giữa cầu môn.
- Nếu điểm đặt bóng sút phạt ở vị trí M_1 (hoặc M_2) thì thủ môn cần đứng ở vị trí P_1 (hoặc P_2) để không mắc lỗi vị trí (khả năng chặn bóng ở hai góc sút là như nhau nếu thủ môn đứng ở chân đường phân giác); ở đó, P_1 (hoặc P_2) là chân đường phân giác của góc AM_1B (hoặc góc AM_2B) trên cạnh AB. Trên hình 11, ta thấy $l_1 > l_2$ nên $t_1 > t_2$ (với t_1 , t_2 là thời gian bóng bay từ vị trí đá phạt tới khung thành, trong điều kiện lực sút bóng là như nhau).



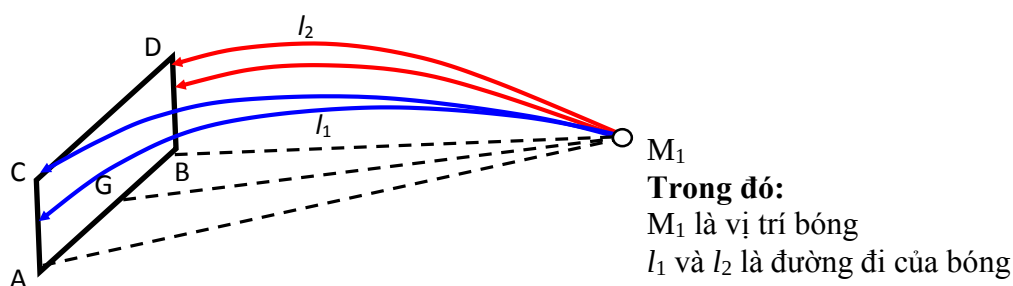
Hình 11

Khi phân tích video, thực tế là: khi bắt bóng, thủ môn thường đứng lệch về bên phải hướng sút bóng, mà không đứng đúng vị trí chân đường phân giác như tính toán.

Như vậy, học sinh cần có những giải thích phù hợp, trên cơ sở hiểu biết, tìm hiểu về bóng đá hơn nữa và cả những phân tích toán học.

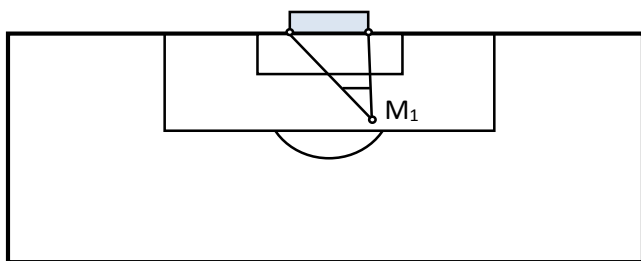


Hình 12

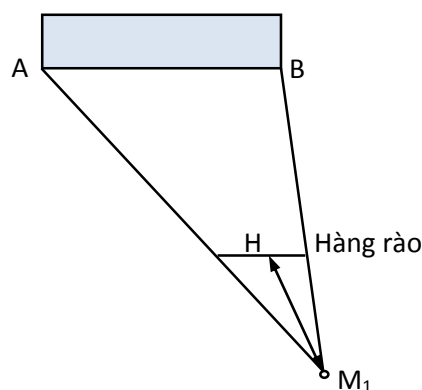


Hình 13

Bài toán 6. Tiếp tục xem xét một tình huống đá phạt trong bài toán 5. Thông thường, vị trí đá phạt là M_1 , thì hàng rào sẽ chắn như hình 14a, 14b. Một số thông tin ban đầu như sau: Khoảng cách giữa điểm đặt bóng và hàng rào là 9,15m; chiều cao khung gỗ là 2,44m, chiều ngang khung gỗ là 7,21m, chiều cao lớn nhất của các cầu thủ ở hàng rào là 1,8m, khả năng nhảy lên chắn bóng cao nhất là 0,4m, khoảng cách từ điểm đặt bóng đến điểm B là 23m. Giả sử, cầu thủ sút phạt vào góc B, bóng vượt trên hàng rào. Em hãy tính xem góc mà bóng tạo với mặt đất khi rời khỏi mặt đất tại lúc sút bóng bằng khoảng bao nhiêu độ? Học sinh được sử dụng phần mềm, máy tính bỏ túi.



Hình 14a

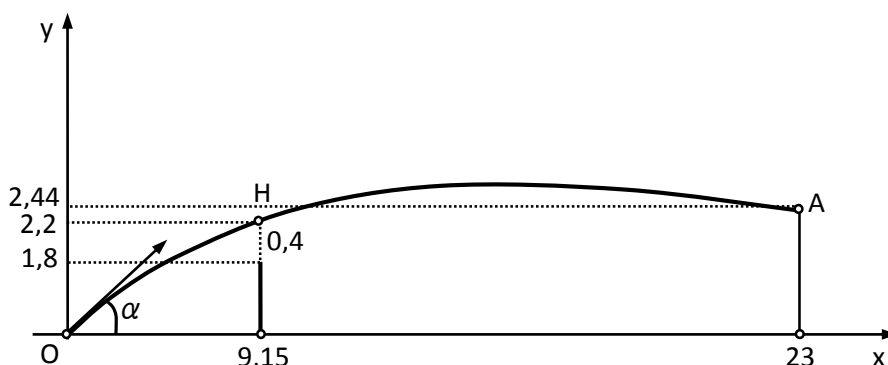


Hình 14b

Phân tích. Bài toán này giúp giáo viên phát triển hay đánh giá năng lực mô hình hóa của học sinh. Khi tổ chức cho học sinh hoạt động nhóm để giải bài toán, cần hướng dẫn họ tập trung vào việc giải quyết vấn đề, sử dụng các công cụ phần mềm, ứng dụng

miễn phí trên mạng internet để hỗ trợ tìm kết quả, không dành quá nhiều thời gian vào việc giải các phương trình, hệ phương trình, ...

Giả sử có thể mô tả đường đi của quả bóng từ điểm đặt bóng đến góc khung thành như hình dưới đây:



Hình 15

Giáo viên cần hướng dẫn học sinh thực hiện một số nhiệm vụ: Lập phương trình đường cong; Tính góc của bóng với mặt đất; ...; thử vẽ đồ thị sau khi có phương trình (trên phần mềm); ... Qua hình mô tả giáo viên có thể hướng cho học sinh nhận diện được đường cong của chuyển động bóng giống như một parabol. Từ đó học sinh có hướng đi để xây dựng, tìm phương trình đó.

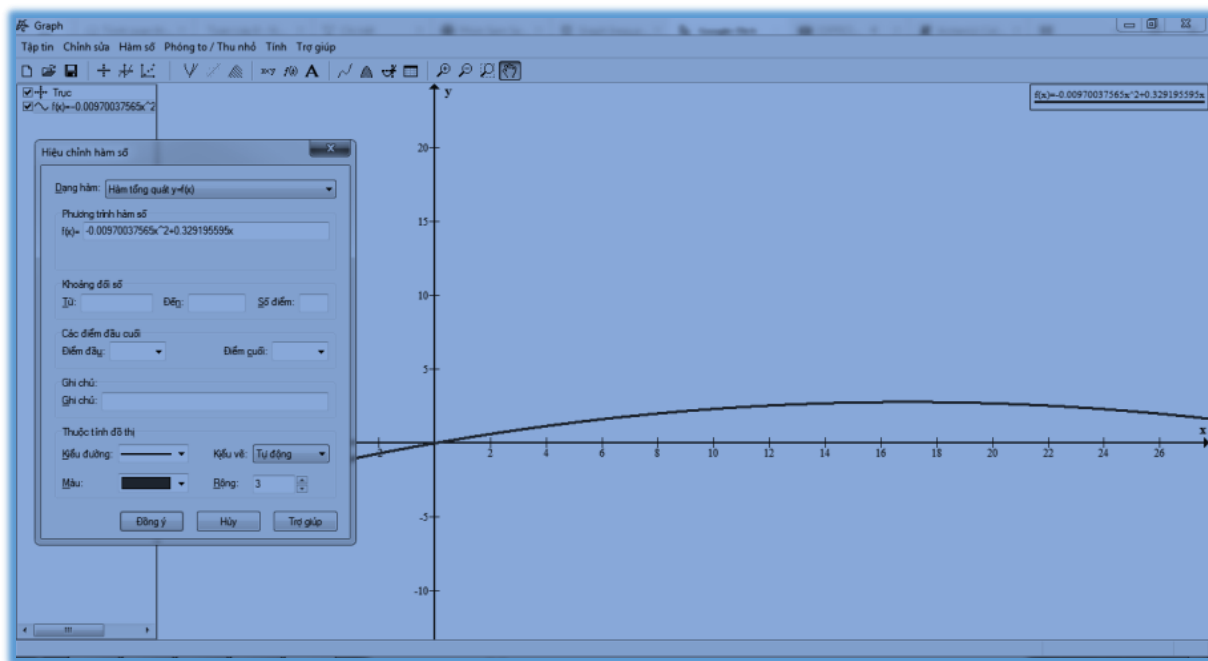
Hàm số biểu diễn parabol là hàm bậc hai: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Trên đường biểu diễn chuyển động cong của quả bóng ta cơ bản xác định được 3 điểm: $O(0; 0)$; $H(9,15; 2,2)$; $A(23; 2,44)$. Như vậy ta có $c = 0$ và lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (9,15)^2 a + 9,15b = 2,2 \\ 23^2 a + 23b = 2,44 \end{cases} \quad \text{Thực hiện giải phương trình bằng phần mềm Quickmath}$$

(online, miễn phí) ta tìm được hai hệ số a, b của hàm $f(x)$:

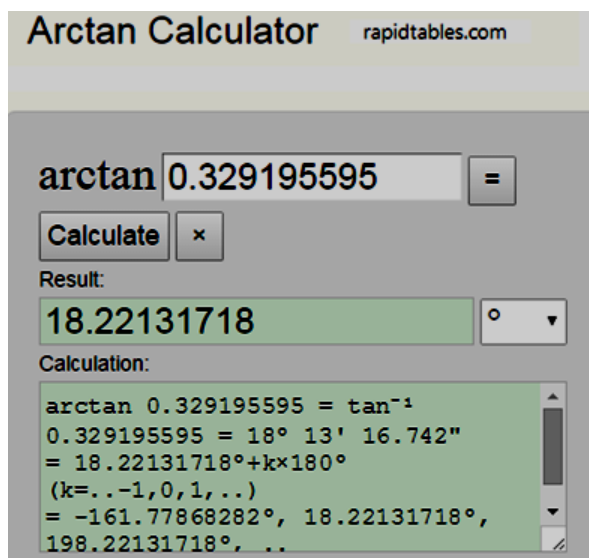
Hình 16

Vậy hàm số ta cần tìm là: $y = f(x) = -0,00970037565x^2 + 0,329195595x$. Đường cong mô tả chuyển động của quả bóng (vẽ bằng phần mềm Graph):



Hình 17

Suy ra, góc của quả bóng với mặt đất là $\alpha = \arctan(0,329195595)$. Sử dụng phần mềm online (Arctan Calculator) ta suy ra góc sút quả bóng là hơn 18^0 như dưới đây:



Hình 18

Với cách tổ chức dạy học thông qua các ví dụ, trình tự như trên, học sinh sẽ được thực hiện các hoạt động tương ứng với hoạt động tư duy hàm: phát hiện sự tương ứng; xác lập sự tương ứng (thông qua các biểu thức dạng hàm số bậc nhất hay bậc hai); lợi dụng sự tương ứng (sử dụng các kiến thức về hàm số để giải bài toán rồi vận dụng trong thực tiễn).

3. Kết luận và bàn luận

Nghiên cứu này sẽ góp phần bước đầu vào việc xem xét để điều chỉnh một số nội dung thuộc chương trình, nội dung dạy học môn Toán ở trường phổ thông. Đồng thời,

ngiên cứu cũng góp phần làm rõ mức độ và cách thức dạy học môn Toán theo hướng gắn với thực tiễn một cách phù hợp, tránh việc tuyệt đối hóa việc dạy học giải toán với những thao tác tư duy quá phức tạp, không dành cho đại bộ phận học sinh cũng như tránh tuyệt đối hóa như quan niệm cho rằng việc dạy học toán là bắt buộc phải bằng thực tiễn, qua thực tiễn. Hơn nữa cần biến quá trình dạy học môn Toán thành quá trình dạy học việc giải quyết vấn đề có liên quan đến toán, rèn luyện lối tư duy logic, khoa học, ...

Những trình bày, ví dụ ở trên cũng là những đề xuất cần lưu ý và bàn luận cho việc thiết kế, xây dựng và ban hành chương trình giáo dục môn Toán trong nhà trường phổ thông, trong bối cảnh hội nhập quốc tế, sự phát triển và ứng dụng mạnh mẽ của công nghệ thông tin và truyền thông và đặc biệt là bối cảnh xác định mục tiêu giáo dục là phát triển toàn diện năng lực người học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Center for the Study of Mathematics Curriculum (2004). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics - Commission on Standards for School Mathematics.
2. Carl B. Boyer (1968). *A history of Mathematics*. Wiley International Edition.
3. Terry Chew (2015). *Đánh thức tài năng toán học (Unleash The Maths Olympian in you!)*, 01 (7-8 tuổi). Người dịch: Bùi Thu Hà. Nxb Thế giới.
4. Nguyễn Thị Phương Hoa (Chủ biên) - Vũ Hải Hà (Đồng chủ biên) - Nguyễn Thị Thu Hà - Trần Hoàng Anh - Vũ Thị Kim Chi - Vũ Bảo Châu (2014). *PISA và những vấn đề giáo dục Việt Nam, tập 1 – Những vấn đề chung về PISA*. NXB Đại học Sư phạm.
5. Nguyễn Danh Nam (2015). *Năng lực mô hình hóa toán học của học sinh phổ thông*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 60(8), tr. 44-52.
6. Bui Van Nghi (2010), *Connecting mathematics with real life*, Journal of Science, Hanoi National University of Education, No.1.
7. Phan Văn Lý (2013). *Tăng cường các bài toán có nội dung thực tiễn trong dạy học phép tính vi phân, tích phân hàm nhiều biến số ở trường cao đẳng sư phạm*. Tạp chí Khoa học, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Vol. 58, tr. 147 - 153.
8. Richard Lesh, Peter Galbraith, Christopher Haines, Andrew Hurford, *Modeling students' mathematical modeling competences*, Springer. 2010.
9. Nguyễn Tiến Trung (2015). *Bồi dưỡng và phát triển năng lực toán học cho học sinh tiểu học*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Vol. 60, No. 8A, tr. 35-43.
10. Nguyễn Tiến Trung (2016). *Thiết kế chuyên đề dạy học – hoạt động phát triển chương trình nhà trường của giáo viên góp phần thực hiện mục tiêu dạy học phát triển năng lực học sinh*. Tạp chí Khoa học, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, số 128 (tháng 5/2016), tr. 14-17.

11. Nguyễn Tiến Trung, Đỗ Thị Trinh (2017). *Dạy học môn Toán trong nhà trường phổ thông theo hướng gắn với thực tiễn*. Tạp chí Giáo dục, số 404, kì 2 tháng 4/2017, tr. 40-42; 53.

12. Dương Quốc Việt (2013). *Những tư tưởng cơ bản ẩn chứa trong toán học phổ thông*. NXB Giáo dục Việt Nam.

13. Trần Vui (2014). *Giải quyết vấn đề thực tế trong dạy học Toán*. NXB Đại học Huế.

14. Trần Vui (2017). *Từ các lí thuyết học đến thực hành trong giáo dục*. NXB Đại học Huế.

KỸ NĂNG ĐẶT CÂU HỎI CHO HỌC SINH TIỂU HỌC

Phạm Sỹ Nam, Phạm Thị Thanh Tú***

Tóm tắt

Kỹ năng đặt câu hỏi là một trong những kỹ năng rất quan trọng trong quá trình dạy học. Bởi, đây là điều kiện tiên quyết để giúp HS phát triển tư duy, nhận ra bản chất vấn đề và giải quyết được bài toán, thông qua đó, hình thành cho HS kỹ năng giải quyết được vấn đề. Sự thành công hay thất bại của một tiết dạy phụ thuộc vào hệ thống câu hỏi mà giáo viên sử dụng. Hệ thống câu hỏi hợp lý sẽ giúp học sinh trải nghiệm, tìm tòi, khám phá tri thức. Tuy nhiên thực tiễn cho thấy giáo viên còn có hạn chế trong việc đặt câu hỏi. Bài viết phân tích một số khó khăn và hạn chế trong việc đặt câu hỏi cho học sinh tiểu học và đề xuất các kỹ năng cần thiết trong việc đặt câu hỏi.

Từ khóa: Kỹ năng, câu hỏi, giải quyết vấn đề.

Abstract

Asking questions is one of the important skills in the teaching process. Because this is a prerequisite condition to help students develop thinking, recognize the nature of a problem and solve the problem, through it, forming the skills to solve problems. The success or failure of a lesson depends on the system of questions that teachers use. A system of good questions will help students to experience, explore and discover knowledge. However, students have many difficulties and limitations to ask questions. The article points to difficulties experienced by students in asking questions and proposes some necessary skills to ask questions.

Keywords: Skills, questions, solve problems.

1. Mở đầu

Kỹ năng đặt câu hỏi là một trong những kỹ năng rất quan trọng trong quá trình dạy học. Thông qua hệ thống câu hỏi, giúp học sinh nhận ra bản chất vấn đề và giải quyết được bài toán và hình thành cho học sinh kỹ năng giải quyết vấn đề. Sự thành công hay thất bại của một tiết dạy phụ thuộc vào hệ thống câu hỏi mà giáo viên sử dụng. Hệ thống câu hỏi hợp lý sẽ giúp học sinh trải nghiệm, tìm tòi, khám phá tri thức.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số khó khăn và hạn chế trong việc đặt câu hỏi của sinh viên khoa Giáo dục tiểu học

Qua khảo sát thực tế, chúng tôi nhận thấy việc đặt câu hỏi từ phía sinh viên khoa Giáo dục tiểu học vẫn còn nhiều hạn chế. Chẳng hạn:

- Câu hỏi chưa phù hợp với trình độ học sinh: Chưa thực sự thúc đẩy quá trình suy nghĩ của học sinh.
- Các câu hỏi mở, tạo cơ hội để HS suy nghĩ, sáng tạo chưa được chú trọng nhiều.
- Câu hỏi áp đặt cách giải quyết vấn đề của giáo viên, hạn chế việc tìm các định hướng khác nhau để giải quyết vấn đề của học sinh.

* TS, Đại học Sài Gòn

** TS, Đại học Sài Gòn

– Chưa chú trọng việc đặt câu hỏi nhằm yêu cầu học sinh tìm kiếm sự kết nối thông tin và tìm các hình thức biểu diễn khác nhau của kiến thức toán để giải quyết vấn đề.

– Ngôn ngữ sử dụng trong câu hỏi chưa phù hợp với đối tượng học sinh tiểu học. Trong bài viết này, chúng tôi tập trung vào trả lời các câu hỏi sau đây:

Câu hỏi 1: Chức năng của câu hỏi trong quá trình dạy học là gì?

Câu hỏi 2: Những kỹ năng nào là cần thiết trong việc đặt câu hỏi?

Câu hỏi 3: Vận dụng các kỹ năng như thế nào để xây dựng hệ thống câu hỏi nhằm tạo cơ hội cho học sinh giải quyết được vấn đề?

2.2. Một số vấn đề về đặt câu hỏi trong dạy học

2.2.1. Chức năng của câu hỏi trong quá trình dạy học

Đặt câu hỏi là trung tâm của phương pháp dạy học đề cao tính tích cực của học sinh. Điều quan trọng là phải thiết kế, lựa chọn được loại câu hỏi thích hợp để kích thích tư duy của học sinh và thu hút họ vào các cuộc thảo luận hiệu quả. Trong dạy học đặt câu hỏi được thực hiện thông qua việc đặt ra những câu hỏi thăm dò và thách thức nhắm đến các kỹ năng tư duy bậc cao như phân tích, tổng hợp và đánh giá. Đưa ra các câu hỏi có tính thách thức có thể kích thích học sinh khám phá các ý tưởng và ứng dụng kiến thức mới vào nhiều tình huống khác.

Câu hỏi được xem như là một khía cạnh quan trọng của việc dạy và học, điều đó được khẳng định qua nhiều phát biểu đề cao vai trò của câu hỏi trong việc dạy học (dẫn theo [2, tr.3]).

- Câu hỏi có thể phát triển tư duy bậc cao (Sanders, 1996; Ruddell, 1974).
- Câu hỏi có thể cải thiện việc học từ ngữ cảnh (Rothkopf và Bisbico, 1967; Weaver, 1978).
- Câu hỏi có thể giúp xác minh quá trình học tập (Hyman, 1979; Weaver, 1978).
- Câu hỏi có thể giúp thúc đẩy học sinh (Hunkins, 1972; Aschner, 1961).
- Câu hỏi có thể trợ giúp trong kế hoạch bài học (Hill, 1979; Hukins, 1972).

2.2.2. Quan điểm thuyết kiến tạo

Lý thuyết kiến tạo đã trở nên nổi trội và trở thành một lý thuyết có ưu thế về việc học trong cộng đồng nghiên cứu giáo dục toán ngay từ khi nó bùng nổ ở hội nghị Tâm lý học của Giáo dục Toán ở Montreal, Canada, năm 1987 [4, tr.31]. Theo quan điểm kiến tạo, vai trò, nhiệm vụ của học sinh và giáo viên được xác định và chỉ rõ:

– Điều quan trọng trong dạy học là chọn được nhiệm vụ phù hợp với học sinh. Các nhiệm vụ được thiết kế để khuyến khích sự suy nghĩ tích cực của học sinh và tạo cơ hội để họ kết nối kiến thức với kinh nghiệm đã có [3, tr.97].

– Học sinh được khuyến khích để hoạt động trong tiến trình học tập. Vì thế trong dạy học kiến tạo, giáo viên phải tạo điều kiện cho học sinh chia sẻ những niềm tin và quan điểm của mình thông qua những câu hỏi như: Cái gì? Bằng cách nào? Tại sao?

- Giáo viên đóng vai trò như là người cố vấn, dàn xếp, nhắc nhở và giúp học sinh phát triển và đánh giá những hiểu biết và việc học.
- Một trong những công việc lớn nhất của giáo viên là hỏi những câu hỏi tốt.

2.2.3. Câu hỏi kết thúc mở

Theo Trần Vui [4, tr.146]: “Câu hỏi kết thúc mở” là câu hỏi:

- HS được cho một tình huống và được yêu cầu thể hiện bài làm của mình.
- Có thể sắp xếp từ mức độ đơn giản yêu cầu HS chứng tỏ một công việc, hoặc yêu cầu thêm giả thuyết rõ ràng vào một tình huống phức tạp, hoặc giải thích các tình huống toán học, viết ra phương hướng, tạo ra các bài toán mới liên quan, tổng quát hóa.
- Câu hỏi có kết thúc mở thường có cấu trúc thiếu như thiếu dữ liệu hoặc giả thiết và không có thuật giải cố định.

Vai trò của việc sử dụng câu hỏi kết thúc mở được xác định là:

- HS tham gia tích cực hơn trong các bài học và thể hiện ý tưởng của họ thường xuyên hơn;
- HS có nhiều cơ hội hơn để sử dụng đầy đủ các kiến thức toán học và kỹ năng của họ;
- Mỗi HS có thể trả lời cho vấn đề này theo một số cách có ý nghĩa riêng của mình.

2.3. Các kỹ năng cần thiết trong việc đặt câu hỏi

2.3.1. Các năng lực Toán học cần hình thành ở học sinh tiểu học

Có nhiều cách liệt kê các năng lực được hình thành và phát triển trong quá trình học tập toán, tùy theo góc nhìn xuất phát khác nhau mà người ta có những cách liệt kê khác nhau. Trần Kiều [1, tr.9] đã chỉ ra một số năng lực chủ yếu cần hình thành và phát triển cho học sinh phổ thông nước ta khi học toán trong mối quan hệ chặt chẽ với những năng lực chung và phản ánh đặc thù của môn Toán: năng lực tư duy và suy luận toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng các công cụ, phương tiện học toán; năng lực tự học toán.

Căn cứ vào những năng lực chung của học sinh phổ thông, đặc thù của môn Toán ở tiểu học, đặc điểm của học sinh tiểu học, chúng tôi tập trung vào các năng lực Toán học cần hình thành ở học sinh tiểu học đó là:

a) Năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề toán học. Những thể hiện của năng lực này là:

- Nhận biết tình huống có vấn đề;
- Xác định cách thức giải quyết vấn đề;
- Thực hiện và trình bày giải pháp cho vấn đề;
- Kiểm tra giải pháp đã thực hiện.

b) Năng lực tư duy và suy luận toán học. Những thể hiện của năng lực này là:

- Thực hiện được các thao tác tư duy (ở mức độ đơn giản), đặc biệt biết quan sát, tìm kiếm sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống quen thuộc và biết khẳng định kết quả của việc quan sát;

- Bước đầu biết chỉ ra chứng cứ và lập luận có cơ sở, có lí lẽ trước khi kết luận.

c) Năng lực giao tiếp toán học. Những thể hiện của năng lực này là:

- Biết sử dụng thành thạo ngôn ngữ toán học và ngôn ngữ thông thường để biểu đạt cũng như thể hiện chứng cứ, cách thức và kết quả lập luận.

- Biết làm việc thành thạo với văn bản toán học (phân tích, lựa chọn, trích xuất các thông tin cần thiết).

- Thể hiện một cách chính xác và hiệu quả suy nghĩ, lập luận, chứng minh các khẳng định Toán học bằng ngôn ngữ thông thường hoặc ngôn ngữ toán học.

- Có vốn từ vựng toán học phong phú cũng như sự linh hoạt trong biểu đạt toán học.

d) Năng lực mô hình hoá toán học. Những thể hiện của năng lực này là:

- Mô tả các tình huống thực tế đơn giản dưới dạng các phép toán và công thức số học đơn giản;

- Giải quyết được các bài toán liên quan tới các tình huống thực tế đơn giản trong đời sống hàng ngày.

e) Năng lực sử dụng công cụ và phương tiện toán học. Những thể hiện của năng lực này là:

- Biết tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng, cách thức bảo quản các công cụ, phương tiện học toán đơn giản như: que tính, thẻ số, thước, com pa, êke, các mô hình hình học phẳng và không gian thông dụng...

- Sử dụng các công cụ và phương tiện học toán nói trên trong những nhiệm vụ học tập toán đơn giản.

- Làm quen với máy tính bỏ túi, phương tiện công nghệ thông tin hỗ trợ học tập.

2.3.2. Các kỹ năng đặt câu hỏi

Trên cơ sở các năng lực Toán học, chúng tôi chú trọng vào các kỹ năng cần thiết trong việc đặt câu hỏi.

2.3.2.1. Kỹ năng giải quyết vấn đề

Kỹ năng giải quyết vấn đề là một kỹ năng quan trọng cần được rèn luyện trong quá trình dạy học toán. Để rèn kỹ năng này, trong quá trình dạy học giáo viên có thể đặt câu hỏi để hướng tới việc:

- Xây dựng kiến thức toán học mới thông qua việc giải quyết vấn đề.

- Giải quyết các vấn đề phát sinh trong toán học và trong các ngữ cảnh khác.

- Áp dụng và điều chỉnh một loạt các chiến lược thích hợp để giải quyết vấn đề.

2.3.2.2. *Kĩ năng Suy luận*

Đối với học sinh tiểu học, việc sử dụng ngôn ngữ nói và kí hiệu để diễn đạt các suy luận toán học một cách chặt chẽ là một việc khó. Vì thế trong quá trình dạy học, ngoài việc giúp học sinh phát hiện kiến thức giáo viên cần chú trọng ở khâu rèn luyện khả năng lập luận, diễn đạt cho học sinh.

Để rèn luyện kĩ năng này, trong quá trình dạy học, giáo viên có thể đưa ra các yêu cầu, đặt các câu hỏi để học sinh thực hiện nhiệm vụ:

- Thực hiện và khảo sát các giả thuyết toán học.
- Phát triển và đánh giá các lập luận toán học.
- Lựa chọn và sử dụng các loại suy luận khác nhau.

2.3.2.3. *Tạo các kết nối*

Để rèn luyện kĩ năng tạo ra các kết nối trong dữ kiện, điều kiện và yêu cầu của tình huống dạy học, khi tổ chức dạy học, giáo viên cần đặt ra các câu hỏi giúp học sinh:

- Nhận ra và sử dụng các kết nối giữa các khái niệm toán học.
- Hiểu cách các ý tưởng toán học kết nối và xây dựng lẫn nhau.
- Nhận biết và áp dụng toán học trong ngữ cảnh bên ngoài toán học.

2.3.2.4. *Các biểu diễn Toán học khác nhau*

Việc rèn luyện kĩ năng biểu diễn toán học rất cần thiết đối với việc học tập và ứng dụng trong đời sống. Đây là một kĩ năng cần thiết nhưng trong thực tế dạy học ở tiểu học cho thấy giáo viên chưa chú trọng vào việc rèn luyện kĩ năng này cho học sinh. Để rèn luyện kĩ năng này cho học sinh, giáo viên có thể đặt các câu hỏi để thông qua đó yêu cầu học sinh:

- Tạo và sử dụng các biểu diễn để tổ chức, ghi lại, và biểu đạt các khái niệm toán học.
- Lựa chọn, áp dụng và chuyển đổi giữa các biểu diễn toán học để giải quyết các vấn đề.
- Sử dụng các biểu diễn để mô hình và giải thích hiện tượng vật lý, xã hội và toán học.

2.3.3. *Vận dụng các kỹ năng đặt câu hỏi để xây dựng hệ thống câu hỏi nhằm tạo cơ hội cho học sinh giải quyết vấn đề*

Trong việc xây dựng câu hỏi, chúng tôi chú trọng đến cấu trúc hệ thống câu hỏi. Hệ thống câu hỏi bao gồm:

- Câu hỏi lớn: Nhằm mục đích giúp HS xác định được vấn đề cần giải quyết. Việc đưa ra câu hỏi lớn còn có tác dụng giúp cho những HS giỏi không bị áp đặt theo những câu hỏi mang tính gợi ý của giáo viên.
- Các câu hỏi gợi ý: Các câu hỏi này nhằm mục đích phân bậc hoạt động, hệ thống câu hỏi cũng chính là tiến trình tạo cơ hội cho HS suy nghĩ theo từng bước để giải quyết vấn đề đặt ra.

Sau đây chúng tôi đưa ra một số ví dụ nhằm minh họa cho những kỹ năng mà đã được nêu ở trên.

2.3.3.1. Giải quyết vấn đề

Trong việc giải quyết vấn đề, những kỹ năng cần được thực hiện đó là: Làm rõ yêu cầu của vấn đề; Xác định thông tin quan trọng; Kết nối được thông tin để từ đó tìm kiếm chiến lược giải quyết vấn đề.

Ví dụ 1: Bạn An lên kế hoạch đi xe đạp hàng tuần theo một quy luật. Tuần đầu tiên của tháng, bạn đi 5 km, tuần thứ hai bạn đi 7,5 km, tuần thứ ba bạn đi 10 km. Nếu bạn An đi theo quy luật đó thì tuần thứ tư bạn An cần đi bao nhiêu ki-lô-met?

Nhận xét: Để giải quyết bài toán này học sinh tiểu học thường gặp những khó khăn sau:

– Khó khăn 1: Học sinh không biết lược bỏ những dữ kiện không cần thiết để thuận lợi hơn trong việc xác lập mối quan hệ và rút ra quy luật.

– Khó khăn 2: Học sinh không biết so sánh các số liệu đã cho của bài toán trong mối liên hệ phụ thuộc.

Để giúp học sinh có chiến lược giải quyết vấn đề, giáo viên có thể đặt ra hệ thống câu hỏi để học sinh giải đáp theo trình tự các bước:

Bước 1. Hiểu câu hỏi?

Bài toán yêu cầu tìm cái gì? (Tuần thứ tư bạn An cần đạp bao nhiêu ki-lô-met?).

Bước 2. Xác định thông tin quan trọng (để giúp học sinh vượt qua khó khăn 1).

Những giả thiết quan trọng của bài toán là gì? (Tuần thứ nhất: 5 km, tuần thứ 2: 7,5 km, tuần thứ 3: 10 km; các số đó tuân theo một quy luật).

Bước 3. Xác định chiến lược giải quyết vấn đề (để giúp học sinh vượt qua khó khăn 2).

H: Để xác định được quãng đường mà bạn An đi trong tuần thứ tư thì cần xác định điều gì? (cần tìm ra quy luật, xác định số hạng thứ tư).

H: Làm thế nào để xác định được quy luật?

Một số câu hỏi với mục đích gợi ý để HS xác định được quy luật:

– Định hướng gợi ý 1: Tuần thứ hai bạn An đi hơn tuần thứ nhất bao nhiêu km? Tuần thứ 3 bạn An đi được hơn tuần thứ hai bao nhiêu km?

– Định hướng gợi ý 2: Vẽ sơ đồ đoạn thẳng biểu thị số km đi được theo từng tuần.

Bước 4. Kiểm tra kết quả.

2.3.3.2. Suy luận

Ví dụ 2: Cho hai dãy số cách đều:

2, 7, 12, 17, 22, ...

3, 10, 17, 24, 31, ...

Số 17 xuất hiện ở cả hai dãy số. Nếu viết tiếp các số trong hai dãy, số tiếp theo sẽ xuất hiện trong cùng cả hai dãy là số mấy?

Nhận xét: Để giải quyết bài toán trên, học sinh thường gặp một số khó khăn sau:

- Khó khăn 1: Không tìm được quy luật của cả hai dãy số;
- Khó khăn 2: Khi tìm được quy luật của hai dãy số, học sinh có thể tìm ra kết quả của bài toán bằng cách liệt kê tiếp các số trong dãy cho đến khi tìm được số tiếp theo cùng xuất hiện ở hai dãy thì thôi. Với cách này, trong một số trường hợp học sinh phải tìm khá lâu và gây nhầm lẫn với học sinh khá, giỏi.
- Khó khăn 3: Nếu học sinh không thích cách làm cơ học trên mà học sinh thích làm bằng cách đọc đáo, khái quát hơn thì học sinh thường gặp khó khăn khi phân tích, suy luận để tìm ra mối liên hệ của số cần tìm với quy luật của hai dãy số đã cho.

Để giúp học sinh có thể vượt qua những khó khăn trên, giáo viên có thể đưa ra hệ thống các câu hỏi định hướng cho học sinh như sau:

H: Em hãy viết tiếp các số hạng của hai dãy số trên? (Định hướng học sinh theo kiểu trực quan).

Câu hỏi gợi ý: tập trung vào thông tin quan trọng, giúp học sinh vượt qua khó khăn 1:

- Quy luật của dãy số thứ nhất là gì? (số sau hơn số kế trước nó 5 đơn vị);
- Làm thế nào để viết số hạng tiếp theo của dãy số?

H: Làm thế nào để tìm ra số cần tìm?

– Cách 1: Khi học sinh đã tìm được quy luật của hai dãy số, học sinh có thể dễ dàng điền tiếp các số còn thiếu vào hai dãy để tìm kết quả một cách cơ học.

- Cách 2: Phân tích, suy luận mối quan hệ của hai dãy số.

H: Tất cả các số xuất hiện trong dãy 1 có đặc điểm gì chung? (khi chia cho 5 thì dư 2)

Tất cả các số xuất hiện trong dãy 2 có đặc điểm gì chung? (khi chia cho 7 thì dư 3)

Các em hãy biểu diễn số cần tìm trong mối quan hệ đó?

$$a = 5k + 2; a = 7q + 3. \text{ Vậy } 5k + 2 = 7q + 3.$$

H: Phân tích mối quan hệ của hai vế thì liệu ta có tìm được giá trị của k, q không?

Học sinh biến đổi: $5k - 5q = 2q + 1$.

Học sinh nhận xét: Giá trị biểu thức $5k - 5q$ là một số chia hết cho 5 nên giá trị đó có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5; Giá trị biểu thức $2q + 1$ là một số lẻ, tức có chữ số tận cùng là 5.

Suy ra: tích $2q$ là số có chữ số tận cùng là 4.

Vậy giá trị của q là: 2, 7, 12, ...

H: Hãy xác định số cần tìm?

Học sinh: Số cần tìm tương ứng với $q = 7$. Số cần tìm là: $7 \cdot 7 + 3 = 52$.

2.3.3.3. Tạo sự kết nối

Điều khó khăn trong việc giải toán của học sinh đó là kết nối được các dữ kiện của đề toán với kiến thức được học. Một trong những cách thức để rèn luyện kỹ năng này đó là; cần tạo cơ hội cho các em diễn đạt cùng một khái niệm theo nhiều cách khác nhau.

Ví dụ 3: Có một vòng dây bán kính 7 cm. Nếu cắt vòng dây và duỗi thẳng thành đoạn thẳng thì ta được một đoạn thẳng có độ dài bao nhiêu?

Nhận xét: Đối với học sinh tiểu học, việc yêu cầu học sinh tính chu vi một vòng dây bán kính 7 cm thường rất dễ dàng. Tuy nhiên, khi yêu cầu học sinh giải bài toán trên thì cũng không ít học sinh lúng túng. Cụ thể, học sinh thường gặp khó khăn: không biết kết nối “khái niệm chu vi của một hình” với việc thực hiện yêu cầu tính độ dài của một vòng dây được duỗi thẳng thành đoạn thẳng. Vì thế, nếu học sinh gặp khó khăn khi giải bài toán này, giáo viên có thể đặt các câu hỏi để định hướng: tạo sự kết nối “độ dài vòng dây được duỗi thẳng” với “chu vi” cho học sinh giải quyết bài toán như sau:

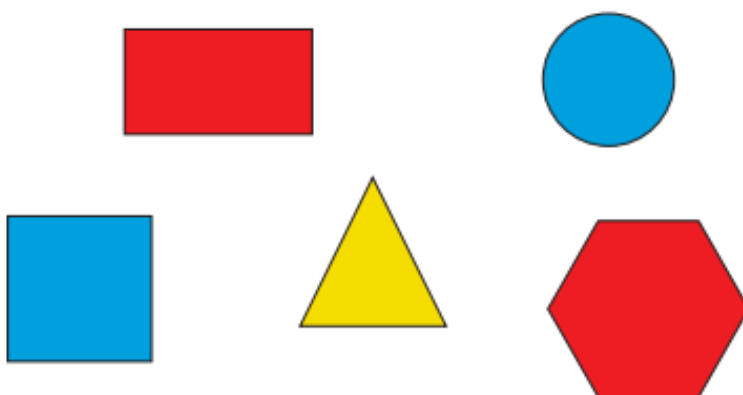
H: Độ dài đoạn dây khi được duỗi thẳng là yếu tố nào của đường tròn? (chu vi).

H: Em hãy nêu công thức tính chu vi của đường tròn.

H: Em hãy thực hiện phép tính.

2.3.3.4. Tạo các biểu diễn Toán học khác nhau

Ví dụ 4: (Biểu diễn toán học thông qua mô hình hình vẽ hoặc tưởng tượng): Cho các viên gạch có dạng hình bên. Người ta chỉ dùng đúng một loại gạch để lát kín một khoảng sân. Theo em những loại gạch nào có thể chọn ra để lát sân được theo yêu cầu?



Nhận xét: Với bài toán này thông thường học sinh sẽ đối mặt với khó khăn khi đưa ra quyết định: chọn được hay không chọn với các viên gạch hình tròn, hình tam giác, hình lục giác? Còn đối với các viên gạch hình vuông và hình chữ nhật, khá quen thuộc với các em nên các em có thể đưa ra ngay quyết định: chọn được. Vì thế, nếu học sinh không biết cách giải quyết bài toán một cách trọn vẹn, giáo viên có thể đưa ra các câu hỏi gợi ý như sau:

H: Tại sao em nghĩ viên gạch hình vuông và hình chữ nhật có thể lát được?

(Vì các hình đó có thể ghép lại thành một mảng kín – Các em có thể tưởng tượng hoặc mô tả thông qua hình vẽ hoặc ghép hình...).

H: Vậy em hãy biểu diễn các hình còn lại theo cách trên để xem xét hình nào có thể ghép được nữa? (Các em biểu diễn thông qua hình vẽ hoặc ghép hình thông qua các mảnh bìa từ đó dễ dàng kết luận: chỉ có loại gạch hình tròn không ghép kín được tức không dùng để lát sân được còn các loại gạch khác đều có thể dùng để lát sân).

Ví dụ 5: Bố bạn An có ý định lát một lối đi nhỏ xung quanh một mảnh vườn có chiều rộng 5 mét, chiều dài 6 mét bằng một lớp gạch lát hình vuông có cạnh bằng 5 dm. Hỏi bố bạn An cần mua ít nhất bao nhiêu viên gạch để lát đủ lối đi đó?

Nhận xét: Với bài toán này thông thường học sinh rất chủ quan cho rằng đây là bài toán dễ và trình bày ngay bài giải *sai* sau đây:

Chu vi mảnh vườn là: $(5 + 6) \cdot 2 = 22(m)$

Đổi: $5\text{ dm} = 0,5\text{ m}$

Số viên gạch bố cần mua để lát là: $22 : 0,5 = 44$ (viên gạch)

Đáp số: 44 viên gạch.

Trong thực tế, nếu học sinh không giải được hoặc giải sai, giáo viên có thể đưa ra hệ thống các câu hỏi để định hướng cho học sinh: việc định hướng dựa trên các biểu diễn trực quan để tìm ra cách giải quyết.

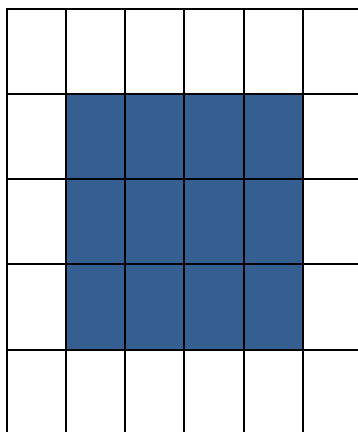
– Nếu học sinh giải sai, giáo viên có thể đưa ra hệ thống câu hỏi:

H: Em kiểm tra xem kết quả mình đã làm đúng chưa?

Học sinh có thể kiểm tra bằng cách biểu diễn bài toán đã cho hay bài toán tương tự nhưng số liệu đơn giản hơn thông qua hình vẽ để kiểm tra. Thông qua hình biểu diễn học sinh sẽ tự nhận ra: cần phải cộng thêm 4 viên gạch ở 4 góc nữa mới đủ.

– Nếu các em không giải được giáo viên có thể đặt câu hỏi:

H: Các em hãy xem mảnh vườn trên như hình chữ nhật có kích thước 5 cm và 6 cm, viên gạch hình vuông thành hình vuông có kích thước 1 cm. Nếu em bớt đi một viên bên ngoài thì hình chữ nhật mới có kích thước như thế nào?



Thông qua câu hỏi gợi ý, học sinh dựa vào hình vẽ để tìm chiến lược giải và kết quả cho bài toán ban đầu.

3. Kết luận

Thực tế dạy học cho thấy sự thành công hay thất bại của một tiết học phụ thuộc vào hệ thống câu hỏi trong bài học, do vậy việc xác định các kỹ năng đặt câu hỏi là cần thiết. Hệ thống câu hỏi hợp lý sẽ giúp học sinh trải nghiệm, tìm tòi, khám phá tri thức.

Trong đào tạo giáo viên dạy học toán ở tiểu học, việc rèn luyện cho sinh viên các kỹ năng đặt câu hỏi nhằm giải quyết vấn đề, phát triển suy luận, tạo các kiến nối và các biểu diễn toán học rất cần thiết bởi đó là tiền đề để tạo cơ hội để học sinh phát triển các năng lực cần thiết trong học tập môn Toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hội giảng dạy toán học phổ thông (2015), *Kỷ yếu hội thảo khoa học Phát triển năng lực nghề nghiệp giáo viên toán phổ thông Việt Nam*, NXB Đại học sư phạm.
2. Frager, Alan M. (1979), *Questioning Strategies: Implications for Teacher. Training*, ERIC Document Reproduction Service No. ED 238 845.
3. Pham Sy Nam, Do Duc Thai, Do Tien Dat, Max Stephens (2015), Exploring ideas contained in the mathematical concept of a limit and utilising its meaning in teaching, *Proceedings of the 24th Biennial Conference of The Australian of Mathematics Teachers Inc*, Adelaide, Australia, p.94-102.
4. Trần Vui (2017), *Từ các lý thuyết học đến thực hành trong giáo dục Toán*, NXB Đại học Huế.

KHÁI NIỆM THỂ TÍCH TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC: MỘT NGHIÊN CỨU VỀ SỰ LỰA CHỌN CỦA THỂ CHẾ VÀ ẢNH HƯỞNG CỦA NÓ

Trần Đức Thuận*

Tóm tắt

Bài viết này trình bày kết quả nghiên cứu về cách xây dựng khái niệm thể tích trong sách Toán tiểu học của Việt Nam, Singapore. Giả thuyết sau được đặt ra từ cách tiếp cận của sách Toán Việt Nam: học sinh có thể nhầm lẫn giữa thể tích và dung tích; những đối tượng được xem xét tính thể tích là những hình hình học với giả định kín và đặc ruột. Một bài tập tính thể tích hồ cá thật đã được triển khai thử để tìm hiểu quan điểm của người học.

Từ khóa: thể tích, dung tích, bậc tiểu học.

Abstract

This paper presents the results of the research on how the concept of volume was built in mathematics books for primary students in Vietnam, Singapore. This hypothesis arises from the approach of Vietnamese mathematics book: student can confuse the volume and capacity; objects which are calculated their volume are geometric figures assuming close and solid. A problem of real aquarium's volume was designed to find out the views of learners.

Key-words: volume, capacity, primary schools.

1. Đặt vấn đề

Theo Thuyết Nhân học, các tri thức được dạy học đều phải tuân theo một số ràng buộc nào đó của *thể chế*. Để mô tả quan hệ thể chế với một tri thức, người ta có thể phân tích các tổ chức toán học $[T, \tau, \theta, \Theta]$, làm rõ các khối kiến thức $[\theta, \Theta]$, các khối kỹ năng $[T, \tau]$ (các dạng bài tập, kiểu nhiệm vụ và kỹ thuật giải) có liên quan đến đối tượng O được đưa vào giảng dạy.

Hiện nay, Việt Nam có xu hướng chuyển đổi sang dạy học theo định hướng phát triển năng lực cho người học, tăng cường vận dụng, liên hệ với thực tế. Vì thế, bài báo này tập trung nghiên cứu về sự lựa chọn của thể chế dạy học Toán tiểu học ở Việt Nam, có tham chiếu đến thể chế dạy học Toán tiểu học ở Singapore, đối với khái niệm *thể tích* và ảnh hưởng của sự lựa chọn này đến quan hệ cá nhân của học sinh với khái niệm *thể tích*.

2. Khái niệm thể tích và dung tích

Trong “Từ điển toán học thông dụng”, các tác giả Ngô Thúc Lanh, Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí (2003) đã định nghĩa:

Thể tích. Một đại lượng nêu lên một đặc trưng hình học của các khối trong không gian (nói một cách thô thiển, nó đo phần không gian choán bởi khối đó). Trong những trường hợp đơn giản nhất, thể tích của một khối là số các khối lập phương đơn vị (khối lập phương có các cạnh có độ dài bằng đơn vị) không có điểm trong chung, lấp đầy khối đó. [...]

* NCS, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Thể tích khối đa diện suy rộng (tức là hợp một số hữu hạn khối chóp tam giác không có điểm trong chung). Có thể xây dựng khái niệm thể tích của chúng như sau: với mỗi khối đa diện suy rộng P có số $v(P)$ duy nhất thỏa mãn các điều kiện sau ($v(P)$ được gọi là *thể tích* của P):

- 1) $v(P) > 0$ với mọi khối đa diện suy rộng (không rỗng),
- 2) $v(P) = v(Q)$ nếu hai khối đa diện suy rộng P, Q bằng nhau (tức có phép dời hình của không gian biến P thành Q),
- 3) $v(I_3) = 1$, I_3 là khối lập phương đơn vị.

Thể tích của khối lập phương cạnh a là a^3 , thể tích của khối hộp chữ nhật có kích thước a, b, c bằng abc , thể tích khối chóp tam giác có diện tích tam giác đáy s và chiều cao h là $\frac{1}{3}sh$.

Thể tích đối với một khối tùy ý K bị chặn trong không gian. Xét các khối đa diện suy rộng P bị chứa trong K và khối đa diện suy rộng Q chứa K vì $v(P) \leq v(Q)$ nên tập các số $v(P)$ có cận trên, kí hiệu $\underline{v}(K)$, tập các số $v(Q)$ có cận dưới, kí hiệu $\bar{v}(K)$, $\underline{v}(K) \leq \bar{v}(K)$. K được gọi là *có thể tích (theo nghĩa Jordan)* nếu $\underline{v}(K) = \bar{v}(K)$, số này gọi là *thể tích* của K , kí hiệu $v(K)$ (Ngô Thúc Lan, Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí, 2003, p. 560 – p. 561).

Dung tích của một vật thể. Thể tích của phần bên trong của vật thể (thường dùng cho vật đựng chất lỏng) (Ngô Thúc Lan, Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí, 2003, p. 132).

Như vậy, khái niệm thể tích được đề cập gắn với các “khối trong không gian” và thể tích của một số khối trong trường hợp đơn giản được tính thông qua “số các khối lập phương đơn vị không có điểm trong chung, lấp đầy khối đó”. Khối lập phương là tập hợp những điểm nằm bên trong và các điểm nằm trên các mặt, cạnh, đỉnh này. Nói cách khác, khối lập phương là khối đặc ruột, và khái niệm thể tích được định nghĩa gắn với khối đặc ruột. Đối với vật đựng chất lỏng, ta có thêm khái niệm “dung tích” với định nghĩa là “thể tích của phần bên trong của vật thể”.

3. Mối quan hệ thể chế dạy học Toán tiểu học với khái niệm thể tích

“Thể tích” lần đầu xuất hiện trong chương trình lớp 5 của cả hai nước Việt Nam và Singapore. Học sinh Việt Nam sử dụng sách “Toán 5” của Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam, viết bởi nhóm tác giả Đỗ Đình Hoan, Nguyễn Áng, Đặng Tự Ân, Vũ Quốc Chung, Đỗ Tiến Đạt, Đỗ Trung Hiệu, Đào Thái Lai, Trần Văn Lý, Phạm Thanh Tâm, Kiều Đức Thành, Lê Tiến Thành, Vũ Dương Thụy. Học sinh Singapore có thể sử dụng sách “My PALS are HERE! Maths 5B” của nhóm tác giả Fong Ho Kheong, Gan Kee Soon, Chelvi Ramakrishnan. Để thuận tiện, kí hiệu **[VM5]** sẽ được sử dụng để chỉ sách “Toán 5” của Việt Nam, kí hiệu **[SM5]** sẽ được sử dụng để chỉ sách “My PALS are HERE! Maths 5B” của Singapore.

Liên quan khái niệm thể tích, **[VM5]** có các bài: “Thể tích của một hình”, “Xăng-ti-mét khối. Đề-xi-mét khối.”, “Mét khối”, “Thể tích hình hộp chữ nhật”, “Thể tích hình lập phương”, liên tục từ trang 114 đến trang 123 và một số bài tập luyện tập, ôn

tập sau đó. Ta có thể nhận ra có sự chuyển hóa, khi tựa bài trong [VM5] là “Thể tích của một **hình**” chứ không phải “Thể tích của một **khối**” như trong từ điển.

[SM5] có các bài “Hiểu và đo thể tích” (“Understanding and measuring volume”; p. 164), “Thể tích của khối hộp chữ nhật và của chất lỏng” (“Volume of a cuboid and of liquid”; p. 172) thuộc chủ điểm 14 “Thể tích của khối lập phương và khối hộp chữ nhật” (“Volume of Cube and Coboid”; p. 155 – p. 186).

3.1. Các đối tượng gắn với thể tích và biểu diễn hình học

“Hình lập phương”, “hình hộp chữ nhật” được giới thiệu ở trang 107 sách [VM5]. Sách [VM5] chỉ trình bày việc nhận dạng hình hộp chữ nhật, hình lập phương qua một số vật trong thực tế và đặc điểm của hình hộp chữ nhật, hình lập phương, chẳng hạn: “hình hộp chữ nhật có sáu mặt”, “hình hộp chữ nhật có tám đỉnh, mười hai cạnh”, “hình hộp chữ nhật có ba kích thước: chiều dài, chiều rộng, chiều cao” (p. 107), “hình lập phương có sáu mặt là các hình vuông bằng nhau” (p. 108). Các thuật ngữ “khối lập phương”, “khối hộp chữ nhật” không xuất hiện. Do [VM5] chỉ nêu đặc điểm, không có định nghĩa nên ta chưa thể kết luận những “hình lập phương”, “hình hộp chữ nhật” được đề cập trong sách là hình rỗng ruột (chỉ bao gồm các mặt bên) hay khối đặc ruột (bao gồm các mặt bên và cả các điểm bên trong).



Hình 1. Trang 107, Toán 5

Những đối tượng gắn với thể tích có trong sách [VM5] gồm có: hình lập phương, hình hộp chữ nhật, các hình được ghép từ các hình lập phương, cái hộp, khối gỗ, hòn đá, *khối kim loại*, bể cá, bể nước. Tất cả có 37 hình minh họa, trong đó 16 hình minh họa có sử dụng các nét đứt cho các cạnh bị khuất, không nhìn thấy được. Trong số 21 hình minh họa chỉ sử dụng nét liền, có 4 hình là vật chứa (bể cá, bể nước).

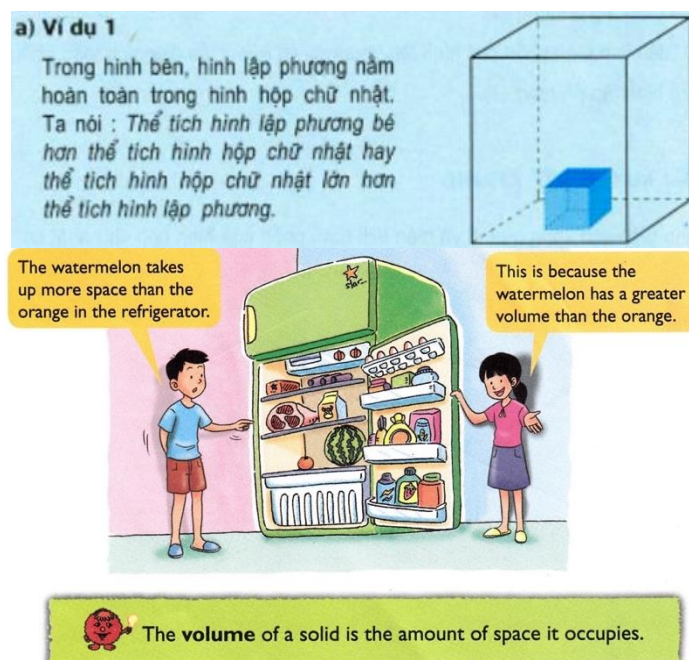
Trước khi giới thiệu về thể tích, [SM5] có bài “Building solids using unit cubes” (p. 155). [SM5] đã giới thiệu “The solid shown is a cube. A single cube is called a unit cube” kèm một hình biểu diễn tô kín màu, không thể hiện cạnh không nhìn thấy do bị che bởi các mặt nhìn thấy. Như vậy, [SM5] đã giới thiệu “khối lập phương” kín, đặc ruột (solid), không nhìn thấy cạnh phía sau. Điều này hoàn toàn khác biệt với [VM5] khi [VM5] giới thiệu “hình lập phương” có thể hiện cạnh bị ẩn phía sau qua các nét đứt. Sau khi giới thiệu khối lập phương đơn vị (unit cube), [SM5] đưa vào các bài tập tạo dựng các khối từ các khối lập phương đơn vị (“build solids using unit cubes”).

Những đối tượng gắn với thể tích có trong sách [SM5] gồm có: quả dưa hấu, quả cam, quả bóng, hộp quả, hộp cá, hình tạo bởi các khối lập phương, khối lập phương, khối hộp chữ nhật (“a cuboid is a rectangular solid”; p. 172), các vật chứa (container) như hộp, bình đo, cốc đo, bể nước. Tất cả có 60 hình minh họa, trong đó có 10 hình minh họa không thể phân chia thành các khối lập phương, các khối hộp chữ nhật. Có 12 hình minh họa cho các vật chứa có dạng hình hộp chữ nhật, hình lập phương, cả 7

hình minh họa có sử dụng các nét đứt đều là hình minh họa bể nước. Cách biểu diễn hình học trong sách là một trong những khác biệt giữa [VM5] và [SM5].

3.2. Sự xuất hiện của khái niệm thể tích

Trong cả [VM5] và [SM5], thuật ngữ “thể tích” được đưa vào thông qua ví dụ về “so sánh thể tích”. Việc “so sánh thể tích” đầu tiên này có sự khác biệt trong hai sách [VM5] và [SM5]:



Hình 2. Ví dụ mở đầu ở trang 114 [VM5] và trang 164 [SM5]

[VM5] trình bày việc “so sánh trực tiếp”, nghĩa là đặt “hình lập phương nằm hoàn toàn trong hình hộp chữ nhật” để đưa đến nhận xét: “Thể tích hình lập phương bé hơn thể tích hình hộp chữ nhật hay thể tích hình hộp chữ nhật lớn hơn thể tích hình lập phương” ([VM5], p. 114). Trong thực tế, chúng ta không thể đặt một khối kín, đặc ruột vào bên trong một khối kín, đặc ruột khác. Do đó, kỹ thuật so sánh trực tiếp này chỉ thực hiện được khi hình hộp chữ nhật là một vật chứa rỗng ruột. Hình hộp chữ nhật có khả năng chứa đựng nên “dung tích” của hình hộp chữ nhật có thể tồn tại. Ta chưa thể khẳng định hình lập phương là khối đặc ruột hay hình rỗng ruột. [VM5] không đưa ra định nghĩa thể tích.

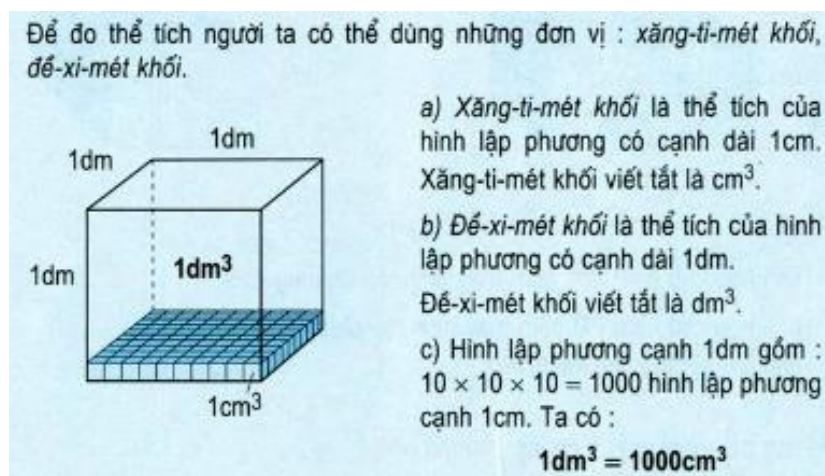
[SM5] trình bày việc “so sánh gián tiếp”, không dùng mô hình “hình trong hình”. Thông qua so sánh phần không gian bên trong tủ lạnh bị chiếm đóng, thuật ngữ thể tích (volume) được đưa vào. Quả dưa hấu và quả cam cũng là những vật thể kín đặc. [SM5] cũng đưa ra định nghĩa về thể tích: “The **volume** of a solid is the amount of the space it occupies”, nghĩa là “Thể tích của một vật rắn (khối đặc) là lượng không gian mà vật chiếm chỗ”.

3.2. Đơn vị đo thể tích

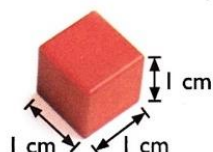
[VM5] giới thiệu 4 đơn vị đo thể tích là: cm^3 , dm^3 , m^3 và lít. Đơn vị lít được sách giáo khoa Việt Nam giới thiệu từ lớp 2 nhưng không đề cập đến thuật ngữ “dung tích” trong cả bậc tiểu học. Mối liên hệ giữa dm^3 và lít được thiết lập qua ghi chú trong bài

tập 3 trang 156. Gợi ý $1l = 1dm^3$ được đưa vào nhằm giúp học sinh trả lời được câu hỏi “Trong bể có bao nhiêu lít nước?”

Các đơn vị cm^3 , dm^3 , m^3 được [VM5] giới thiệu như là “thể tích của hình lập phương” có cạnh dài lần lượt là 1cm, 1dm, 1m (p. 116 – p. 117).



This is a 1-cm cube.
Each edge of the cube is 1 cm long.
The volume of the cube is
1 **cubic centimetre (cm^3)**.



The cubic centimetre (cm^3) is a unit of measurement for volume.



Hình 3. Hình thành đơn vị đo cm^3 trong [VM5] trang 115 và [SM5] trang 168

[SM5] sử dụng hình vẽ vật rắn, đặc (cụ thể là khối lập phương đơn vị) để giới thiệu các đơn vị đo thể tích cm^3 , m^3 và không đề cập đến việc chuyển đổi giữa hai đơn vị đo này ở lớp 5. Tuy nhiên, [SM5] có thiết lập mối quan hệ, quy đổi giữa lít và dm^3 , ml và cm^3 .

3.3. Công thức tính thể tích

Để hình thành công thức tính thể tích hình hộp chữ nhật, [VM5] trình bày việc xếp các hình lập phương đơn vị vào đầy hình hộp chữ nhật và tìm nhanh số hình lập phương đơn vị dựa vào quy tắc nhân: chiều dài $\times$ chiều rộng $\times$ chiều cao. Như vậy, hình hộp chữ nhật cần tính thể tích cũng là vật rỗng ruột để có thể xếp vào các hình lập phương đơn vị. Với hình lập phương, [VM5] không làm rõ quy trình xếp hay chia hình.

Để hình thành công thức tính thể tích khối hộp chữ nhật cuboid (rectangular solid), [SM5] dùng kỹ thuật chia khối hộp chữ nhật cuboid thành các lớp, xác định số khối lập phương đơn vị trong từng lớp, trong nhiều lớp mà không có thao tác “xếp vào hộp”. Điều này có nghĩa vật thể được tìm thể tích là khối rắn, đặc, không rỗng ruột. Khối lập phương được xem là một khối hộp chữ nhật đặc biệt: “A cube is a cuboid in which the length, breadth and height are equal” ([SM5], p. 175).

3.3. Các tổ chức toán học gắn với khái niệm thể tích

3.3.1. Tổ chức toán học gắn với kiểu nhiệm vụ tính thể tích

Kiểu nhiệm vụ T_1 : tính thể tích.

Kỹ thuật:

- τ_{1a} : đếm số lập phương đơn vị.
- τ_{1b} : thay số vào công thức tính thể tích đã thiết lập, thực hiện cộng trừ các kết quả (nếu có tách, gộp).

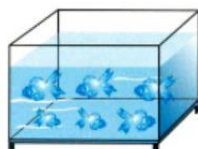
Công nghệ: Định nghĩa thể tích, các công thức tính thể tích, tính chất cộng tính của thể tích.

[VM5] có tất cả 29 nhiệm vụ tính thể tích, với 02 nhiệm vụ (không tường minh) sử dụng kỹ thuật τ_{1a} . Trong 27 nhiệm vụ sử dụng kỹ thuật τ_{1b} chỉ có 05 nhiệm vụ có sử dụng tính chất cộng tính của thể tích. Trong kiểu nhiệm vụ này, có 03 nhiệm vụ tường minh đề cập “thể tích bể”, 01 nhiệm vụ tường minh đề cập “thể tích nước trong bể” và 02 nhiệm vụ chỉ đề cập “số lít nước”, không đề cập “thể tích nước”. Ví dụ:

1 Một bể kính nuôi cá dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 1m, chiều rộng 50cm, chiều cao 60cm.

- Tính diện tích kính dùng làm bể cá đó (bể không có nắp).
- Tính thể tích bể cá đó.

c) Mức nước trong bể cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bể. Tính thể tích nước trong bể đó (độ dày kính không đáng kể).



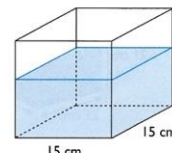
The edge of a cubical tin is 15 cm long. It contains 1.25 litres of water. How much more water is needed to fill the tin completely? Give your answer in litres. (1 ℓ = 1000 cm^3)

$$\begin{aligned}\text{Capacity of tin} &= 15 \times 15 \times 15 \\ &= 3375 \text{ cm}^3 \\ &= 3375 \text{ ml} \\ &= 3.375 \ell\end{aligned}$$

Volume of water in tin = 1.25 ℓ

$$\begin{aligned}\text{Amount of water needed to fill the tin} &= 3.375 - 1.25 \\ &= 2.125 \ell\end{aligned}$$

2.125 ℓ of water are needed to fill the tin completely.



Hình 4. Bài tập 1 trang 128 [VM5] và Bài tập 16 trang 179 [SM5]

[SM5] có tất cả 54 kiểu nhiệm vụ tính thể tích, với 31 nhiệm vụ sử dụng kỹ thuật τ_{1a} . Trong 23 nhiệm vụ sử dụng kỹ thuật τ_{1b} có 09 nhiệm vụ có sử dụng tính chất cộng tính của thể tích. Với 13 nhiệm vụ liên quan đến vật chứa, đề bài tường minh “tính thể tích nước”, “tính thể tích cát” trong vật chứa, không yêu cầu tính thể tích vật chứa.

[SM5] có kiểu nhiệm vụ T_1' : tính dung tích, sức chứa (capacity) của vật chứa (tương ứng với “tính thể tích bể” trong [VM5]) với 08 nhiệm vụ mà kỹ thuật τ_1' cũng là thay số vào công thức của dạng hình đã có.

Những khác biệt về kiểu nhiệm vụ T_1 giữa hai thể chế đưa đến sự hình thành giả thuyết: “Học sinh Việt Nam có thể nhầm lẫn giữa khái niệm thể tích và dung tích; những đối tượng được xem xét tính thể tích là những hình hình học với giả định kín và đặc ruột”.

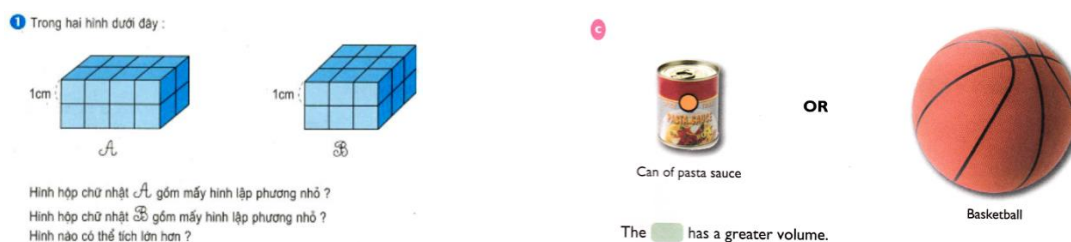
3.3.2. Tổ chức toán học gắn với kiểu nhiệm vụ so sánh thể tích

Kiểu nhiệm vụ T_2 : so sánh thể tích.

Kỹ thuật τ_2 : xác định thể tích mỗi khối và so sánh, lập tỉ lệ.

Yếu tố công nghệ θ_2 là công thức tính thể tích, tính chất của tập hợp số tự nhiên.

[VM5] có 05 nhiệm vụ so sánh thể tích. [SM5] có 06 nhiệm vụ so sánh thể tích, nhưng có đến 04 nhiệm vụ so sánh gián tiếp và kết luận qua quan sát bằng mắt.



Hình 5. Bài tập 1 trang 115 [VM5] và Bài tập 2 trang 165 [SM5]

3.3.3. Tổ chức toán học gắn với kiểu nhiệm vụ tính độ dài cạnh khi biết thể tích

Kiểu nhiệm vụ T₃: tính độ dài cạnh khi biết thể tích.

Kỹ thuật τ₃: thay số vào công thức tính thể tích.

Yếu tố công nghệ θ₃ là công thức tính thể tích.

Với kiểu nhiệm vụ này, [VM5] có 02 nhiệm vụ, [SM5] có 04 nhiệm vụ.

- 2 Một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $1,8\text{m}^3$. Đáy bể có chiều dài 1,5m, chiều rộng 0,8m. Tính chiều cao của bể.
- Copy the table and fill in possible values of the breadth and the height of the cuboid.

Length (cm)	Breadth (cm)	Height (cm)	Volume (cm ³)
5			120
5			120
5			120
5			120

WB 5B.
Practice

Hình 6. Bài tập 2 trang 169 [VM5] và Bài tập 13 trang 178 [SM5]

3.3.4. Tổ chức toán học gắn với kiểu nhiệm vụ tạo khối từ các lập phương đơn vị

Kiểu nhiệm vụ T₄: tạo nhiều khối khác nhau từ các lập phương đơn vị.

Kỹ thuật τ₄: lắp ghép các khối lập phương đơn vị theo các cách khác nhau.

Với kiểu nhiệm vụ này, [VM5] có 01 nhiệm vụ, [SM5] có 02 nhiệm vụ.

- 3 Có 6 hình lập phương nhỏ cạnh 1cm. Hãy xếp 6 hình lập phương đó thành một hình hộp chữ nhật. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau ?

Work in groups of four.

Your teacher will give each group 24 1-cm cubes.

Build all the possible cubes and cuboids using eight, eleven and twelve 1-cm cubes.

Hình 7. Bài tập 3 trang 115 [VM5] và Bài tập nhóm trang 170 [SM5]

3.3.5. Tổ chức toán học gắn với kiểu nhiệm vụ đổi đơn vị đo

Kiểu nhiệm vụ T₅: đổi đơn vị đo.

Kỹ thuật τ₅: sử dụng bảng đơn vị đo, thực hiện nhân / chia với 1000, ...

Yếu tố công nghệ θ₅ là bảng quy đổi giữa các đơn vị đo đã được giới thiệu.

Với kiểu nhiệm vụ này, [VM5] có 27 nhiệm vụ, [SM5] có 09 nhiệm vụ.

2. Viết số thích hợp vào chỗ chấm :

a) $1 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3$

$5,8 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3$

b) $2000 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

$490\,000 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

$375 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3$

$\frac{4}{5} \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3$

$154\,000 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

$5100 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

11. Write in cubic centimetres.

a) $850 \text{ ml} = \dots$

c) $4 \text{ l } 55 \text{ ml} = \dots$

b) $2 \text{ l} = \dots$

d) $12 \text{ l } 5 \text{ ml} = \dots$

Hình 7. Bài tập 2 trang 115 [VM5] và Bài tập 11 trang 176 [SM5]

Ngoài 05 kiểu nhiệm vụ có trong [SM5] đã chỉ ra ở trên, [VM5] còn có các kiểu nhiệm vụ thiên về số học nhưng có kèm theo đơn vị đo thể tích, chẳng hạn như: đọc, viết số có kèm đơn vị đo thể tích (38 nhiệm vụ), so sánh các số đo (11 nhiệm vụ), tính biểu thức có kèm đơn vị đo (01 nhiệm vụ).

4. Mối quan hệ cá nhân của học sinh đối với khái niệm thể tích và dung tích

Những phân tích, nghiên cứu so sánh [VM5] và [SM5] đã chỉ ra sự khác biệt giữa hai thể chế dạy học Toán tiểu học ở Việt Nam và Singapore. Sự lựa chọn của thể chế Việt Nam có thể ảnh hưởng lên mối quan hệ cá nhân của học sinh với thể tích, thể hiện qua giả thuyết: “Học sinh Việt Nam có thể nhầm lẫn giữa thể tích và dung tích; những đối tượng được xem xét tính thể tích là những hình học với giả định kín và đặc ruột”. Điều này có nghĩa, với những vật chứa rỗng ruột như bể nước, học sinh Việt Nam sẽ đồng nhất nhiệm vụ “tính thể tích bể nước” (với giả thiết “thành bể không đáng kể”) với nhiệm vụ “tính dung tích bể nước”, “tính sức chứa bể nước”, “tính thể tích nước trong bể”.

4.1. Bài toán khảo sát

Mẹ An đặt thợ làm hồ cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật (chỉ có 4 mặt và đáy, không có nắp trên). Khi nhận hồ cá, An đo được kích thước các cạnh hồ như sau:

– Nếu tính luôn kính: dài 706 mm; rộng 406 mm; cao 20 cm.

– Nếu không tính kính: dài 70 cm; rộng 40 cm; cao 197 mm.

Bạn hãy tính: Thể tích hồ cá bằng kính mẹ An đã đặt.



4.2. Phân tích tiên nghiệm

Các biến được lựa chọn:

– Độ dày thành bể: Những bài toán trong [VM5] luôn cho “độ dày kính không đáng kể”. Bài toán được lựa chọn cho độ dày kính đáng kể, thể hiện qua sự chênh lệch giữa các số đo mặt ngoài (tính luôn kính) và các số đo mặt trong (không tính kính).

– Kích thước các cạnh: các số đo được lựa chọn để đảm bảo kết quả tính toán thu được tối đa 6 chữ số, phù hợp với quy ước ra đề ở bậc tiểu học.

– Các chiến lược sau được dự đoán sẽ xuất hiện:

– S_C : gắn thể tích bể với dung tích của nó, nghĩa là thể tích phần bên trong, không tính kính. Kết quả là: $700 \times 400 \times 197 \text{ mm}^3$.

– S_A : ngầm giả định bể là khối kín, rắn, đặc ruột, gắn thể tích bể với tổng thể tích phần biên và dung tích (thể tích phần bên trong). Kết quả là: $706 \times 406 \times 200 \text{ mm}^3$.

– S_M : gắn thể tích bể với phần biên, phần vật liệu tạo thành bể. Kết quả là hiệu số tìm được từ hai chiến lược S_A , S_C .

Vì bể nước không phải là khối kín, rắn, đặc ruột nên thể tích của bể nước sẽ tìm được theo chiến lược S_M . Những câu trả lời theo chiến lược S_C , S_A cho thấy người trả lời có sự nhầm lẫn giữa khái niệm thể tích vật chứa và dung tích vật chứa.

4.3. Phân tích hậu nghiệm

Bảng 1. Kết quả khảo sát

	S_C	S_A	S_A, S_C	S_M	Không xác định
98 HS	13	76	6	0	3
%	13,2%	77,6%	6,1%	0%	3,1%
49 GV	8	35	3	0	3
%	16,4%	71,4%	6,1%	0%	6,1%

Kết quả khảo sát với 98 học sinh lớp 5 và 49 giáo viên tiểu học cho thấy:

Có khoảng 13,2% học sinh và 16,4% giáo viên đồng nhất thể tích bể cá với thể tích phần bên trong bể kính (dung tích bể kính), nghĩa là theo chiến lược S_C .

Có khoảng 77,6% học sinh và 71,4% giáo viên theo chiến lược S_A , tính thể tích bể kính bằng tích các kích thước đo mặt ngoài (tính cả phần kính và phần chứa nước).

Có khoảng 6,1% học sinh và 6,1% giáo viên đưa phương án nước đôi, thêm ngay sau “thể tích bể kính” các cụm từ “nếu tính kính”, “nếu không tính kính” để tính toán.

Có 03 giáo viên và 03 học sinh bị nhầm lẫn khi thay số, công thức nên không xác định được chiến lược.

Không có học sinh hay giáo viên nào thực hiện chiến lược S_M trong phân tích tiên nghiệm. Như vậy, với học sinh Việt Nam, thể tích của vật chứa không đồng nhất với thể tích phần vật liệu tạo nên vật chứa (phần biên) mà có gắn với dung tích, thể tích phần bên trong của vật chứa. Thể tích bể nước (một vật thể cụ thể, một đối tượng vật lý) đã được hầu hết học sinh và giáo viên tham gia khảo sát tính bằng công thức đơn giản dành cho hình hình học với giả định kín và đặc ruột. Nghĩa là, một phần giả thuyết nêu đã được hợp thức:

“Học sinh Việt Nam có thể nhầm lẫn giữa thể tích và dung tích; những đối tượng được xem xét tính thể tích là những hình hình học với giả định kín và đặc ruột”.

5. Kết luận

Thể chế dạy học Toán tiểu học ở Singapore, cụ thể là **[SM5]** đã xây dựng thể tích cho các khối kín, đặc ruột, có giới thiệu quan niệm thể tích vật thể như phần không gian vật thể chiếm đóng. Trong khi đó, thể chế dạy học Toán tiểu học ở Việt Nam, cụ thể là **[VM5]** tiếp cận thể tích từ vật chứa rỗng ruột, không giới thiệu tường minh thể tích vật thể, đặc biệt là thể tích vật chứa. Cách tiếp cận thể tích của Việt Nam có thể tạo ra khó khăn cho học sinh khi gặp những bài toán liên quan đến thể tích của vật chứa rỗng ruột, có thể kín hoặc hở.

[SM5] không giới thiệu đơn vị đo dm^3 và cũng không thiết lập quan hệ giữa cm^3 với m^3 như [VM5]. Khi minh họa những bể nước bằng hình vẽ, [VM5] chỉ sử dụng nét liền, trong khi [SM5] sử dụng thêm những nét đứt.

[SM5] không có nhiệm vụ nào đề cập đến “thể tích vật chứa”, trong khi [VM5] có nhiều nhiệm vụ tường minh đề cập “thể tích bể nước”. Cách phát biểu “thể tích bể nước” xuất hiện nhiều trong [VM5] không chính xác bằng cách phát biểu “thể tích nước trong bể”.

[VM5] có nhiều nhiệm vụ thiên về đọc viết, so sánh, tính toán số học có đi kèm đơn vị đo thể tích.

Tồn tại ít nhất 03 quan niệm về thể tích bể nước: đồng nhất với dung tích của bể; đồng nhất với thành bể; đồng nhất với tổng dung tích và thể tích thành bể.

Một vấn đề mà chúng ta có thể xem xét thêm, nghiên cứu sâu hơn sau này liên quan đến thể tích của các hộp gỗ thần kì: 7 chiếc hộp gỗ có thể lồng ghép vừa khít vào nhau, cái này chứa trong cái kia và sau khi lồng vào nhau chỉ còn nhìn thấy chiếc hộp lớn nhất do những hộp nhỏ hơn đã nằm vào bên trong. Với những chiếc hộp này thì thể tích của mỗi chiếc hộp là gì? Thể tích của chiếc hộp có thay đổi khi hộp đậy kín, khi hộp để hở? Tổng thể tích của các chiếc hộp? Phần không gian cần để cất giữ cả 7 chiếc hộp?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bessot, A., Comiti, C., Lê Thị Hoài Châu, & Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*. Hồ Chí Minh: NXB Đại học Quốc gia TP HCM.
2. Đỗ Đình Hoan, Nguyễn Áng, Đặng Tự Ân, Vũ Quốc Chung, Đỗ Tiến Đạt, Đỗ Trung Hiệu, Đào Thái Lai, Trần Văn Lý, Phạm Thanh Tâm, Kiều Đức Thành, Lê Tiến Thành, & Vũ Dương Thụy. (2008). *Toán 5*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
3. Ngô Thúc Lan, Đoàn Quỳnh, & Nguyễn Đình Trí. (2003). *Từ điển toán học thông dụng*. Huế: NXB Giáo dục.
4. Fong Ho Kheong, Gan Kee Soon, Chelvi Ramakrishnan. (2009). *My PALS are HERE! Maths 5B*. Singapore: Marshall Cavendish International (Singapore) Private Limited, A member of Times Publishing Limited.

MÔ HÌNH VÀ SỰ XUẤT HIỆN CỦA MÔ HÌNH TRONG SÁCH GIÁO KHOA TOÁN TIỂU HỌC Ở VIỆT NAM

Trịnh Duy Trọng*

Tóm tắt

Chevallard, một nhà giáo dục học người Pháp, cho rằng “một mô hình là thú vị khi nó cho phép hình thành những kiến thức mà con đường khác không mang lại cho chúng ta dễ dàng như vậy” [8]. Ở đây, có thể hiểu, bằng cách sử dụng mô hình chúng ta không chỉ có thể hình thành kiến thức nơi người học, mà trong nhiều trường hợp, kiến thức còn được hình thành một cách dễ dàng hơn những con đường khác. Quan điểm này có được thể hiện, sử dụng trong SGK toán ở Việt Nam hay không? Cụ thể, mô hình xuất hiện và có vai trò, ý nghĩa như thế nào trong SGK toán tiểu học ở Việt Nam? Trong báo cáo này, chúng tôi sẽ trình bày một số vấn đề lý luận về mô hình, vai trò, ý nghĩa của mô hình trong việc dạy học bộ môn toán. Đồng thời, chúng tôi xem xét mô hình xuất hiện và được sử dụng như thế nào trong SGK toán tiểu học ở Việt Nam.

Từ khóa: hệ thống, mô hình, mô hình hóa.

Abstract

Chevallard, a French educator, said that "a model is interesting when it allows to produce knowledge that another way would not give us so easily". Here, we can understand that using model not only can form knowledge for learners, which in many cases, knowledge also formed easier than other way. Has this view been expressed, used in math textbooks in Vietnam? Specifically, how the models emerge and which role and meaning of model are mentioned in primary math textbooks in Vietnam? In this report, we will present some theoretical issues about the model, the role and meaning of the models in the teaching of mathematics. At the same time, we look at how the model emerge and is used in primary math textbooks in Vietnam.

Key word: system, model, modelling.

1. Hệ thống và mô hình

1.1. Hệ thống

Tùy thuộc vào đối tượng, mục tiêu nghiên cứu mà có những định nghĩa hệ thống khác nhau.

“Hệ thống là phức hợp các phần tử có quan hệ nhất định với nhau và với môi trường” [7], L.V.Bertalanffy, người khởi xướng lý thuyết hệ thống hiện đại.

“Hệ thống là một tổng thể được tổ chức, tạo thành từ các yếu tố phụ thuộc lẫn nhau, yếu tố này được xác định theo các yếu tố khác dựa vào vị trí của chúng trong tổng thể này” [11], F. de Saussure.

Tuy có nhiều định nghĩa khác nhau về hệ thống, nhưng một hệ thống thường có những đặc trưng cơ bản sau [11]:

* NCS, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

- tính tổ chức, thể hiện ở sự sắp xếp các mối quan hệ giữa các yếu tố tạo nên hệ thống;
- tính tổng thể, một hệ thống thì nhiều hơn tổng của các yếu tố của nó, nó có các tính chất mà các thành phần của nó không có;
- sự tương tác, các yếu tố tạo thành có mối quan hệ tác động qua lại và nó không chỉ là mối quan hệ loại nguyên nhân – kết quả;
- sự phức tạp, thể hiện ở chỗ nhiều khi chúng ta không thể nắm bắt hết sự phong phú của nó.

Khi xác định một hệ thống, điều trước tiên và quan trọng nhất là xác định các yếu tố tạo thành, đó là thành phần cơ bản tạo nên hệ thống, nó tồn tại độc lập tương đối với các yếu tố khác của hệ thống và không thể chia nhỏ hơn (bản thân nó không thể phân chia nhỏ hơn hoặc là do tính chất của những vấn đề mà chúng ta nghiên cứu về hệ thống, chúng ta không cần thiết phải chia nhỏ hơn).

Việc xác định các yếu tố tạo thành hệ thống một cách hợp lý và đúng đắn sẽ làm cho vấn đề mà chúng ta nghiên cứu về hệ thống trở nên rõ ràng và thuận lợi hơn. Trường hợp ngược lại có thể làm cho chúng ta mất nhiều thời gian, hao tốn nhiều phương tiện mà không đem lại kết quả mong muốn.

Ngoài ra, việc xác định cách thức tổ chức, sắp xếp các yếu tố tạo thành, cũng như mối quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa chúng sẽ cho chúng ta thấy được cấu trúc của hệ thống.

Ví dụ:

- Hệ thống chính trị của một địa phương bao gồm các yếu tố tạo thành là tổ chức đảng, chính quyền, mặt trận tổ quốc và các đoàn thể của địa phương đó; mối quan hệ phụ thuộc lẫn nhau của các yếu tố tạo thành này thể hiện ở vị trí, vai trò, chức năng, nhiệm vụ của chúng trong hệ thống chính trị ở mỗi địa phương.
- Một tam giác vuông là một hệ thống với các yếu tố tạo thành là hai cạnh góc vuông và cạnh huyền; một số quan hệ giữa các yếu tố này là số đo góc tạo thành giữa hai cạnh góc vuông là 90^0 , bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông,...

1.2. Mô hình

Có nhiều phương pháp khác nhau để nghiên cứu một hệ thống. Một trong những phương pháp thường được sử dụng là xây dựng và nghiên cứu *mô hình của hệ thống* (phương pháp mô hình hóa).

1.2.1. Khái niệm mô hình

Theo Chevallard (1989), *mô hình* là một mẫu, một đại diện, một minh họa được thiết kế để mô tả cấu trúc của hệ thống, cách vận hành của một hoặc các yếu tố tạo nên hệ thống. Người ta thường sử dụng khái niệm mô hình theo hai nghĩa khác nhau.

Theo nghĩa thứ nhất, mô hình là một bản sao, một ví dụ, có những tính chất đặc trưng cho sự vật gốc mà mô hình đó biểu diễn.

Theo nghĩa thứ hai, mô hình là một biểu diễn cho các phần quan trọng của một hệ thống (có sẵn hoặc sắp được xây dựng) với mục đích nghiên cứu hệ thống đó. Nói cách khác, mô hình là cái thu được từ việc diễn đạt theo một ngôn ngữ nào đó các đặc trưng chủ yếu của một hệ thống mà người ta cần nghiên cứu. Cách biểu diễn này tuân theo một tập hợp các quy tắc nào đó.

(Trích theo Lê Thị Hoài Châu, 2014)

Ví dụ mô hình theo nghĩa thứ nhất: Mô hình xe ô tô, mô hình chiếc thuyền buồm.

Ví dụ mô hình theo nghĩa thứ hai: $a^2 + b^2 = c^2$ là một mô hình của một tam giác vuông (với a, b và c là số đo hai cạnh góc vuông và cạnh huyền).

1.2.2. Sự hợp thức và giá trị của mô hình

Mô hình là một mẫu, một đại diện, một minh họa cho hệ thống nên chúng ta có thể xây dựng nhiều mô hình khác nhau cho cùng một hệ thống, nó tùy thuộc vào mục đích nghiên cứu hệ thống.

Giá trị và sự hợp thức của mô hình là hai khái niệm khác nhau. Giá trị của một mô hình gắn với tính hữu ích của nó, sự hữu ích này phụ thuộc vào mục tiêu nghiên cứu. Sự hợp thức diễn tả sự phù hợp của cấu trúc với thực tế.

Ví dụ: Xét hệ thống điểm môn toán kỳ thi THPT Quốc gia 2015 của một lớp 12, ta có thể xây dựng 3 mô hình của hệ thống này:

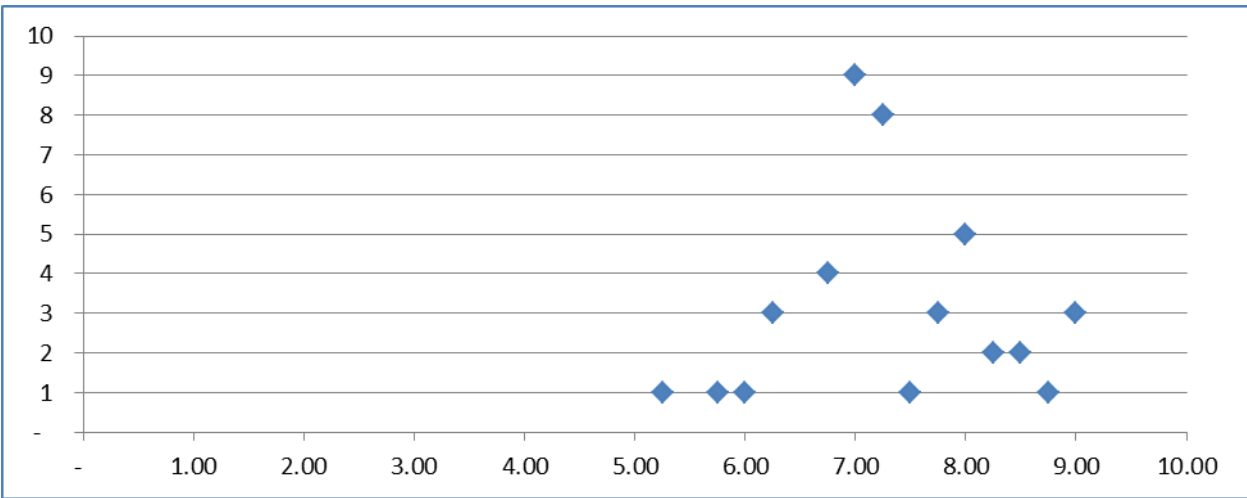
– Mô hình 1: Một bảng tương ứng số thứ tự học sinh và điểm số

STT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Điểm	6.75	8.00	7.25	8.75	7.00	7.00	7.25	6.75	7.25	9.00	8.25	7.50	7.00	8.25	7.25

STT	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Điểm	6.00	5.25	7.75	6.25	8.50	7.75	7.75	6.75	7.00	8.00	9.00	7.25	7.25	6.25	6.75

STT	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Điểm	8.00	8.50	7.25	6.25	8.00	8.00	7.00	7.00	9.00	7.00	5.75	7.25	7.00	7.00

– Mô hình 2: Một biểu đồ biểu thị số học sinh có cùng điểm số với nhau



- Mô hình 3: Điểm trung bình của lớp và độ lệch tiêu chuẩn

Điểm trung bình	7.36
Độ lệch chuẩn	0.86

Với 3 mô hình trên, tính tiết kiệm tăng từ mô hình 1 đến mô hình 3 trong khi tính chính xác thì tăng theo chiều ngược lại.

Mô hình 1 chứa tất cả các thông tin.

Mô hình 2 một phần của thông tin bị mất.

Mô hình 3 chỉ cho ta biết về điểm trung bình, mức độ tập trung và phân tán của tập dữ liệu mà không biết chi tiết từng giá trị cụ thể.

Mỗi mô hình có giá trị và sự hợp thức khác nhau. Với giáo viên bộ môn, người muốn biết chính xác điểm số của mỗi học sinh, thì mô hình 2 và 3 không giá trị bằng mô hình 1. Tuy nhiên, với hiệu trưởng nhà trường, người cần biết điểm trung bình chung của các lớp để phục vụ công tác quản lý, thì mô hình 3 kinh tế hơn.

1.2.3. Mô hình và sự hình thành kiến thức

Trong nghiên cứu của mình, Poussin (1987) khẳng định “*mô hình là một công cụ trong việc xây dựng các kiến thức*” [11].

Chevallard (1989) cũng cho rằng “*một mô hình là thứ vị khi nó cho phép hình thành những kiến thức mà con đường khác không mang lại cho chúng ta dễ dàng như vậy*” [8]. Ông đưa ra ví dụ minh họa như sau:

Định lý Pitago phát biểu một mối quan hệ đặc trưng của tam giác vuông, vì vậy, mối quan hệ đó tạo thành một mô hình của tam giác vuông: $c^2 = a^2 + b^2$ (a, b, c là số đo của các cạnh).

Từ đó, ta có: $\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$ (*)

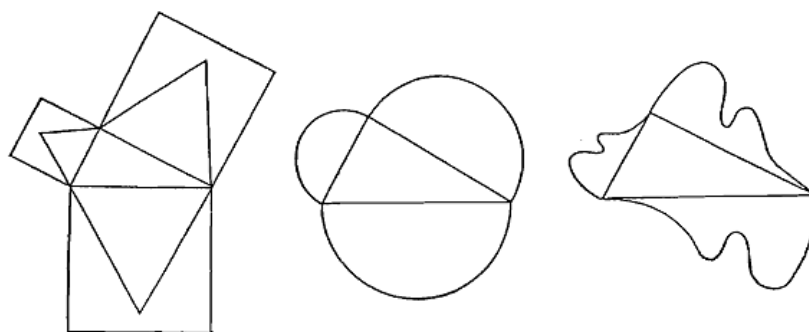
(*) cho chúng ta ngay một kết quả trên hệ thống: diện tích của nửa đường tròn đường kính là cạnh huyền bằng tổng diện tích của các nửa đường tròn đường kính là hai cạnh góc vuông. Kết quả này không hề dễ dàng có được từ quan điểm hình học.

Như vậy, nghiên cứu, làm việc với mô hình không những cho ta những hiểu biết về hệ thống mà còn góp phần hình thành nên những kiến thức mới liên quan đến hệ thống. Trong ví dụ trên, việc nghiên cứu mô hình $c^2 = a^2 + b^2$ của hệ thống các tam giác vuông cho ta hiểu biết về hệ thống là “diện tích hình vuông tạo thành trên cạnh huyền thì bằng tổng diện tích các hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông”. Mặt khác, chính sự làm việc với mô hình này hình thành cho chúng ta những kiến thức mới liên quan đến hệ thống đó là:

- diện tích của nửa đường tròn đường kính là cạnh huyền bằng tổng diện tích của các nửa đường tròn đường kính là hai cạnh góc vuông, hay tổng quát hơn:

- xây dựng các hình giống nhau trên các cạnh tam giác vuông, diện tích hình xây dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích các hình xây dựng trên hai cạnh góc vuông (bằng cách nhân hệ số k thích hợp vào hai vế của đẳng thức $c^2 = a^2 + b^2$).

Những kiến thức này hiển nhiên không thể dễ dàng mang lại bằng các con đường khác.



1.2.4. Mô hình và mô hình hóa toán học

Theo Edwards và Hamson (2001), *Mô hình hóa toán học* là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tế sang một vấn đề toán học bằng cách thiết lập và giải quyết các mô hình toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận [9].

Như vậy, có thể hiểu mô hình hóa toán học là quá trình xây dựng và nghiên cứu mô hình toán học của một hệ thống (toán học hoặc ngoài toán học) nhằm trả lời cho những câu hỏi mà người ta đặt ra trên hệ thống này.

Theo Lê Văn Tiến (2005), “*trong lịch sử toán học, vấn đề mô hình hóa đóng một vai trò quan trọng. Việc xây dựng những mô hình toán học của thực tiễn vừa là mục tiêu vừa là động cơ của sự sáng tạo ra nhiều công cụ toán học (tri thức toán học)*”. Và khi bàn về việc sử dụng các bài toán thực tiễn trong dạy học toán cho phép tiếp cận dạy học mô hình hóa và dạy học bằng mô hình hóa tác giả đã khẳng định “*việc xây dựng mô hình toán học của thực tiễn là phương tiện trung gian cho phép giải các bài toán thực tiễn và ngược lại, giải các bài toán thực tiễn lại là động cơ tiếp cận vấn đề mô hình hóa*”.

Như vậy, trong mô hình hóa toán học, các mô hình minh họa, biểu diễn cho các tình huống thực tiễn. Chúng được xây dựng và sử dụng để tìm ra câu trả lời cho những câu hỏi mà người ta đặt ra trong tình huống thực tiễn ấy.

2. Mô hình trong dạy học toán tiểu học ở Việt Nam

Như đã trình bày ở trên, mô hình là một trong những công cụ để xây dựng các kiến thức, việc sử dụng công cụ này một cách thích hợp sẽ cho phép hình thành những kiến thức mà những công cụ khác không mang lại cho chúng ta một cách dễ dàng như vậy. Ngoài ra, việc xây dựng và làm việc trên các mô hình (trong mô hình hóa toán học) còn mang lại nhiều lợi ích trong việc dạy học. Có lẽ chính vì vậy, trên thế giới đã có nhiều công trình nghiên cứu về mô hình, mô hình hóa toán học và nhiều thể chế dạy học đã đề cập tường minh đến việc sử dụng mô hình trong dạy học toán khi bàn về mô hình hóa toán học (Hà Lan, Thụy Điển, Úc, Singapore, Hoa kỳ,...). Tuy nhiên, các nghiên cứu cũng chỉ ra rằng “*học sinh không được giới thiệu về mô hình hóa toán học cho đến năm học cấp hai*” (theo Stillman, 1998) nhưng “*những nguyên tắc cơ bản của mô hình hóa toán học có thể và nên bắt đầu sớm hơn, khi trẻ nhỏ đã có những năng lực cơ bản mà trên đó mô hình có thể được phát triển*” (theo Diezmann, Watters, & English, 2002; Lehrer & Schauble, 2003) [10].

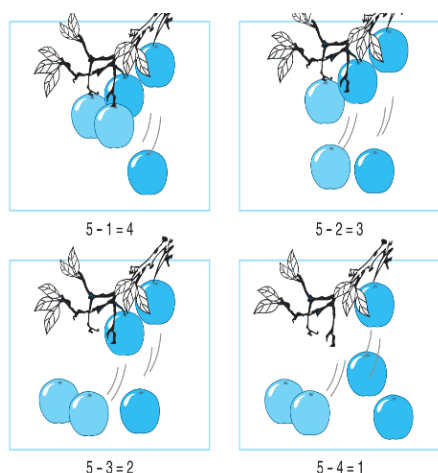
Ở Việt Nam, dự thảo chương trình giáo dục phổ thông ban hành ngày 17/4/2017 đã đề cập tường minh đến khái niệm mô hình hóa toán học khi xác định năng lực mô hình hóa toán học là một trong các thành tố cốt lõi của năng lực toán học cần hình thành và phát triển cho học sinh thông qua việc học môn toán. Tuy nhiên, trong chương trình hiện hành, mô hình hóa toán học chưa được đề cập một cách tường minh và những nghiên cứu cũng chỉ ra rằng ở cấp trung học phổ thông mô hình hóa toán học cũng xuất hiện rất mờ nhạt. Như vậy, mô hình đã xuất hiện và được sử dụng như thế nào trong dạy học toán ở cấp tiểu học – cấp học mà ngay ở các nước coi trọng phát triển năng lực mô hình hóa toán học, học sinh cũng không được giới thiệu về mô hình hóa toán học?

Để tìm câu trả lời cho câu hỏi trên chúng tôi đã tiến hành tìm hiểu, phân tích bộ sách giáo khoa và sách giáo viên Toán tiểu học hiện hành ở Việt Nam. Những kết quả ban đầu cho thấy:

Về thuật ngữ mô hình: Tuy các sách giáo khoa và sách giáo viên Toán tiểu học do cùng một nhóm tác giả biên soạn nhưng chúng tôi không thấy thuật ngữ mô hình xuất hiện trong các sách giáo khoa, còn trong các sách giáo viên thuật ngữ mô hình đã được sử dụng một cách phổ biến (đặc biệt nhiều trong sách giáo viên lớp 1, 2). Cụ thể, mô hình được xác định như là một loại đồ dùng dạy học được khuyến khích sử dụng, các mô hình cụ thể như “*mô hình xe ô tô, mô hình đồng hồ, mô hình quả cam,...*”. Điều này được khẳng định trong phần giới thiệu tổng hợp về quá trình dạy học toán trong chương trình tiểu học giai đoạn các lớp 1, 2, 3 của sách giáo viên Toán lớp 4 – trang 4: “*Nhờ sự hỗ trợ của các đồ dùng học toán đơn giản, để làm như: que tính, hạt tính và hình vẽ, mô hình,...* của sách giáo khoa, học sinh được tập dợt tự phát hiện, tự giải quyết vấn đề, tự chiếm lĩnh kiến thức mới, kết hợp học cá nhân với hợp tác trong nhóm, trong lớp; thực hiện học gắn với thực hành, vận dụng một cách linh hoạt, dưới sự tổ chức, hướng dẫn của giáo viên”.

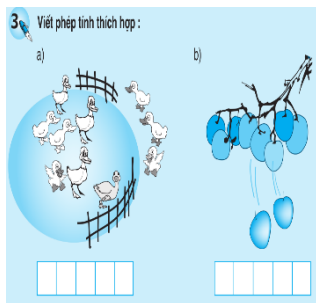
Về sự xuất hiện và vai trò của mô hình: Trích dẫn trong sách giáo viên Toán lớp 4 nêu trên cho thấy các mô hình đã xuất hiện trong sách giáo khoa mặc dù thuật ngữ mô hình không được sử dụng – “*que tính, hạt tính và hình vẽ, mô hình,...* của sách giáo khoa”.

Thật vậy, trong bài “*Phép trừ trong phạm vi 5*” sách giáo khoa Toán lớp 1 đã sử dụng 4 mô hình sau đây để giới thiệu 4 phép toán trừ trong phạm vi 5:

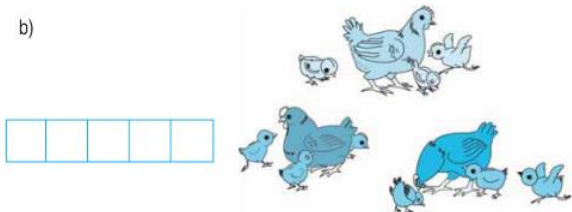


(SGK Toán 1 – Trang 58)

Các mô hình trên thuộc một dạng mô hình được sử dụng phổ biến trong các sách giáo khoa tiểu học, mô hình minh họa (hay mô tả) cho một sự vật, hiện tượng quen thuộc trong đời sống hàng ngày của học sinh. Các mô hình dạng này không chỉ được sử dụng để dạy các kiến thức mới cho học sinh mà còn được sử dụng nhiều trong việc rèn luyện, củng cố kiến thức cho học sinh, thông qua một dạng toán quen thuộc “viết phép toán thích hợp” ứng với mô hình sách giáo khoa đưa ra.

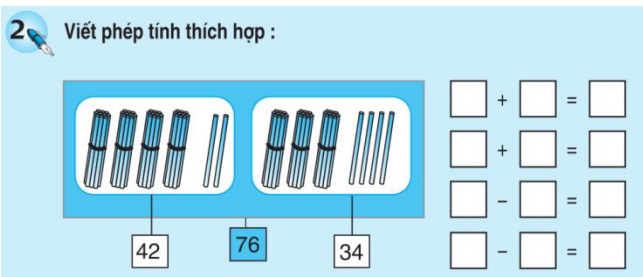


Luyện tập phép cộng, trừ trong phạm vi 10
(SGK Toán 1 – Trang 85)



Phép nhân
(SGK Toán 3 – Trang 93)

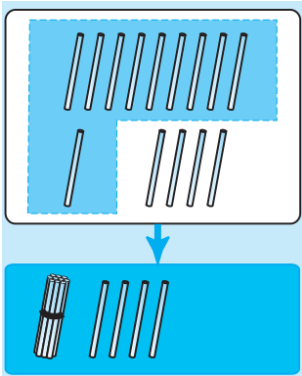
Chúng ta hãy xét bài toán trong bài “Luyện tập” phép cộng, trừ (không nhớ) trong phạm vi 100 trong sách giáo khoa Toán lớp 1:



(SGK Toán 1 – Trang 163)

Sau đây là phần hướng dẫn dạy học trong sách giáo viên Toán lớp 1 – trang 191: “Dạng bài tập này học sinh đã được làm quen từ học kỳ 1, vì vậy giáo viên chỉ cần hướng dẫn học sinh xem mô hình trong sách rồi lựa chọn các số tương ứng với từng phép tính đã cho”. Như vậy, chính các tác giả biên soạn sách giáo khoa Toán lớp 1 thừa nhận đã sử dụng một mô hình để luyện tập các phép toán cộng, trừ (không nhớ) trong phạm vi 100 cho học sinh. Chúng tôi thấy rằng mô hình này cũng là một dạng mô hình được sử dụng phổ biến trong các sách giáo khoa tiểu học, mô hình que tính.

Chúng ta hãy xét thêm một mô hình thuộc dạng này được sử dụng để dạy phép toán “9 cộng với một số” trong sách giáo khoa Toán lớp 2 – trang 15.



Với mô hình này, học sinh có thể tự nhận biết cách thực hiện phép toán $9 + 5$ như sau:

$$\begin{aligned} 9 + 5 &= 9 + 1 + 4 \text{ (tách 5 thành 1 + 4)} \\ &= 10 + 4 = 14. \end{aligned}$$

Đây cũng chính là cách tính được các tác giả sách giáo viên Toán lớp 2 mong đợi hình thành nơi học sinh: *“giáo viên nên giúp học sinh tự nhận biết (thông qua các thao tác với que tính):*

$$\begin{aligned} 9 + 5 &= 9 + 1 + 4 && \text{hoặc} && \begin{array}{c} 9 + 5 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 4 \end{array} \\ &= 10 + 4 \\ &= 14 && && 9 + 1 = 10; \quad 10 + 4 = 14. \end{aligned}$$

(SGV Toán 2 – Trang 49)

Hơn nữa, thông qua mô hình trên, học sinh không chỉ thực hiện được phép tính $9 + 5$ mà còn có thể dễ dàng hình thành cách thực hiện các phép toán “9 cộng với một số”.

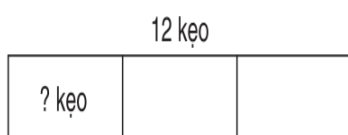
Như vậy, trong các sách giáo khoa Toán tiểu học, mô hình đã xuất hiện và được sử dụng như là một đồ dùng dạy học mà giáo viên được khuyến khích sử dụng, trong nhiều trường hợp chúng được sử dụng để xây dựng, hình thành kiến thức mới hoặc luyện tập, củng cố kiến thức cũ cho học sinh. Ở đây, học sinh được “cung cấp” và chỉ làm việc với các mô hình cho trước.

Tuy nhiên, trong trường hợp bài toán có lời văn – một dạng toán rất phổ biến trong các sách giáo khoa Toán tiểu học – các mô hình không được cho sẵn mà học sinh phải tự xây dựng các mô hình và sử dụng chúng để giải quyết các nhiệm vụ được giao.

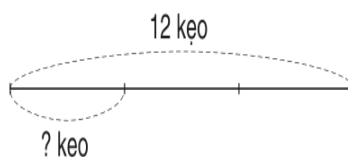
Chúng ta hãy xét ví dụ được sách giáo viên Toán lớp 3 – trang 17 sử dụng để minh họa cho phương pháp dạy học bài mới giúp học sinh tự phát hiện và tự giải quyết vấn đề của bài học:

“Khi dạy bài: “Tìm một trong các phần của một số” giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tự nêu bài toán: “Chị có 12 cái kẹo, chị cho em $\frac{1}{3}$ số kẹo đó. Hỏi chị cho em mấy cái kẹo?”. Nên gọi vài học sinh nhắc lại rồi nêu tóm tắt bài toán (bằng lời, bằng viết, bằng hình vẽ)”.

Như vậy, ở đây học sinh được yêu cầu/khuyến khích nêu tóm tắt bài toán, tức là họ phải đi xây dựng một mô hình của bài toán (có thể bằng lời, bằng viết, bằng hình vẽ), như 2 mô hình được đưa ra trong sách giáo viên Toán lớp 3:



Hình 1



Hình 2

Và, với khẳng định của các tác giả sách giáo viên *“Nếu học sinh đã tự tóm tắt bài toán hoặc hiểu được các tóm tắt như trên thì có thể tự tìm được cách giải bài toán, tức là có thể tự giải quyết vấn đề của bài học”* chúng ta cũng thấy được vai trò của các mô hình mà học sinh phải xây dựng. Việc xây dựng được mô hình (hoặc hiểu được cách xây dựng mô hình) sẽ giúp học sinh tự tìm được cách giải quyết vấn đề của bài học. Có lẽ chính vì

vậy mà các tác giả của sách giáo viên đã đề nghị giáo viên “*khuyến khích học sinh (dựa vào tóm tắt bài toán như hình 1 hoặc hình 2) để nêu cách giải quyết vấn đề*”.

3. Kết luận

Kết quả phân tích, tìm hiểu bộ sách giáo khoa và sách giáo viên Toán tiểu học nêu trên cho thấy: mô hình đã xuất hiện và được sử dụng trong sách giáo khoa Toán tiểu học ở Việt Nam. Các mô hình được sử dụng như là một đồ dùng dạy học để hình thành hoặc luyện tập, củng cố kiến thức cho học sinh. Trong nhiều trường hợp, với những mô hình phù hợp, các kiến thức được hình thành nơi học sinh một cách dễ dàng hơn. Ngoài ra, trong trường hợp bài toán có lời văn, học sinh có thể tham gia, thực hiện quá trình mô hình hóa toán học ở cấp tiểu học (tuy ở cấp độ đơn giản) và đó cũng là cơ hội để hình thành nơi họ năng lực mô hình hóa toán học. Tuy nhiên, thực tế dạy học hiện nay ra sao, học sinh có thực sự được tham gia vào quá trình mô hình hóa toán học hay không, năng lực mô hình hóa toán học của họ như thế nào? Chính vì vậy, việc nghiên cứu để tìm câu trả lời cho những câu hỏi trên là thật sự cần thiết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Lê Thị Hoài Châu, *Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm*, Tạp chí khoa học ĐHSP TPHCM – Số 65 năm 2014.
2. Đỗ Đình Hoan (2016), *Sách giáo khoa Toán 1,2,3,4,5*, Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Đỗ Đình Hoan (2016), *Sách giáo viên Toán 1,2,3,4,5*, Nhà xuất bản Giáo dục.
4. Nguyễn Danh Nam (2016). *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, Nhà xuất bản Đại học Thái Nguyên.
5. Nguyễn Thị Nga (2014), *Bàn về vấn đề dạy học mô hình hóa toán học ở trường phổ thông*, *Tạp chí khoa học ĐHSP Hà Nội* – Số 8 năm 2014.
6. Lê Văn Tiến (2005), *Phương pháp dạy học môn toán ở trường phổ thông (Các tình huống dạy học điển hình)*, NXB đại học Quốc Gia, Tp Hồ Chí Minh.

Tiếng nước ngoài

7. Ludwig von Bertalanffy (1968), *General System Theory*, George Braziller, New York.
8. Yves Chevallard (1989), *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*, *Petit x*, n0 19, pp. 43-72.
9. Dilwyn Edwards, Mike Hamson (2001), *Guide to Mathematical Modelling, Second Edition*. London: Palgrave Mathematical Guides.
10. Lyn English and James Watters (2005), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 297-304. Melbourne
11. Jean Christophe Poussin (1987), *Note Notions de système et de modèle*, *Cah. Sci. Hum.* 23 (3-4) : 439-441.

PHÂN TÍCH VÀ ĐỀ XUẤT ĐIỀU CHỈNH, BỔ SUNG HỆ THỐNG CÂU HỎI, BÀI TẬP MÔN TOÁN Ở TIỂU HỌC THEO HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC NGƯỜI HỌC

Vũ Quốc Chung*, Nguyễn Hữu Tuyển**

Tóm tắt

Bài báo trình bày quan điểm và tiêu chí phân tích chương trình; hệ thống câu hỏi, bài tập môn Toán ở tiểu học hiện nay. Từ đó, tác giả đề xuất cách tiếp cận và gợi ý một số kỹ thuật điều chỉnh, bổ sung hệ thống câu hỏi, bài tập theo hướng phát triển năng lực người học.

Từ khóa: phát triển năng lực, bài toán, tiêu chí.

Abstract

The article presents a perspective and analysis criteria for a system for math problems in current primary education. Following that basis, the author proposes an approach and a number of adjustments for the math problems towards the development of learner's competencies.

Keywords: development competencies, math problems, criteria.

1. Đặt vấn đề

Chương trình giáo dục môn Toán phổ thông đổi mới đã xác định phát triển theo tiếp cận năng lực [5]. Chương trình hiện hành có những ưu điểm: Đảm bảo tính phổ thông, cơ bản; Quán triệt tinh thần thống nhất, kế thừa và vận dụng được các thành tựu của khoa học sư phạm trong phát triển chương trình môn Toán; Đảm bảo tính tổng thể trong cấu trúc và giải quyết hợp lý mối quan hệ giữa phổ cập giáo dục Toán học với phát triển năng lực học tập cá nhân. Tuy nhiên, chương trình môn Toán phổ thông hiện hành còn có những hạn chế, bất cập trong tiếp cận xây dựng, phân bố và tổ chức thực hiện chương trình [4]. Căn cứ vào những định hướng đổi mới và đánh giá chung về chương trình giáo dục môn Toán phổ thông hiện hành, chúng tôi phân tích và đề xuất điều chỉnh, bổ sung hệ thống câu hỏi, bài tập toán ở Tiểu học theo hướng phát triển năng lực người học, góp phần từng bước đổi mới giáo dục Toán học ở Tiểu học.

2. Các vấn đề nghiên cứu

2.1 Phân tích chương trình môn Toán ở Tiểu học

Từ cách tiếp cận năng lực và quan điểm dạy học tích hợp, chúng tôi phân tích chương trình môn Toán và hệ thống câu hỏi, bài tập toán như sau:

2.1.1. Chương trình môn Toán

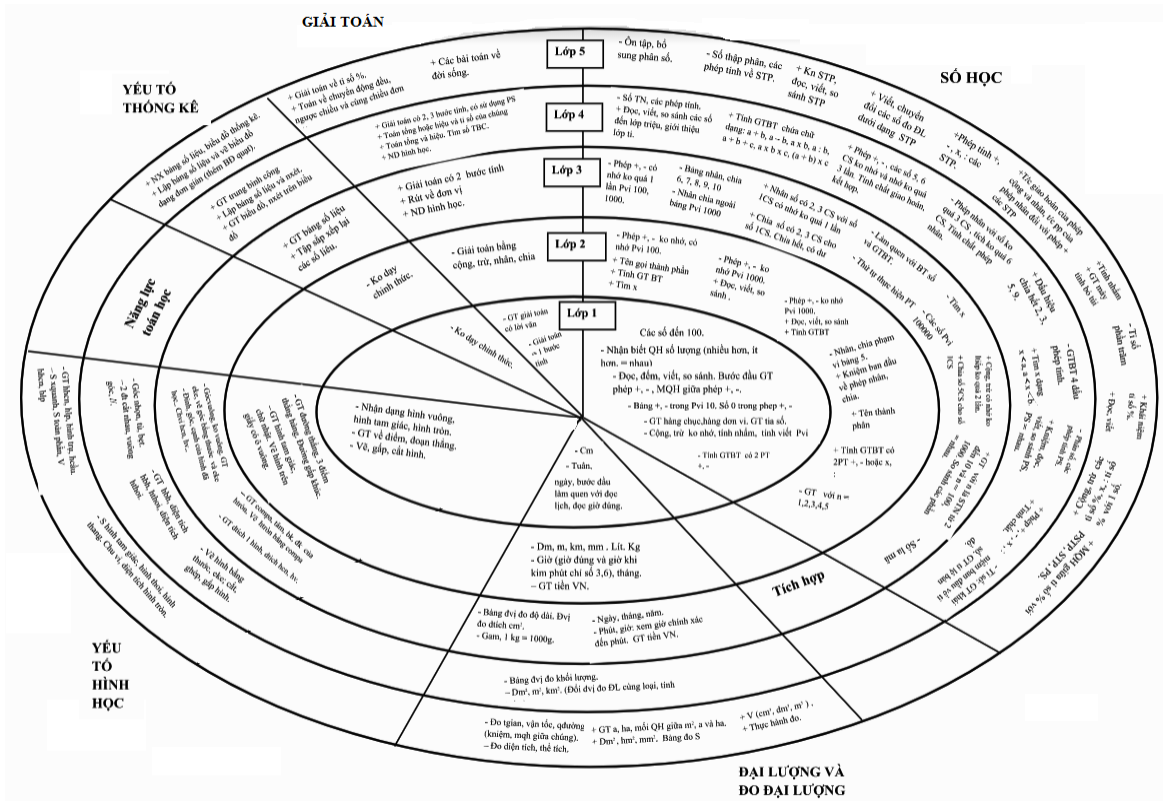
– Chương trình môn Toán hiện hành về cơ bản vẫn là tiếp cận nội dung, thông qua dạy học các nội dung học sinh có được kiến thức, kỹ năng. Vì vậy, những năng lực chung và năng lực đặc thù của môn Toán chưa được làm căn cứ để phát triển chương trình, “bị động” thu được qua nội dung dạy học [4].

* PGS. TS, Đại học Sư phạm Hà Nội

** ThS, Cao đẳng Sư phạm Bắc Ninh

– Quan điểm tích hợp và phân hóa chưa thật sự được quán triệt đầy đủ, dạy học tích hợp môn Toán với các môn học khác hoặc gắn bó với thực tiễn chưa thực sự phù hợp để phát triển năng lực học sinh trong hoạt động tổng hợp; đặc biệt dạy học tích hợp trong môn Toán chưa được quan tâm thống nhất trong toàn bộ chương trình; nhiều nội dung dạy học còn rời rạc, chưa phù hợp với đặc điểm nhận thức của học sinh tiểu học [6].

– Quan điểm dạy học thông qua mô tả khái niệm dựa trên các hoạt động mang tính trực quan và thực hành ở tiểu học chưa được giáo viên thường xuyên quán triệt vận dụng phù hợp với các bối cảnh.



Chúng tôi tóm tắt cấu trúc, nội dung và mối quan hệ về nội dung chương trình môn Toán giữa các lớp ở tiểu học trong sơ đồ 1.1 dưới đây:

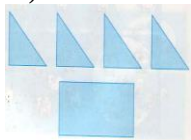
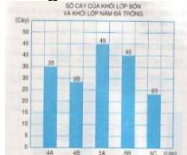
Sơ đồ 1.1. Nội dung chương trình môn Toán ở tiểu học

Nhìn vào sơ đồ trên đây, chúng ta có thể nhận xét về đặc điểm cấu trúc và nội dung chương trình môn Toán ở Tiểu học như sau:

Cấu trúc và nội dung chương trình môn Toán ở Tiểu học chưa thể hiện rõ yêu cầu phát triển các năng lực toán học cho học sinh, đây là căn cứ để phát triển chương trình, nhất là các năng lực toán học cốt lõi: tính toán, tư duy logic và giải quyết vấn đề liên quan đến toán học; Chưa tích hợp ở mức độ phù hợp để có thể tạo ra năng lực tổng hợp cho học sinh tiểu học.

2.1.2. Hệ thống câu hỏi, bài tập

Quan sát bảng thống kê hệ thống câu hỏi, bài tập môn Toán dưới đây (Hình 1.1) chúng ta thấy:

Lớp Nội dung	Lớp 1	Lớp 2	Lớp 3	Lớp 4	Lớp 5
Tổng số bài tập	517	660	633	655	592
Số học	416	384	302	362	198
	<i>Ví dụ:</i> Bài 1 tr51 Tính: $1 + 0 = 0 + 2 =$ $0 + 1 = 2 + 0 =$ $5 + 0 = 4 + 0 =$ $0 + 5 = 0 + 4 =$	<i>Ví dụ:</i> Bài 4 tr 53 Tìm x a, $x + 7 = 42$ b, $5 + x = 62$	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr32 Tính: a, $7 \times 5 + 15$ $7 \times 9 + 17$ b, $7 \times 7 + 21$ $7 \times 4 + 32$	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr10 a, Đọc các số sau: 2453; 65243; 62543; 53620. b, Cho biết chữ số 5 ở mỗi số trên thuộc hàng nào?	<i>Ví dụ:</i> Bài 1 tr68 Tính: a, $5,9 : 2 + 13,06$ b, $35,04 : 4 - 6,87$ c, $167 : 25 : 4$ d, $8,76 \times 4 : 8$
Đại lượng và đo đại lượng	19	79	64	43	94
	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr161 Đọc tờ lịch của ngày hôm nay rồi viết lần lượt tên ngày trong tuần, ngày trong tháng, tên tháng: a, Hôm nay là ngày tháng b, Ngày mai là ngày tháng	<i>Ví dụ:</i> Bài 3 tr126 Quay kim trên mặt đồng hồ để đồng hồ chỉ: 2 giờ; 1 giờ 30 phút; 6 giờ 15 phút; 5 giờ rưỡi.	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr47 Thực hành Đo độ dài rồi cho biết kết quả đo: a, Chiều dài cái bút của em; b, Chiều dài mép bàn học của em; c, Chiều cao chân bàn học của em.	<i>Ví dụ:</i> Bài 1 tr24 Viết số thích hợp vào chỗ chấm: a) 1dag = ...g 10g = ... dag b) 4dag = ... g 8hg = ... dag 1hg = ... dag 10dag = ... hg 3kg = ... hg 7kg = ... g 2kg 300g = ... g 2kg 30g = ... g	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr28 Khoanh vào chữ đặt trước câu trả lời đúng: 3cm^2 $5\text{mm}^2 =$ mm^2 Số thích hợp để viết vào chỗ chấm là: A. 35 B. 305 C. 350 D. 3500
Yếu tố hình học	31	51	62	40	20
	<i>Ví dụ:</i> Bài 4 tr169 Kẻ thêm một đoạn thẳng để có: a, Một hình vuông và một hình tam giác b, Hai hình tam giác	<i>Ví dụ:</i> Xếp 4 hình tam giác thành hình chữ nhật (xem hình vẽ): 	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr111 Em hãy vẽ hình tròn có: a, Tâm O, bán kính 2cm; b, Tâm I, bán kính 3cm.	<i>Ví dụ:</i> Bài 3 trang 56 Cho đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$ (như hình vẽ). Hãy vẽ hình vuông ABCD (có cạnh là AB) A ————— B	<i>Ví dụ:</i> Bài 1 tr 96 Vẽ hình tròn có: a, Bán kính 3cm; b, Đường kính 5cm.
Yếu tố thống kê	0	0	16	16	5
			<i>Ví dụ:</i> Bài 4 tr135 Cho dãy số liệu sau: 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45. Nhìn vào dãy trên hãy trả lời các câu hỏi sau: a, Dãy trên có tất cả bao nhiêu số? Số 25 là số thứ mấy trong dãy? b, Số thứ ba trong dãy là số nào? Số này lớn hơn số thứ nhất trong dãy bao nhiêu đơn vị? c, Số thứ hai lớn hơn số thứ mấy trong dãy?	<i>Ví dụ:</i> Bài 1 tr31 Biểu đồ dưới đây nói về số cây của khối lớp Bốn và khối lớp Năm đã trồng:  Nhìn vào biểu đồ trên hãy trả lời các câu hỏi sau: a) Những lớp nào tham gia trồng cây? b) Lớp 4A trồng được bao nhiêu cây? Lớp 5B	<i>Ví dụ:</i> Bài 3 tr175 Khoanh vào chữ đặt trước câu trả lời đúng: Biểu đồ dưới đây cho biết kết quả điều tra về ý thích chơi các môn thể thao của 40 học sinh:  Học sinh không thích bóng đá có khoảng:

				trồng được bao nhiêu cây? Lớp 5C trồng được bao nhiêu cây? d) Có mấy lớp trồng được trên 30 cây, là những lớp nào? e) Lớp nào trồng được nhiều cây nhất? Lớp nào trồng được ít cây nhất?	A. 5 học sinh. B. 9 học sinh. C. 25 học sinh. D. 20 học sinh.
	51	146	189	194	275
Giải toán có lời văn	<i>Ví dụ:</i> Có 10 cây cam và 8 cây chanh. Hỏi có tất cả bao nhiêu cây?	<i>Ví dụ:</i> Bài 3 tr62 Nhà bạn Hà nuôi 34 con gà, nhà bạn Ly nuôi ít hơn nhà bạn Hà 9 con gà. Hỏi nhà bạn Ly nuôi bao nhiêu con gà?	<i>Ví dụ:</i> Bài 3 tr82 Có 240 quyển sách xếp đều vào 2 tủ, mỗi tủ có 4 ngăn. Hỏi mỗi ngăn có bao nhiêu quyển sách, biết rằng mỗi ngăn có số sách như nhau?	<i>Ví dụ:</i> Bài 4 tr62 Một tấm kính hình chữ nhật có chiều rộng 30cm, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tính diện tích của tấm kính đó.	<i>Ví dụ:</i> Bài 2 tr24 Một con chim sâu cân nặng 60g. Một con đà điểu cân nặng 120kg. Hỏi con đà điểu nặng gấp bao nhiêu lần con chim sâu?

Hình 1.1. Bảng thống kê hệ thống câu hỏi, bài tập môn Toán ở tiểu học

1. Số lượng câu hỏi, bài tập trung bình trong một tiết ở các lớp là xấp xỉ (từ 3,4 đến 3,8 bài): Cần tăng thêm số lượng câu hỏi, bài tập có các mức độ khác nhau, tạo cơ hội cho học sinh luyện tập kỹ năng giải toán (đặc biệt lớp 4, lớp 5).
2. Số lượng câu hỏi, bài tập phân bố không đồng đều so với yêu cầu hoạt động và nghèo nàn về chủng loại để đáp ứng đặc điểm nhận thức học sinh tiểu học.
3. Phân bố số lượng câu hỏi, bài tập đối với từng mạch kiến thức trong mỗi lớp không tương thích với khối lượng nội dung kiến thức của mỗi mạch kiến thức, chưa khai thác được yêu cầu tích hợp giữa các nội dung của từng mạch kiến thức. Ví dụ: Lớp 4 có 362 bài tập về số học nhưng chỉ có 43 bài tập về đại lượng, 40 bài tập về yếu tố hình học và 16 bài tập về yếu tố thống kê. Thực ra, có thể dạy học và luyện tập về số học thông qua các bài tập về đại lượng, yếu tố hình học, yếu tố thống kê vừa đảm bảo Chuẩn kiến thức, kỹ năng vừa tích hợp được nội dung các mạch kiến thức để phát triển năng lực cho học sinh.
4. Hệ thống các câu hỏi, bài tập về yếu tố thống kê rất ít về số lượng và mờ nhạt về đặc điểm, trong khi đó câu hỏi, bài tập về yếu tố thống kê có thể tổ chức các hoạt động trải nghiệm rất phù hợp với đặc điểm nhận thức của học sinh; đồng thời thể hiện được ý nghĩa, giá trị của toán học trong đời sống, kết nối toán học với thực tiễn. Trong khi đó, yếu tố thống kê được đưa vào dạy học từ lớp 1 ở Singapor và học liên tục một cách rất tự nhiên (như trò chơi) dần dần lên cuối bậc trung học [4].
5. Số lượng các câu hỏi, bài tập có nội dung thực tiễn là đáng kể, tuy nhiên cách diễn đạt nội dung bài tập chỉ là các mô phỏng thực tiễn, thiếu tính hấp dẫn, tính thực tế phù hợp và gần gũi với học sinh tiểu học. Chính vì vậy, các bài toán có nội dung thực tiễn trong sách giáo khoa hiện hành chưa thật sự thu hút và tạo động lực học toán đối với học sinh.

6. Nội dung bài tập chưa thể hiện rõ tính liên thông giữa các lớp trên từng mạch kiến thức mặc dù thiết kế chương trình ở Sơ đồ 1.1 có thể hiện yêu cầu này.

7. Đặc biệt, hệ thống bài tập chưa thiết kế được các hoạt động học toán thông qua trải nghiệm, ***nhất là các trải nghiệm thực tiễn toán học ngay trong lớp học***. Đây là một mô hình giáo dục toán học rất hiệu quả, phù hợp với đặc điểm nhận thức của học sinh tiểu học.

Nhìn một cách tổng thể hệ thống câu hỏi, bài tập chưa được thiết kế về cấu trúc và nội dung dựa trên ý tưởng thống nhất về phát triển năng lực trong mỗi lớp và toàn cấp tiểu học. Mức độ phát triển năng lực chưa được thể hiện cụ thể qua hệ thống câu hỏi, bài tập. Bài tập chủ yếu dành cho yêu cầu luyện tập, củng cố kiến thức, kỹ năng của từng bài học.

2.2. Tìm kiếm các căn cứ đề xuất hệ thống câu hỏi, bài tập môn Toán theo hướng phát triển năng lực người học.

2.2.1. Quan niệm về dạy học toán phát triển được năng lực của học sinh.

Năng lực nói chung và năng lực toán học nói riêng của học sinh chỉ được hình thành và phát triển qua hoạt động [3]. Trong dạy học Toán, hoạt động giải bài tập toán có ý nghĩa quan trọng và quyết định sự phát triển các năng lực toán học của học sinh. G.Polia đã nói ***“Con đường duy nhất để học Toán là làm Toán”*** [7]. Vì vậy, chúng tôi lựa chọn nghiên cứu để xây dựng hệ thống câu hỏi, bài tập, nhằm tạo ra một “môi trường” chứa đựng nhiều cơ hội, nơi mà mọi học sinh bình đẳng về điều kiện rèn luyện, phát triển các năng lực toán học.

Tuy nhiên, trong “môi trường” đó hoạt động làm toán như thế nào là phù hợp và có hiệu quả cao đối với học sinh tiểu học? Theo chúng tôi: đó là tổ chức học sinh khám phá toán học qua hoạt động trải nghiệm. Trong bài nói chuyện với Hội đồng toán học California, G.Polia đã nhấn mạnh: ***“Đừng tiết lộ toàn bộ bí mật (liên quan tới kiến thức) cùng một lúc – hãy để cho học sinh có cơ hội phán đoán trước khi bạn đưa ra lời giải đáp - để cho các em tự mày mò khám phá càng nhiều càng tốt”*** và kết thúc bài nói chuyện G.Polia đã chia sẻ ***“Tôi đã vừa nói cho các bạn nghe những quan điểm, ý tưởng của riêng tôi về cách thức giảng dạy toán học. Đó là học tập chủ động, ưu tiên hành động và nhận thức, và giảng dạy bằng cách cho phép học sinh bắt đầu hoạt động với việc suy đoán. Tôi thực sự hy vọng những điều này sẽ hữu ích cho các bạn”*** [7].

Có thể nói lời khuyên của G.Polia về hoạt động của học sinh trong dạy học toán chính là hoạt động trải nghiệm. Đó là quá trình học sinh ***được tự mình, trực tiếp mò mẫm và phát hiện*** các tri thức toán học ***dựa trên các kinh nghiệm sẵn có***, từng bước ***chuyển hóa kinh nghiệm học tập*** dưới sự ***định hướng, hỗ trợ phù hợp*** của giáo viên nhằm đạt được mục tiêu của bài học. Đây cũng là cách tiếp cận dạy học toán qua hoạt động trải nghiệm theo mô hình David A. Kolb [8].

2.2.2 Xây dựng hệ thống câu hỏi, bài tập môn toán ở tiểu học để đánh giá năng lực của học sinh.

Để đánh giá năng lực của học sinh, chúng tôi đề xuất thiết kế hệ thống câu hỏi, bài tập theo 4 mức nhận thức của học sinh trong dạy học toán: Biết, Hiểu, Vận dụng theo mẫu và Vận dụng trong tình huống mới. Có thể coi đây là vận dụng thang Bloom

trong đánh giá mức độ nhận thức. Từ đó xây dựng hệ thống câu hỏi, bài tập tương thích với các mức độ nhận thức của học sinh trong dạy học môn Toán ở tiểu học.

Những kết quả bước đầu khi vận dụng hệ thống câu hỏi, bài tập theo 4 mức để đánh giá năng lực học sinh tiểu học (Thông tư 22/2016/TT-BGDĐT sửa đổi Quy định đánh giá học sinh tiểu học kèm theo Thông tư 30/2014/TT-BGDĐT) đã thể hiện những ưu điểm và hạn chế cần tiếp tục hoàn thiện [1].

2.3. Định hướng xây dựng hệ thống câu hỏi, bài tập

Các câu hỏi, bài tập sẽ **khích lệ và hỗ trợ** học sinh **tự ôn tập**, củng cố, hệ thống hóa và **vận dụng** các kiến thức, kĩ năng Toán học để phát triển một số **năng lực chung, năng lực đặc thù** có lợi thế của môn Toán (**tính toán, tư duy logic và giải quyết vấn đề một cách sáng tạo...**) trong quá trình giáo dục nhằm phát triển toàn diện học sinh.

Hệ thống câu hỏi, bài tập bao gồm: câu hỏi, bài tập và các **hoạt động trải nghiệm về toán học** mà học sinh sẽ thực hiện trên cơ sở nội dung các kiến thức, kĩ năng các em đã được học trong một **bài học** (hoặc những bài trong một **chủ đề**) theo 04 mức độ. Nội dung các câu hỏi, bài tập và hoạt động được diễn đạt ngắn gọn, dễ hiểu và nhẹ nhàng, gần gũi với học sinh.

Nhiệm vụ học tập trong các bài tập được thiết kế để học sinh thấy được ý nghĩa thực tiễn của việc học tập môn Toán trong nhà trường, gần gũi với **đời sống thực** hằng ngày của học sinh. Thông qua hoạt động vận dụng Toán học trong lớp học và cuộc sống xung quanh, **các năng lực và phẩm chất** của mỗi học sinh được phát triển **theo hướng tích hợp** trong nội bộ môn Toán cũng như với các môn học khác thành **các chủ đề** (tương ứng với sách giáo khoa - phần lý thuyết). Đặc biệt, qua đây học sinh sẽ **hứng thú** học toán, thấy được sức mạnh và vẻ đẹp của toán học.

Phụ huynh học sinh cũng có nhiều điều kiện và cơ hội rất cụ thể (được thiết kế trong các bài tập) để tham gia vào các hoạt động cùng học sinh, thông qua đó mỗi phụ huynh sẽ gần gũi hơn với học sinh, hiểu rõ hơn con em mình và **kịp thời hỗ trợ phù hợp** cho học sinh khi cần thiết. Đặc biệt **phụ huynh học sinh** có thể trực tiếp tham gia cùng học sinh trong các tình huống thực tiễn có nội dung Toán học ở gia đình và ngoài xã hội được thiết kế trong bài tập.

Học sinh có thể coi đây là các bài tập tự luyện tập hoặc là các đề thi tự đánh giá năng lực Toán học bao gồm các câu hỏi, bài tập có 4 mức độ.

2.4. Cấu trúc hệ thống câu hỏi, bài tập môn Toán theo hướng phát triển năng lực người học.

Hệ thống câu hỏi, bài tập bao gồm:

- Câu hỏi, bài tập **trắc nghiệm** khách quan theo 4 mức độ, **tập trung phát triển năng lực tính toán đặc biệt là tính nhẩm một cách thông minh**.

- Câu hỏi, bài tập **tự luận** theo 4 mức độ **hướng vào mục tiêu phát triển năng lực lập luận có lí và lập luận logic**.

- Câu hỏi, bài tập thực hành hoạt động toán học để **phát triển năng lực giải quyết vấn đề** (các bài toán mở giúp học sinh **tập vận dụng** nội dung đã học vào **đời sống thực của trẻ em** thông qua **hoạt động trải nghiệm**).

2.5. Một số ví dụ minh họa

1. Bài tập (trắc nghiệm)

Khoanh tròn vào kết quả đúng:

Ví dụ 1. [Biết]. Cho dãy số: 2289; 2269; 2249;.....;;.....
Số thứ 6 trong dãy số đó là:

- A. 2229 B. 2219 C. 2239 D. 2189

Ví dụ 2. [Hiểu]. Số liền sau của số bé nhất có 4 chữ số là:

- A. 1000 B. 998 C. 999 D. 1001

Ví dụ 3. [Hiểu]. Biết $1995 : x = 5$. Giá trị của x là:

- A. 399 B. 305 C. 309 D. 349

Ví dụ 4. [Vận dụng theo mẫu]. Ngày 21 tháng 7 là thứ ba. Hỏi ngày 5 tháng 8 cùng năm đó là thứ mấy?

- A. Thứ ba B. Thứ năm C. Thứ sáu D. Thứ tư

Ví dụ 5. [Vận dụng trong tình huống mới]. Để có 200 000 đồng ta cần lấy:

- A. 1 tờ 100 000 đồng, 1 tờ 50 000 đồng, 2 tờ 20 000 đồng
B. 3 tờ 50 000 đồng, 2 tờ 20 000 đồng, 1 tờ 10 000 đồng
C. 1 tờ 100 000 đồng, 2 tờ 10 000 đồng, 2 tờ 20 000 đồng
D. 2 tờ 50 000 đồng, 3 tờ 10 000 đồng, 2 tờ 20 000 đồng

Ví dụ 6. [Vận dụng trong tình huống mới]. Người ta lắp các tấm kính vào cửa sổ. Biết rằng mỗi cửa sổ cần 9 tấm kính. Hỏi 2017 tấm kính thì lắp được nhiều nhất bao nhiêu cửa sổ như thế và còn thừa mấy tấm kính?

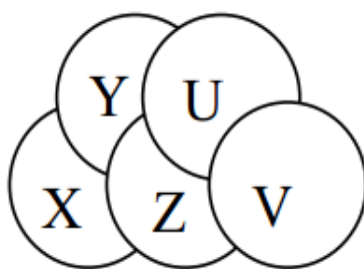
- A. 224 cửa sổ và thừa 1 tấm kính
B. 225 cửa sổ và thừa 3 tấm kính
C. 200 cửa sổ và thừa 7 tấm kính
D. 221 cửa sổ và thừa 8 tấm kính

2. Bài tập (tự luận)

Ví dụ 1: [Vận dụng theo mẫu]. Mẹ mua cho Hà một quyển sách giá 25 000 đồng và một chiếc bút có giá ít hơn giá quyển sách 7 000 đồng. Mẹ đưa cho cô bán hàng một tờ 100 000 đồng. Hỏi cô bán hàng phải trả lại mẹ bao nhiêu tiền?

Ví dụ 2: [Vận dụng trong tình huống mới]. Quảng đường từ nhà đến trường dài 1517m, quãng đường từ siêu thị đến sân vận động dài 2180m. Tính quãng đường từ nhà đến sân vận động, biết rằng hai quãng này có chung nhau một chiếc cầu từ siêu thị đến trường dài 200m.

Ví dụ 3: [Vận dụng trong tình huống mới]. Hình sau có 5 miếng bìa hình tròn có màu khác nhau. Miếng bìa màu da cam nằm phía trên miếng bìa màu xanh lá cây nhưng lại nằm dưới tất cả các miếng bìa còn lại. Miếng bìa màu tím nằm trên miếng bìa xanh da trời nhưng lại nằm dưới miếng bìa màu đỏ. Hỏi miếng bìa Z là miếng màu gì?



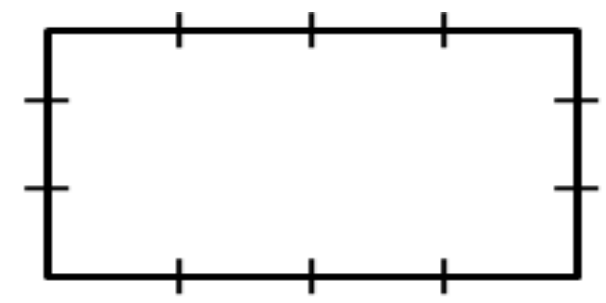
3. Bài tập (hoạt động trải nghiệm)

Ví dụ 1. Em hãy cắt một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài 12cm và chiều rộng 7cm rồi dán vào phần trống dưới đây.

a, Tính diện tích tấm bìa hình chữ nhật đó.

b, Theo em từ tấm bìa này ta có thể cắt được nhiều nhất bao nhiêu tấm bìa hình chữ nhật nhỏ hơn có chiều dài là 4cm và chiều rộng 3cm (*dùng thước vẽ các đường cắt của em lên tấm bìa đó*)?

Ví dụ 2. Cho một hình chữ nhật có chiều dài là 4cm và chiều rộng là 3cm như hình vẽ bên.



a, Em hãy dùng thước để kẻ thành lưới ô vuông với các hình vuông có cạnh 1cm.

b, Hỏi có bao nhiêu hình vuông có cạnh 1cm trong hình em vừa vẽ được?

c, Trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu hình vuông?

d, Hãy tô màu vào hình vuông cạnh 1cm ở góc dưới bên phải của hình vẽ sau đó cho biết có bao nhiêu hình vuông trong hình vẽ không có chứa hình vuông được tô màu.

Ví dụ 3: Em dùng thước đo độ dài của 5 đồ vật ở nhà và điền kết quả theo thứ tự từ bé đến lớn vào bảng dưới đây:

STT	Tên đồ vật	Độ dài
1		
2		
3		
4		
5		

3. Kết luận

Trong quá trình góp ý kiến hoàn thiện Dự thảo Chương trình giáo dục phổ thông tổng thể ở Việt Nam hiện nay, để tiến tới có chương trình môn học và sách giáo khoa chính thức, chúng tôi cho rằng có nhiều việc cần đồng thời tiến hành. Việc xây dựng hệ thống câu hỏi, bài tập môn toán ở Tiểu học theo hướng phát triển năng lực người học là việc làm thiết thực góp phần đổi mới giáo dục toán học. Với cách tiếp cận trên đây, mỗi giáo viên có thể tham khảo để phát triển chương trình lớp học thông qua tự thiết kế câu hỏi, bài tập môn toán có 4 mức độ, phù hợp nhất với học sinh của các lớp ở tiểu học. Từ đó từng bước thực hiện dạy học môn toán theo hướng phát triển năng lực của học sinh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hoài Châu, Vũ Như Thu Hương (2016), “*Dạy học toán và đánh giá học sinh theo định hướng phát triển năng lực*”, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên.
2. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2007), Toán 1, 2, 3, 4, 5, Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Nguyễn Bá Kim (2006), “*Phương pháp dạy học đại cương môn toán*”, NXB Đại học sư phạm Hà Nội.
4. Kỷ yếu Hội nghị “*Tổng kết đánh giá chương trình, sách giáo khoa giáo dục phổ thông hiện hành của Việt Nam*”, Hà Nội, tháng 12/2016. (The conference of summarization and assessment of the existing curriculum and textbooks).
5. Nghị quyết 29 “*Về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế*”.
6. Dương Tiến Sỹ (2002), “*Phương thức và nguyên tắc tích hợp các môn nhằm nâng cao chất lượng giáo dục và đào tạo*”, Tạp chí Giáo dục, số 26, tháng 3/2002.
7. Trang web: <http://cmc-math.org/cmc-membership/cmc-infinity-wall/george-polya/>.
8. David A. Kolb (2015), *Experiential learning*, by Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Môi trường tin học có tạo thuận lợi cho dạy học tích hợp? Hai trường hợp được nghiên cứu

Vũ Như Thư Hương*

Tóm tắt

Dạy học tích hợp góp phần làm phong phú cho việc tiếp cận và nghiên cứu một đối tượng toán học trong mối liên quan với một số môn học khác, với thực tế cuộc sống. Nói cách khác, nó phá bỏ vách ngăn giữa các môn học. Hiện nay, vấn đề liên môn và vấn đề mô hình hóa được xem là hai trong số những phương thức để thực thi định hướng dạy học tích hợp.

Trong báo cáo này, chúng tôi trình bày nghiên cứu về hai trường hợp trong đó yếu tố môi trường tin học đóng vai trò như một công cụ trung gian cho phép:

- tiếp cận tri thức toán từ hai phương diện đại số và hình học,
- kết nối tri thức cần dạy trong toán học và trong vật lý bằng việc đem lại nghĩa vật lý cho tri thức toán.

Nghiên cứu này được thực hiện trong khuôn khổ chương trình bồi dưỡng giáo viên phổ thông tại Việt Nam.

Từ khoá: Dạy học tích hợp, mô hình hóa, liên môn, môi trường tin học, nghĩa vật lý.

Résumé

Enseignement intégré offre plusieurs approches pour l'étude d'un objet mathématique dans ses liens avec certains domaines et avec la vie réelle. Autrement dit, il enlève les cloisons entre des disciplines. Au fait l'interdisciplinarité et la modélisation mathématique sont deux des choix pour un tel enseignement.

Dans cette communication, nous présenterons une étude de deux cas où l'environnement informatique est visé comme un outil intermédiaire permettant :

- d'approcher un savoir mathématique par deux approches : arithmétique et géométrie,
- de connecter un savoir mathématique avec la physique en lui donnant un sens physique.

Cette étude est mise en place lors de formation continue pour les enseignants aux provinces.

Mots-clés: Enseignement intégré, modélisation mathématique, interdisciplinarité, environnement informatique, sens physique.

1. Đặt vấn đề

Trong bối cảnh giáo dục hiện nay tại Việt Nam, sự có mặt và phát triển của công nghệ thông tin đã thật sự ảnh hưởng và tác động đến phương pháp dạy của người thầy phương pháp học của người trò. Môi trường tin học đã mở ra một « thời đại mới » tạo thuận lợi cho phương pháp dạy học trực quan, dạy học khám phá, phương pháp dạy học theo lộ trình thực nghiệm, ... Bên cạnh đó, xu hướng dạy học tích hợp-liên môn đang rất được quan tâm tại các nước phát triển trên thế giới, đem lại những lợi ích đặc

* TS, Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

biệt khi nó đòi hỏi sự kết nối các tri thức từ nhiều môn học để giải quyết vấn đề mà người học có khả năng phải đối mặt trong thực tế cuộc sống:

- Việc học liên môn khiến cho việc học tập trở nên gần gũi với thực tế hơn, cụ thể hơn và toàn diện hơn (Lowe, 2002).
- Khi chuẩn bị một dự án học tập liên môn, học sinh sẽ phải tập trung vào việc tuyển chọn dữ kiện theo cách cá nhân rồi tiến hành giải quyết các vấn đề cũng như các mối liên kết giữa các môn học đối với các khái niệm đã được học trong từng môn riêng lẻ.
- Cho phép chuyển giao kỹ năng của người học giữa các môn học.
- Cho phép nhìn lại từng môn học theo cách nhìn mới (Camel et Fargue-Lelievre, 2009).
- Các dự án liên môn đem lại cho người học một kiến thức phong phú về đề tài đã nghiên cứu, cởi mở hơn so với việc từng môn học có thể đem lại kiến thức đó.

Vấn đề mà chúng tôi quan tâm và đề cập đến trong phạm vi bài báo này là tìm kiếm những yếu tố có thể được xem như điều kiện cần cho phép tổ chức dạy học Toán theo hướng tích hợp nhờ môi trường tin học.

2. Dạy học tích hợp : phân loại và lựa chọn

Có những hình thức dạy học tích hợp nào ?

Từ điển Giáo dục học¹ đưa ra định nghĩa về khái niệm tích hợp như sau : “*Tích hợp là hành động liên kết các đối tượng nghiên cứu, giảng dạy, học tập của cùng một lĩnh vực hoặc vài lĩnh vực khác nhau trong cùng một kế hoạch dạy học*”. Do vậy, dạy học tích hợp có thể được xem là kết hợp nhiều lĩnh vực có liên quan đến một đối tượng cần dạy và tổ chức dạy học đối tượng đó thông qua các hoạt động mà người học cần thực hiện để khám phá tri thức mới. Chúng tôi quan tâm đến hai hình thức tích hợp sau đây:

- *Tích hợp trong nội tại Toán học* : tìm kiếm sự kết nối giữa các nội dung, chủ đề; hình thành các chủ đề mới gắn liền với thực tiễn dựa trên các chủ đề, nội dung đã có.
- *Tích hợp ngoài Toán học* : gồm 3 phương thức
 - Tích hợp liên môn: phối hợp sự đóng góp của nhiều môn học để nghiên cứu và giải quyết một tình huống;
 - Tích hợp đa môn: một chủ đề có thể xem xét trong nhiều môn học khác nhau (ví dụ hình thức sát nhập các môn Vật lý, Hóa học, Sinh học thành môn Khoa học);
 - Tích hợp xuyên môn: tìm cách phát triển ở học sinh những kỹ năng xuyên môn có tính chất chung và áp dụng được ở mọi nơi (phổ biến là hình thức dạy học theo dự án).

¹ Nhóm tác giả Nguyễn Văn Giao, Nguyễn Hữu Quỳnh, Vũ Văn Tảo, Bùi Hiền (2001), Nhà xuất bản Từ điển Bách khoa.

Như chúng ta đều biết, môn toán được dạy ở nhà trường phổ thông bao gồm nhiều phân môn : số học, đại số, giải tích, hình học, ... Có một số tri thức toán có thể được xem xét từ nhiều khía cạnh khác nhau ứng với các phân môn khác nhau, chẳng hạn như trường hợp các khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng,... với biểu diễn hình học và biểu diễn số (tọa độ, phương trình,...). Vậy nếu như xem xét một tri thức toán học từ hai phương diện *hình* và *số* chẳng hạn, thì chúng tôi xem đó là hình thức tích hợp trong nội tại môn Toán.

Trong khi đó lại có một số tri thức toán, dù chỉ thuộc một phân môn nhưng lại có thể được khảo sát từ vài lĩnh vực khác nhau. Ví dụ trường hợp các đối tượng như vectơ, hệ trục tọa độ, phép đối xứng trục,... được khảo sát trong Toán lẫn trong Vật lý. Trong trường hợp này, chúng tôi coi đây là hình thức tích hợp ngoài Toán học.

Môi trường nào được lựa chọn cho dạy học Toán theo hướng tích hợp ?

Trong phạm vi nghiên cứu của bài báo này, chúng tôi chọn môi trường tin học, cụ thể là môi trường làm việc với phần mềm Geogebra vì những lý do chính sau đây :

- Thứ nhất, Geogebra cho phép thiết kế các hoạt động theo hướng tương tác được giữa người sử dụng và môi trường tin học. Điều này tạo cơ hội cho người học tự tìm tòi, dự đoán và khám phá tri thức mới.
- Thứ hai, Geogebra cung cấp nhiều màn hình hiển thị song song cho phép tích hợp nhiều hệ biểu đạt đồng thời, tạo cơ hội cho việc tích hợp nội tại trong Toán học.
- Kế đến, đây là phần mềm vận hành trên môi trường đa nhiệm, phù hợp cho nhiều phương tiện công nghệ thông tin như máy tính (desktop và laptop), thiết bị di động (điện thoại thông minh, máy tính bảng), hoạt động được ở cả hai chế độ offline và online (theo nghĩa không cần và có cần nối kết mạng internet).
- Sau cùng là « tính mở » của phần mềm miễn phí (mã nguồn mở) đang rất được cộng đồng giáo dục trên thế giới chọn sử dụng.

3. Hai trường hợp được nghiên cứu

Hai ví dụ sau đây minh họa cho hai trường hợp : dạy học tích hợp trong nội tại Toán học và dạy học tích hợp liên môn ngoài Toán học.

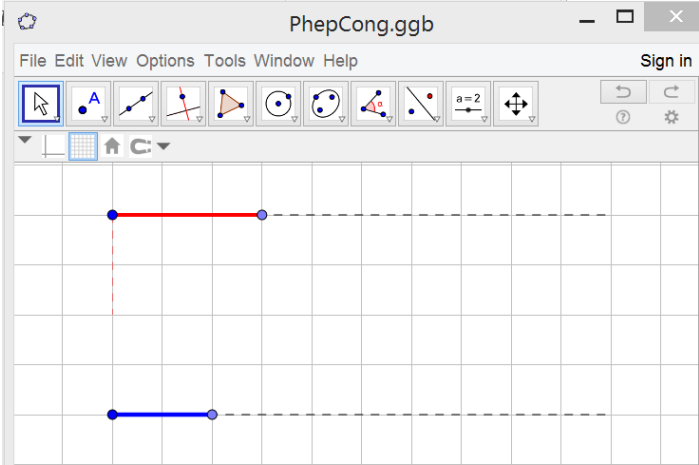
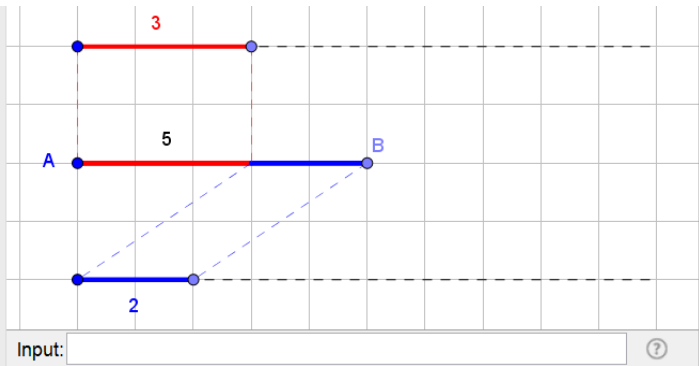
Trường hợp 1 : Tích hợp trong nội tại Toán học (Số học - Hình học)

Cụ thể trong trường hợp này, chúng tôi xây dựng một tình huống tích hợp hình học với số học gồm nhiều pha, cho phép giải quyết một số vấn đề số học bằng công cụ hình học ở lớp một, đó là :

- Làm nảy sinh nhu cầu cộng hai giá trị (số tự nhiên)
- Đem lại nghĩa hình học cho *phép cộng hai số* và nghĩa hình học cho *tổng của hai số hạng*.
- Xây dựng bảng cộng hai số.
- Phát hiện tính “giao hoán”² của phép cộng hai số.

² Tính chất này chưa được chính thức cung cấp cho học sinh tiểu học mà chỉ được giới thiệu qua nhận xét về kết quả.

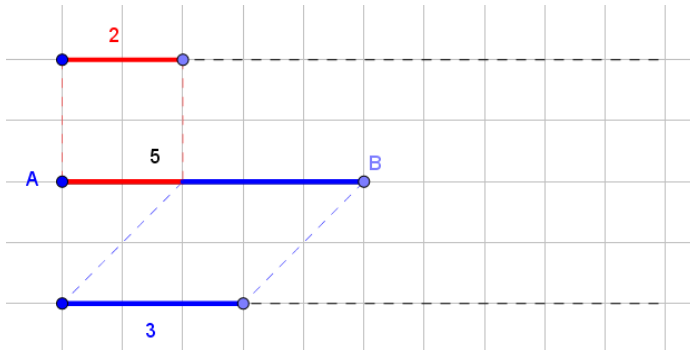
Sau đây là ví dụ minh họa tình huống.

Mô tả tình huống và hoạt động của GV	Tri thức nhắm đến
Pha 1: Sử dụng môi trường tin học³ với phần mềm Geogebra (xem hình), và hỏi : - Đoạn thẳng màu đỏ có độ dài là bao nhiêu ? - Đoạn thẳng màu xanh có độ dài là bao nhiêu ?  Hình 1: Biểu diễn hình học của hai số hạng	- Biểu diễn hình học cho số hạng thứ nhất : đoạn thẳng đỏ có độ dài bằng 3. - Biểu diễn hình học cho số hạng thứ hai : đoạn thẳng xanh có độ dài bằng 2.
Pha 2: Thông báo <i>Đoạn thẳng AB được ghép lại từ hai đoạn thẳng màu đỏ và đoạn thẳng màu xanh liên tiếp nhau, thẳng hàng.</i>  Hình 2: Biểu diễn hình học minh họa phép cộng hai số	Nghĩa hình học của phép cộng hai số trong tình huống này: là tạo ra đoạn thẳng mới từ hai đoạn thẳng ban đầu, bằng cách đặt chúng thẳng hàng và liên tiếp nhau.
Pha 3: Yêu cầu học sinh so sánh độ dài đoạn thẳng AB với độ dài các đoạn thẳng màu đỏ và màu xanh⁴. - Yêu cầu học sinh đọc độ dài đoạn thẳng AB⁵ ?	- Tổng của hai số hạng luôn lớn hơn mỗi số hạng thành phần. - Tổng của hai số hạng.

³ Sử dụng file PhepCong.ggb được thiết kế trong môi trường Geogebra.
⁴ Yêu cầu quan sát : tình huống này sinh nhu cầu so sánh số hạng thành phần và tổng số.

Pha 4:

- Thay đổi độ dài đoạn thẳng màu đỏ sao cho bằng với độ dài đoạn thẳng màu xanh. Làm tương tự cho đoạn thẳng màu xanh. Yêu cầu học sinh đọc độ dài đoạn thẳng AB?



Hình 3: Biểu diễn minh họa tính giao hoán của phép cộng hai số hạng

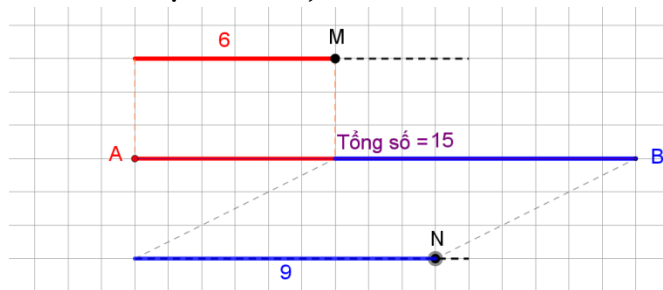
- Tính giao hoán của phép cộng

$$3+2=5$$

$$2+3=5$$

Pha 5:

- Cho hiển thị⁶ điểm M, N



Hình 4. Biểu diễn hình học minh họa hình học của tổng hai số

- Di chuyển điểm M trên thanh thứ nhất (khi đó đoạn thẳng màu đỏ có độ dài thay đổi theo). Yêu cầu học sinh đọc độ dài đoạn màu đỏ.

- Khi di chuyển điểm N trên thanh thứ hai thì đoạn thẳng màu xanh có độ dài thay đổi. Yêu cầu đọc độ dài đoạn màu xanh.

Mỗi khi dừng điểm M (hay điểm N), độ dài đoạn thẳng AB sẽ tự động hiển thị như là đoạn ghép liên tiếp của hai đoạn thẳng đỏ và xanh, do đó nó có độ dài tương ứng với tổng độ dài hai đoạn thẳng đỏ và xanh.

- Thay đổi giá trị của số hạng thứ nhất

- Thay đổi giá trị của số hạng thứ hai

Nghĩa hình học của tổng hai số:
Với mỗi cặp giá trị của số thứ nhất và số thứ hai, tổng của hai số sẽ là 1 giá trị xác định như là độ dài đoạn ghép thẳng và liên tiếp của hai đoạn thẳng ban đầu.

⁵ Yêu cầu tính toán: tình huống này sinh nhu cầu cộng hai số hạng.

⁶ Các điểm M, N được thiết kế sao cho có thể hiển thị/ẩn theo tùy chọn của người sử dụng.

Pha 6 : Giữ cố định <i>số thứ nhất</i>⁷ là 1, lần lượt thay đổi giá trị <i>số thứ hai</i> từ 1, 2, 3,... và yêu cầu học sinh đọc độ dài đoạn ghép AB và cho HS ghi thành bảng cộng.	Hình thành bảng cộng của 2 số: 1+2 1+3

Trường hợp 2: Tích hợp ngoài Toán học (liên môn Toán-Vật lý)

Tình huống được chúng tôi xây dựng nhằm tích hợp liên môn Toán và Vật lý với tri thức được chọn là *phép đối xứng trục* trong Toán tương ứng với *sự phản xạ qua gương phẳng* trong Vật lý, dành cho học sinh lớp 10. Để tham gia vào hoạt động này, học sinh cần huy động kiến thức liên quan đến kỹ thuật vẽ ảnh của một vật phản xạ qua gương phẳng trong mối liên hệ với phép đối xứng qua trục. Đối với hình biểu diễn hình học cho tình huống này, trục đối xứng chính là bề mặt của gương khi dựng đứng. Sau đây là phần mô tả tình huống.

Pha 1: Giáo viên đưa ra bài toán thực tế như sau và yêu cầu học sinh tìm cách giải quyết (trên môi trường giấy bút).

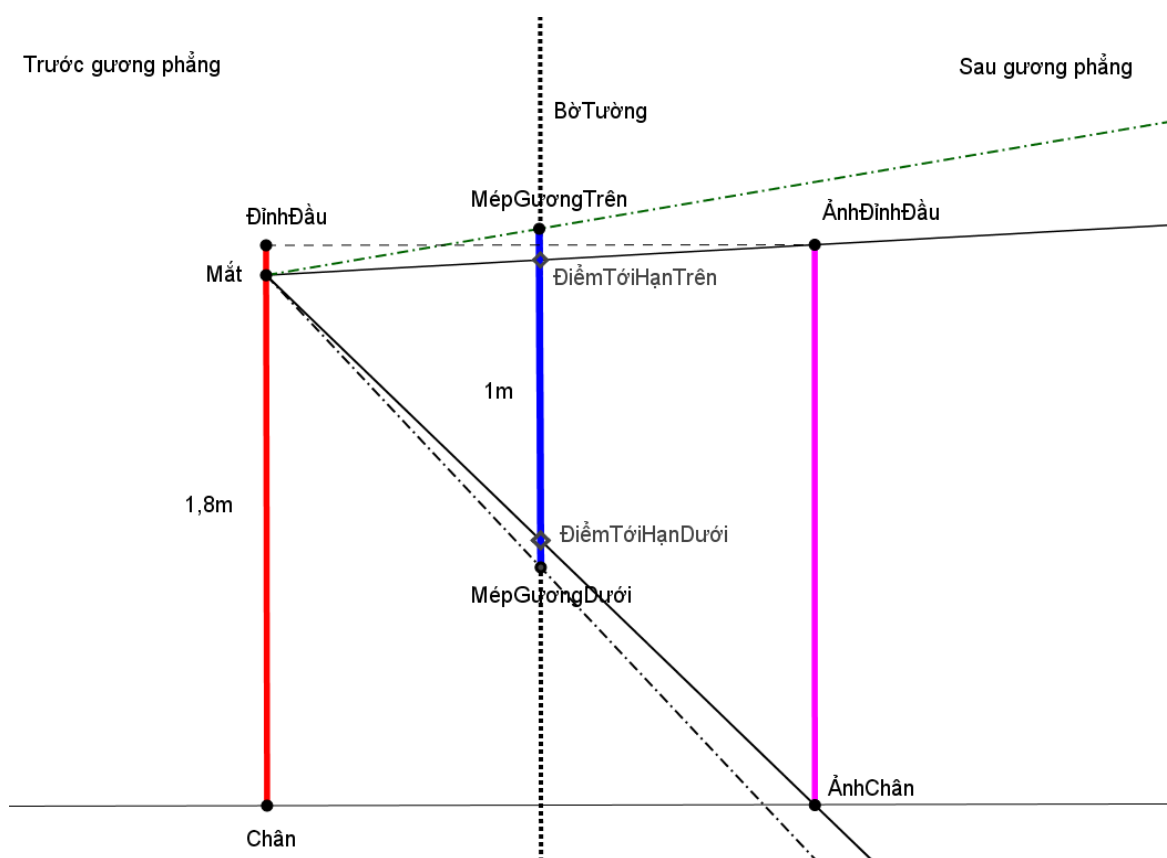
Cần treo tấm gương có chiều dài 1m lên tường có mép dưới gương cách mặt đất tối đa bao nhiêu để một người có chiều cao 1,8m có thể soi gương, biết người đó đứng cách xa gương 0,8m?

Đây là một tình huống có chiến lược cơ sở là treo gương lên tường và di chuyển gương cho đến khi người cần soi gương có thể thấy đủ ảnh của mình trong gương. Việc vẽ hình minh họa trên môi trường giấy bút sẽ gây trở ngại cho việc khảo sát sự di động của gương vì mỗi hình vẽ tương ứng với 1 vị trí đặt gương phẳng.

Pha 2: Học sinh được cung cấp một mô phỏng⁸ cho tình huống trong môi trường tin học theo chiến lược *S_{phản xạ}*. Theo chiến lược này, hình mô phỏng thể hiện ảnh của vật (người soi gương) trong gương phẳng với giả định là gương dài vô hạn, xác định thị trường nhìn của mắt để chỉ ra phạm vi cho phép treo gương. Nhiệm vụ của họ là thao tác kéo-rê điểm “MépGươngDưới” (xem hình) cho đến khi tìm được vị trí phù hợp để treo gương cùng với việc khảo sát để chỉ ra vị trí tối đa của mép dưới của gương.

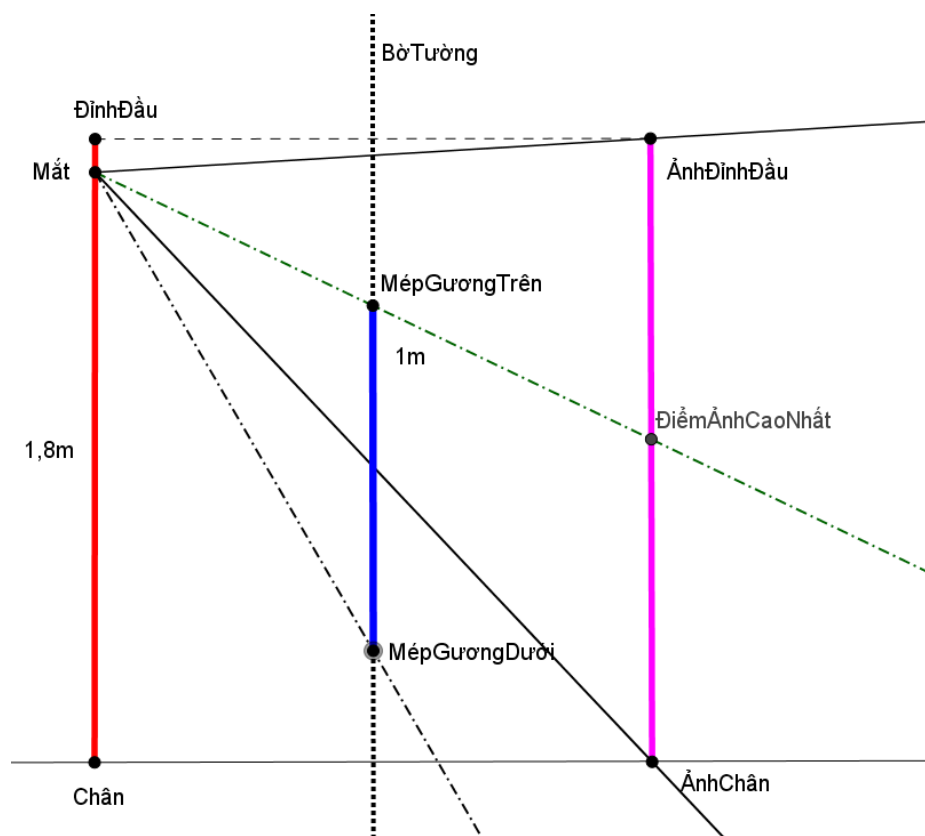
⁷ Tùy theo bài dạy tương ứng với phạm vi phép cộng (phạm vi 3, 4, 5,...) giáo viên sẽ thay đổi giá trị hai số hạng cho phù hợp.

⁸ File TreoGương.ggb được thiết kế trong môi trường Geogebra.

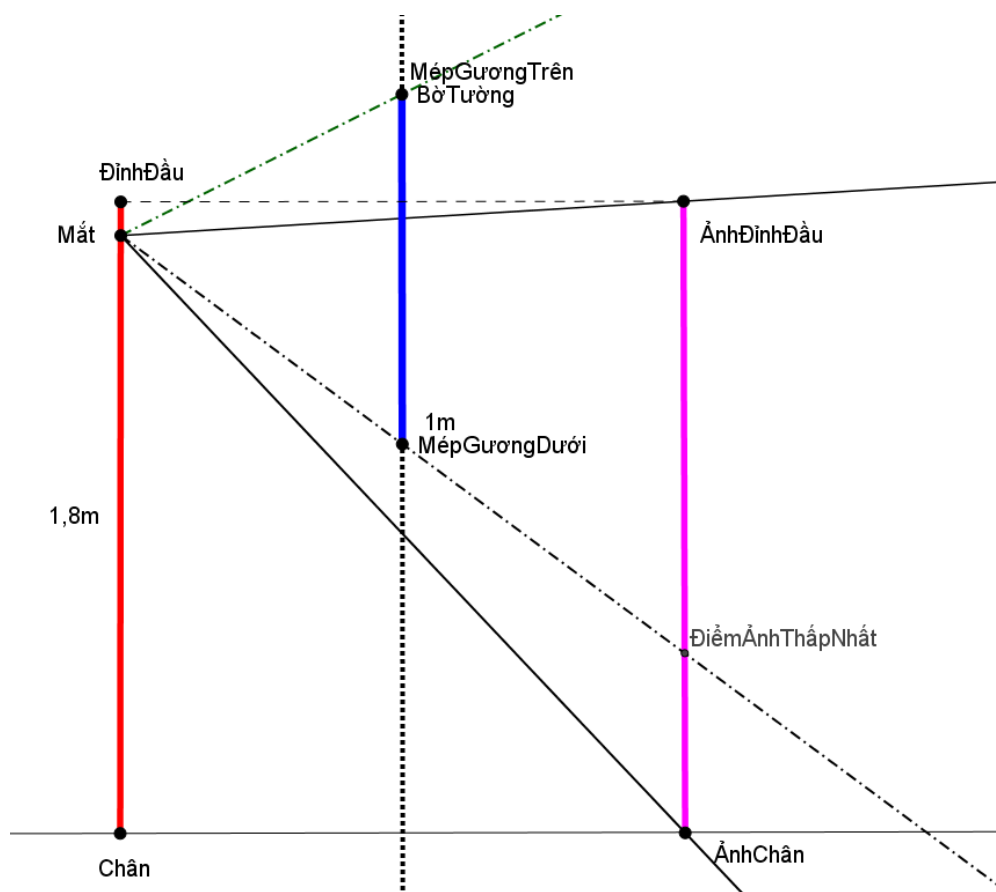


Hình 5: Người soi gương thấy được đủ cả người

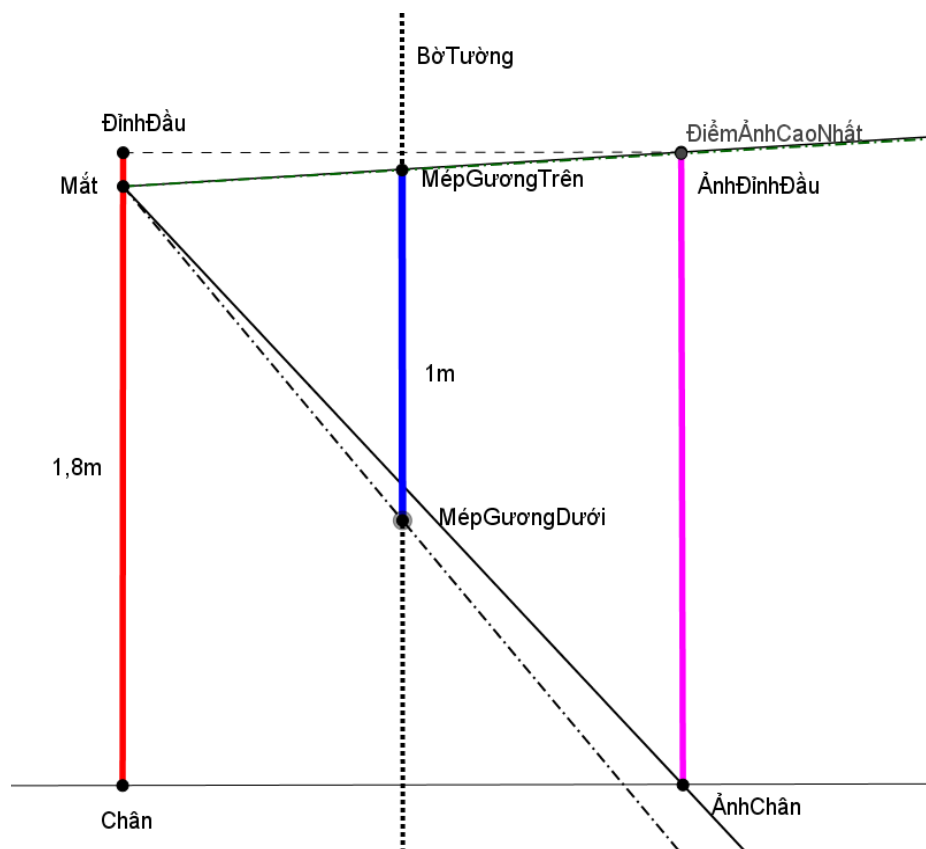
Sau đây là hình minh họa các vị trí quan trọng khi di chuyển gương :



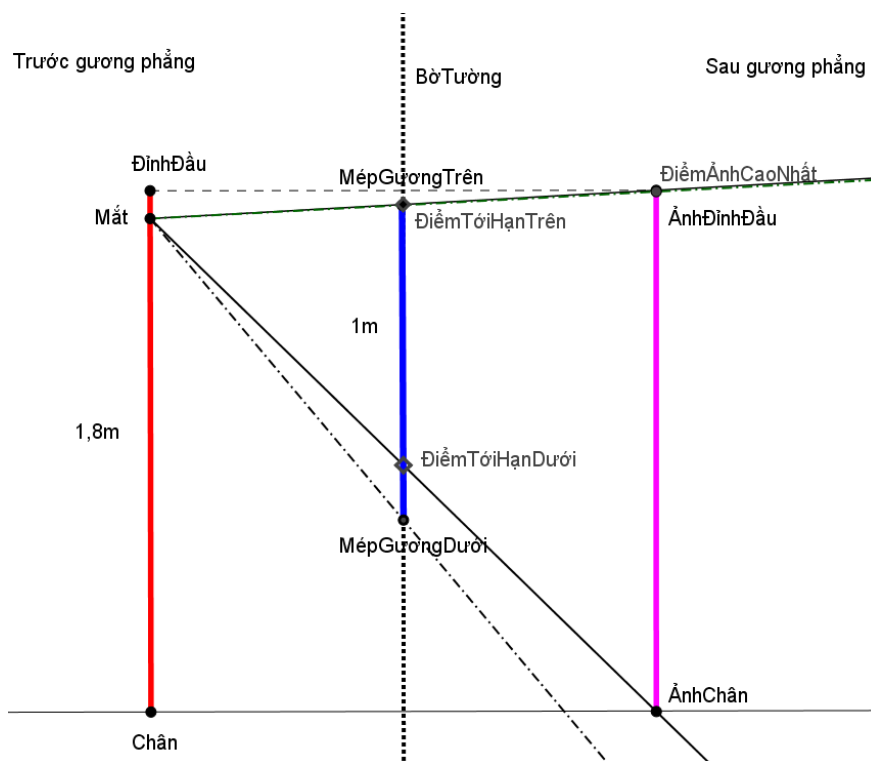
Hình 6: Người soi gương thấy chân mà không thấy đầu



Hình 7: Người soi gương thấy đầu mà không thấy chân



Hình 8: Mức treo gương cao nhất mà người soi gương có thể thấy đủ cả người



Hình 9: Mức treo gương thấp nhất mà người soi gương có thể thấy đủ cả người

Tuy nhiên việc chỉ ra chính xác khoảng cách tối đa của mép dưới gương bằng chiến lược $S_{\text{phản xạ}}$ này là không thể. Điều này dẫn đến việc cần thay đổi sang chiến lược $S_{\text{đối xứng trực}}$ tức là sử dụng kiến thức hình học để tính toán, từ đó tìm ra hai kết quả quan trọng :

- Khoảng cách từ người soi gương đến tường không ảnh hưởng đến vị trí treo gương (sát tường).
- Vị trí tối đa của mép dưới gương cần treo là nửa khoảng cách từ chân đến mắt (nếu giả định khoảng cách từ mắt đến đỉnh đầu là 10cm thì kết quả cần tìm là $\frac{1}{2}(1,8 - 0,1)\text{m}$).

Như vậy, môi trường tin học trong tình huống này cho phép tương tác để khảo sát vị trí treo gương, cho phép mô phỏng chiến lược trong phạm vi Vật lý và đòi hỏi một sự “quay lại” phạm vi Toán để sử dụng kiến thức Toán nhằm hợp thức hóa câu trả lời.

4. Kết luận

Để kết luận, chúng tôi muốn nhấn mạnh đến yếu tố có thể được xem như điều kiện cần cho phép tổ chức dạy học Toán theo tinh thần dạy học tích hợp với sự hỗ trợ của công nghệ thông tin là **môi trường tin học phải có tính tương tác được**. Bên cạnh đó, **tình huống phát biểu cho hình thức dạy học tích hợp ngoài toán học nên xuất phát từ vấn đề của thực tế**. Như vậy, xét về một góc độ nào đó, dạy học tích hợp có cần hoặc có gần với dạy học bằng mô hình hóa toán học hay không? Có thể đem mô hình của dạy học tích hợp sang thiết kế dạy học qua *hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp* theo tinh thần của chương trình tổng thể mới sau năm 2018 hay không? Các vấn đề vừa đặt ra sẽ cần đến một nghiên cứu tiếp theo mà chúng tôi sẽ đề cập đến trong một bài báo khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt:

1. Lê Thị, H.C., Vũ Như, T.H. (2016), Dạy học toán và đánh giá học sinh theo định hướng phát triển năng lực, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên tỉnh Bình Dương*.
2. Vũ Như, T.H. (2016), Dạy học môn toán theo hướng tích hợp, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên tỉnh Kiên Giang*.
3. Dương, S.T. (2000), Giảng dạy tích hợp các khoa học nhằm nâng cao chất lượng giáo dục và đào tạo, *Tạp chí Giáo dục*, số 9, tr. 27-29.
4. Dương, S.T. (2002), Phương thức và nguyên tắc tích hợp các môn học nhằm nâng cao chất lượng giáo dục và đào tạo, *Tạp chí Giáo dục*, số 26, tr. 21-22.

Tiếng Pháp:

5. Maha, A.B. (2013), Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. *Synthèses et nouvelles perspectives*. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII.
6. Lowe, A. (2002). La pédagogie actualisante ouvre ses portes à l'interdisciplinarité scolaire. Éducation et francophonie; XXX (2), automne 2002. *La pédagogie actualisante*, Québec.
7. Valérie, C., Agnès, F-L. (2009), Analyse de pratiques inter-disciplinaires dans l'enseignement supérieur, *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur*, mis en ligne le 14 septembre 2009, consulté le 15 août 2017. URL : <http://ripes.revues.org/188>
8. Amy, D-D., Jeanne, P. (1986), *Une histoire des mathématiques*, Editions du Seuil, Paris.
9. Charlot, B. (1987). *L'école en mutation*. Paris. Payot.

TIỂU BAN 3

PHÂN TÍCH THỰC HÀNH DẠY HỌC CỦA GIÁO VIÊN

Claude Comiti

Patrick Gibel

Xaya Chemcheng

Bùi Thị Thanh Mai

Đào Thị Hoa

Hoa Ánh Tường – Nguyễn Hữu Hậu

Nguyễn Thành Long

Nguyễn Thị Nga

Phạm Sỹ Nam – Phan Anh Tài – Nguyễn Văn Thuận – Phạm Thị Thanh Tú

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES, PROBLEMES DE LA PROFESSION ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Claude Comiti*

Résumé

La formation des professeurs doit être pensée en interrelation avec trois pôles fondamentaux : la profession, le système éducatif et les recherches sur ce système et sur l'enseignement. Un de ses rôles est de permettre l'intégration dans le système éducatif des résultats de ces recherches, tout en prenant en compte les contraintes de la profession.

Comment qualifier le problème du professeur ? Comment analyser les pratiques des enseignants ? Quelles conséquences sur la formation des enseignants ?

Nous monterons notamment, en nous appuyant sur un exemple, la nécessité de dépasser le cadre individuel de l'analyse des données des pratiques enseignantes pour les transformer en problèmes de la profession rencontrés dans l'exercice même du métier de professeur ou identifiés par l'observation et l'analyse des conditions et des contraintes de ce métier.

Mots-clés : profession, pratique professionnelle, formation, recherche

1. Comment penser la formation des professeurs et la profession de professeur?

La formation des enseignants doit être pensée en interrelation avec trois pôles fondamentaux : la profession, le système éducatif et les recherches sur ce système et sur l'enseignement. Un de ses rôles est de permettre l'intégration dans le système éducatif des résultats de ces recherches, tout en prenant en compte les contraintes de la profession.

Mais comment définir la profession ?

Chevallard (2010) considère que c'est « *l'ensemble des acteurs de l'enseignement des mathématiques, de la maternelle à l'université* », c'est-à-dire non seulement les professeurs eux-mêmes, et en particulier les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ainsi que leurs militants associatifs ou syndicaux, mais aussi les formateurs de professeurs, les inspecteurs et les responsables ministériels de l'enseignement des mathématiques, et encore les chercheurs sur l'enseignement des mathématiques...

La formation, notamment lorsqu'elle est une formation « de masse », ne saurait se réduire à adapter les jeunes enseignants qui entrent dans la profession de professeur à un ordre professionnel établi. Elle va, en réalité, changer si peu que ce soit cet ordre même.

Un institut supérieur de formation professionnelle fait plus que modifier la profession visée : elle doit s'efforcer de faire évoluer cette profession, en débat avec la profession elle-même, la société civile, la société politique et la sphère savante.

Selon Chevallard (2010), un institut supérieur de formation professionnelle est donc, en ce sens, une « école normale », une école qui va participer au changement des normes existantes dans la profession et dans la société, en permettant notamment

* LIG, Université Grenoble Alpes

l'intégration des résultats des recherches, tout en prenant en compte les contraintes de la profession.

2. La notion de « problème de la profession »

L'attitude spontanée devant une difficulté surgissant lorsqu'on exerce le métier de professeur est d'y voir une difficulté personnelle et qui appelle une réponse personnelle.

Pourtant la plupart des difficultés surgissant lorsqu'une personne exerce le métier de professeur doivent être regardées comme exprimant d'une certaine manière un ou plusieurs problèmes qui ne concernent pas seulement cette personne en particulier mais bien la profession de professeur (ici, de mathématiques).

Chevallard (2010) propose un enjeu pour ce type d'étude, il s'agit de « dépasser le cadre individuel de l'analyse des données des pratiques enseignantes pour les transformer en [...] problèmes de la profession rencontrés dans l'exercice même du métier de professeur ou identifiés par l'observation et l'analyse des conditions et des contraintes de ce métier et reconnus par au moins une partie de la profession comme des problèmes, c'est-à-dire comme des difficultés objectives (même si elles sont d'abord subjectivement éprouvées), dignes de la mobilisation collective de certaines ressources de la profession. » (p.17)

3. Une étude de cas : problèmes rencontrés lors de l'enseignement des probabilités en classe 11 au Viet-Nam

Tout d'abord nous présenterons le travail effectué par TRẦN TÚY AN (2007) dans le cadre de son mémoire de Thạc Sĩ Didactic Toan dans lequel elle étudie les pratiques d'enseignement de la notion de probabilité dans les classes ordinaires et les classes bilingues¹ au Viêt-Nam. Nous résumerons son analyse institutionnelle, son analyse de la pratique de deux enseignants choisis dans chacune des institutions, ainsi que son essai d'évaluation auprès des élèves concernés.

Nous nous demanderons ensuite si les difficultés mises en évidence par l'analyse des pratiques des deux enseignants lors de l'enseignement des probabilités en classe de 11^{ème} renvoie ou non un problème de la profession.

Nous montrerons enfin comment la réponse à cette question a pu être apportée lors de séances de formation continue des enseignants.

3.1. L'enseignement des probabilités en classe 11 : Analyse institutionnelle

TRAN T. A. étudie dans cette partie les organisations mathématiques préconisées dans les deux institutions (contraintes institutionnelles : programme et manuel) et met en évidence la différence des choix des institutions

Dans l'Institution classes bilingues, 11, sont préconisées quelques expériences liées à la réalité, dont les issues ne sont pas équiprobables : lancement d'une punaise,

¹ L'enseignement dans les classes bilingues respecte à la fois le programme ordinaire et le programme spécifique aux classes bilingues. Car le baccalauréat vietnamien est obligatoire alors que le baccalauréat français est facultatif pour les élèves de ces classes.

problème de Duc de Toscane (Quand on lance trois dés, quelle est la somme la plus probable, 9 ou 10 ?). L'introduction de la notion de probabilité est basée sur deux approches : l'approche fréquentielle et l'approche «symétrique ». Dans la première approche, la probabilité d'un événement élémentaire dépend évidemment des résultats de l'expérimentation. L'approche «symétrique » est basée sur l'équilibre des événements élémentaires. La formule classique de Laplace devient alors un cas particulier. L'institution I1 propose ainsi une vue générale de l'expérience aléatoire : les événements élémentaires de l'expérience sont équiprobables ou non.

Dans l'Institution classes ordinaires, I2, la construction des expériences aléatoires est centrée sur trois modèles principaux : lancement d'une pièce de monnaie, lancement d'un dé, tirage au sort, 100% des expériences étudiées sont équiprobables. La définition statistique (approche fréquentielle) est présentée dans le manuel. Cependant, les expériences choisies ne montrent pas l'extension du domaine de validité de la nouvelle technique : la raison d'être de cette nouvelle technique n'est pas précisée.

	I1 (classes bilingues)	I2 (classes ordinaires)
Introduction de la notion probabilité	- approche fréquentielle, (expérience du lancer d'un dé) - puis approche «symétrique », et formule de Laplace.	- formule de Laplace, - puis définition statistique (présentée à partir du lancer d'une pièce de monnaie).
Expériences aléatoires étudiées	Lancement d'une punaise, problème de comte Toscane, lancement d'un dé, ...	Lancement d'une pièce de monnaie, d'un dé ; choix au hasard d'un ballon et modèles relatifs.
T ₁ : Décrire l'ensemble des issues Ω T ₂ : Trouver nombre des issues favorables à l'événement A	- technique de l'arbre, - technique du tableau, (les éléments de combinatoire ne sont pas encore introduits à ce moment-là).	Les techniques correspondantes sont justifiées par les formules d'algèbre combinatoire, qui a été enseignée juste avant de l'introduction de la probabilité.
T ₃ : Calculer la probabilité d'un évènement	- τ_{La} : utiliser le formule de Laplace après avoir vérifié l'équiprobabilité des issues de l'expérience, - $\tau_{fré}$ (technique fréquentielle) : considérée comme pertinente pour toutes les expériences.	- τ_{La} : utiliser la formule de Laplace, sans indication de la nécessité de vérifier l'équiprobabilité des issues de l'expérience - $\tau_{fré}$ (technique fréquentielle) : apparue implicitement lors de la présentation de l'expérience de Buffon, sans qu'aucun exercice n'en montre la nécessité.

Tableau 1 : Résumé de la comparaison institutionnelle

Cette comparaison montre en quoi les choix institutionnels ne sont pas identiques et met en évidence la différence des techniques préconisées pour résoudre les types de tâche T1, T2, T3. Quelles conséquences cela a-t-il dans la pratique des enseignants? Quelles significations de la probabilité sont-elles construites en classe ?

3.2. L'enseignement des probabilités en classe 11 : Analyse des pratiques

TRÂN T. A. effectue ensuite une analyse de pratiques à partir de l'observation de deux enseignants P1 et P2, appartenant chacun à l'une ou l'autre des institutions. Elle analyse non seulement leurs modes d'introduction des probabilités mais aussi les types de tâches qu'ils donnent à résoudre aux élèves, les techniques et les éléments technologico-théoriques justifiant ces techniques qu'ils leur fournissent.

P1 (professeur 1, institution classes bilingues)

Regardons de plus près quelles activités préparatoires le manuel des classes bilingues préconise (p. 49).

Activité 1: se familiariser avec le vocabulaire des probabilités (notion d'expérience aléatoire, d'événement,...) en liaison avec le langage des ensembles.

Activité 2 : présenter la définition de la probabilité en se basant sur la fréquence de réalisation statistique d'un événement : la probabilité est présentée comme « la valeur idéale » de cette fréquence. Trois expériences sont proposées : le lancer d'une punaise le lancement d'une pièce et le jet d'un dé à 6 faces. Ces deux dernières expériences sont présentées après la remarque suivante : « Pour le lancer d'une punaise, seule l'expérience permet de calculer approximativement la probabilité d'un résultat. **Heureusement cela se passe différemment**² pour les expériences des autres types ». Pour ces deux expériences, le manuel observe : « Dans le jeu de Pile ou Face, nous supposons que la pièce utilisée est suffisamment **symétrique** pour accorder autant de chances au côté Pile qu'au côté Face ». « Lancer un dé est tout ce qu'il y a d'ordinaire. Toujours pour des raisons de symétrie et d'homogénéité »

Activité 3 : faire utiliser aux élèves la loi de probabilité - avant de présenter la partie « cours » pour le cas général.

Activité 4 : faire faire aux élèves des exercices - dans le cas de l'équiprobabilité.

Après l'activité 4, le manuel remarque : « *Dans certains cas (« pile ou face », le dé ...) toutes les issues ont la même probabilité : on dit qu'il y a équiprobabilité.* » Il précise alors que dans le cas où l'expérience équiprobable comprend N issues, la probabilité de chacune de ces issues est égale à $\frac{1}{N}$. Il ajoute : « *Les énoncés comme « pièces équilibrées », « dés homogènes », « tirer des ballons au hasard » « avec la même chance » ...signifient que les issues sont équiprobables...* » (p. 25). « On trouve que dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité de l'événement A est le rapport du nombre d'éléments de A sur le nombre d'éléments de l'univers des possibles. » (p. 25) C'est la formule classique de Laplace.

TRAN T.A. étudie les organisations mathématiques et didactiques, ce que nous ne pouvons présenter ici. Nous résumerons donc brièvement ce que met en évidence son travail.

P1 (professeur 1, institution classes bilingues)

P1 ne propose pas à ses élèves l'activité 2 du manuel et ne construit que la technique τ_{La} . Les 2 sous-types de tâche T1 et T2 sont rappelés et renforcés. La technique laplacienne

² C'est nous qui soulignons

est institutionnalisée plusieurs fois dans la séance et P1 donne aux élèves beaucoup d'exercices de ce type pour la renforcer.

L'analyse de TRAN T. A montre que P1, dans sa classe, ne respecte pas les choix institutionnels de I1 : il n'introduit pas l'approche fréquentielle et n'aborde que des modèles mathématiques concernant le lancement d'un dé, d'une pièce de monnaie et le tirage au sort. Il rappelle néanmoins souvent à ses élèves la nécessité de vérifier la condition d'équiprobabilité avant d'utiliser la formule de Laplace.

P2 (professeur 2, institution classes ordinaires)

P2 se base sur les expériences dont les issues sont équiprobables (lancement d'une pièce de monnaie, d'un dé, ...) pour introduire les nouvelles notions (expérience, issues, probabilité). Comme le propose le manuel, P2 commence par l'approche laplacienne de la probabilité. Il reprend ensuite la situation proposée dans le manuel (expérience de Buffon du lancer de dé) pour montrer que si le nombre des expériences est assez grand, alors la fréquence tend vers la probabilité. Conformément au choix du manuel, P2 dit qu'ici la fréquence est appelée probabilité expérimentale. Mais il ne propose aucun exercice qui justifie l'utilisation de cette technique fréquentielle dont la raison d'être n'apparaît pas.

Le fait que de τ La ne permette pas de traiter les cas de non-équiprobabilité n'est pas abordé.

3.3. L'enseignement des probabilités : essai d'évaluation

Quelles significations de la probabilité ont été construites en classe ?

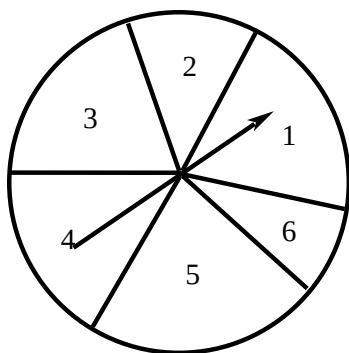
Pour répondre à cette question, l'auteur propose aux élèves des deux classes plusieurs exercices dans le cas de non-équiprobabilité afin de les mettre dans des situations où la technique laplacienne est mise en échec.

Trois problèmes sont proposés aux 78 élèves de I1 et 92 élèves de I2. Les expériences étudiées dans ces problèmes concernent toutes des événements non-équiprobables.

Problème 1

Voici le jeu de la roulette.

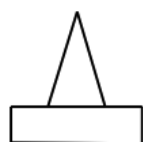
À chaque tour du cercle, la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des 6 numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6. La personne qui obtient un nombre multiple de 3 gagne.



- a) Trouver une méthode pour trouver la probabilité de gagner.
- b) Essayez de trouver une deuxième méthode.

Problème 2

On pose une punaise dans sa main et on lance cette punaise. Lorsqu'elle s'est immobilisée sur le sol, on observe deux issues :



issue 1



issue 2

Le problème est de trouver la probabilité de chacune de ces deux issues.

Essayez de trouver une méthode pour trouver ces probabilités.

Problème 3

Avec deux pièces de monnaies : une de 200 dong et une de 500 dong (courantes à l'époque au Viêt-Nam), on a collé les deux pièces côté pile et obtenu une pièce double à deux faces : une face de 200d et une autre de 500d.



Lancer au hasard deux pièces doubles de 200d-500d. Trouver une méthode pour trouver la probabilité d'obtenir deux faces de 200d.

Résultats obtenus

L'absence de travail sur la technique fréquentielle dans les deux institutions entraîne un grand nombre d'erreurs surtout quand les élèves utilisent de façon mécanique la technique τ_{La} dans les expériences contenant des événements élémentaires non équiprobables.

Dans I1 (78 élèves)

De 50% à 70% des élèves utilisent τ_{La} . Selon le cas, 1 à 10 élèves ne donnent pas de réponse. Mais autour de 30% répondent « On ne peut pas calculer car les événements sont non-équiprobables ». Aucune solution de type « fréquentielle » n'apparaît.

Ce qui s'explique car si P1 a rappelé souvent aux élèves la nécessité de vérifier la condition d'équiprobabilité avant d'utiliser la formule de Laplace, les expériences qu'il P2 a fait étudier aux élèves renvoient toutes à des modèles mathématiques. La vérification la condition « équiprobabilité » est donc formelle. Quand cette condition est enfreinte, les élèves n'ont pas d'autre technique pour résoudre le problème.

Dans I2 (92 élèves)

De 56% à 72% des élèves utilisent τ_{La} . Autour de 12% ne donnent pas de réponse. Aucune stratégie « fréquentielle » n'apparaît.

A noter qu'un petit nombre d'élèves propose de prendre la fréquence pour la probabilité dans les problèmes 1a (1%), 1b (2%), 2 (10%) et 3 (11%) mais ne précisent pas la condition selon laquelle le nombre d'expérimentation doit être assez grand.

Dans la suite de son travail de mémoire TRAN T.A. construit une « mini-ingénierie » dans laquelle elle présente aux élèves deux façons d'approcher la notion de probabilité. Nous n'aborderons pas ici cette partie du mémoire.

L'analyse des séances observées nous conduit aux questions suivantes :

– *Comment expliquer le fait que les choix de deux professeurs soient très peu différents, malgré la différence de points de vue des institutions concernées?*

– *Comment la formation initiale des professeurs prend-elle en compte l'aspect épistémologique du savoir en jeu?*

– *Comment peut-on intégrer dans le système éducatif les résultats des recherches conduits sur l'enseignement des probabilités tout en prenant en compte les contraintes de la profession?*

4. Cette difficulté rencontrée dans l'enseignement des probabilités en classe de 11^{ème} est-elle ou non un problème de la profession ?

Nous avons vu plus haut qu'un problème de la profession doit être identifié par l'observation et l'analyse des conditions et des contraintes de ce métier et reconnu par au moins une partie de la profession comme une difficulté objective (même si elle est d'abord subjectivement éprouvée), et digne de la mobilisation collective de certaines ressources de la profession.

Plusieurs possibilités se présentent pour donner une réponse à la question posée. Dans cette étude, c'est la formation continue qui va être utilisée pour montrer que le non-enseignement de la technique fréquentielle est effectivement un problème qui dépasse le contexte précédent de sa mise à jour et qui se pose à la profession toute entière.

Ici le directeur de mémoire d'An va utiliser les séances de formation qu'il conduit auprès de nombreux professeurs de province. Cette formation se déroule en quatre phases.

Phase 1 : Analyse par les professeurs en formation, divisés en deux groupes, de l'un des deux protocoles (P1 ou P2). Le formateur constate que les professeurs-stagiaires notent seulement que si P1 et P2 ont donné suffisamment d'exemples, ils n'ont pas conçu suffisamment d'activités permettant les recherches des élèves. La mise en commun ne montre aucune prise en compte par eux de l'incomplétude de la technique introduite pour T3 (absence de vérification de l'équiprobabilité) et de l'importance de la définition fréquentielle de la probabilité.

Phase 2 : Le formateur présente la nécessité et l'utilité des recherches épistémologiques sur le savoir à enseigner en traitant notamment le cas de la notion de probabilité : les expériences dont les événements sont équiprobables sont « idéales ». Si on ne travaille qu'avec ce type d'expérience, on reste dans les modèles mathématiques. Seule l'approche fréquentielle permet d'étudier la probabilité des événements issus de la réalité.

Phase 3 : Après ce travail sur le savoir à enseigner montrant la nécessité de l'approche fréquentielle pour étudier la probabilité des événements issus de la réalité, les professeurs sont invités à analyser le manuel en vigueur puis à concevoir des situations d'enseignement de la notion de probabilité. Lorsqu'ils travaillent sur le manuel, certaines de leurs remarques montrent qu'ils ont pris en compte l'aspect épistémologique de la notion de probabilité, sans arriver pour autant à concevoir des situations d'enseignement permettant de compléter le rapport institutionnel.

Phase 4 : l'analyse des situations proposées montre qu'ils ont pris en compte l'aspect épistémologique de la notion de probabilité. Pourtant, ils ont des difficultés pour concevoir des situations d'enseignement permettant de compléter le rapport institutionnel.

Phase 5 : les professeurs sont invités à analyser des situations d'enseignement proposés dans des recherches sur l'enseignement de la probabilité, après présentation de ces recherches par le formateur.

Ces séances de formation continue permettent de conclure qu'on est bien, au Viêt-Nam, face à un problème de la profession.

Reste à savoir comment y faire face. Sans doute par une modification de la formation initiale des enseignants mettant davantage l'accent sur l'étude épistémologiques des savoirs et permettant une meilleure intégration des recherches en didactique conduites sur le sujet.

5. En guise de conclusion

Le travail effectué en formation continue a montré que le problème pointé par l'analyse des pratiques des professeurs P1 et P2 était bien au Viêt-Nam un problème de la profession.

Il a aussi pointé des lacunes en formation initiale : les modules de mathématiques pures ne travaillent que sur des modèles mathématiques. Ils présentent les différentes définitions de la probabilité : laplacienne, fréquentielle, axiomatique, mais sans aucun travail de nature épistémologique et sans explication sur la nécessité et l'usage de chaque définition.

D'où l'importance de la formation initiale qui doit veiller à apporter des solutions (toujours partielles et provisoires) aux problèmes de la profession. En espérant que ces solutions viennent alors « percoler » dans la profession à travers les formés.

REFERENCES

1. Bessot A., Comiti C. (2013) Apport des recherches comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam/France, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(1), pp. 45-77, Grenoble : La Pensée Sauvage
2. Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), pp. 22–265, Grenoble : La Pensée Sauvage.

3. Chevallard Y. (2006) Former des professeurs, construire la profession de professeur. *Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire* Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation – Genève <http://yves.chevallard.free.fr/>
4. Chevallard Y. (2010) Présentation in Bronner, Larguier, Artaud, Bosch., Chevallard, Cirade, Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp.15–19). Montpellier : Université Montpellier 2.
5. Comiti C. (2013) Comment la recherche en didactique peut répondre aux besoins des enseignants, *Quelques avancées significatives dans la recherche en didactique des mathématiques*, Actes du Colloque International Franco-Vietnamien en didactique des mathématiques, Ho Chi Minh Ville, Viêt-Nam.
6. Larguier M. (2012) La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession en seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32 (1) pp. 101-144, Grenoble : La Pensée Sauvage.
7. TRẦN TUÝ AN (2007), *Étude de pratiques d'enseignement de la notion de probabilité dans les classes bilingues et les classes ordinaires au Vietnam*, mémoire de master, Université de Pédagogie de Hô Chi Minh Ville.
8. Manuel des classes bilingues (1998) “*Activités propédeutiques. Classes : 11ème -12ème. Dossier thématique : Statistiques/ Probabilités*”. Publication du Ministère de l'éducation et de la formation, Vietnam.

PHÂN TÍCH THỰC HÀNH DẠY HỌC, VẤN ĐỀ NGHỀ NGHIỆP VÀ ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN

Claude Comiti *

Résumé

La formation des professeurs doit être pensée en interrelation avec trois pôles fondamentaux : la profession, le système éducatif et les recherches sur ce système et sur l'enseignement. Un de ses rôles est de permettre l'intégration dans le système éducatif des résultats de ces recherches, tout en prenant en compte les contraintes de la profession.

Comment qualifier le problème du professeur ? Comment analyser les pratiques des enseignants ? Quelles conséquences sur la formation des enseignants ?

Nous monterons notamment, en nous appuyant sur un exemple, la nécessité de dépasser le cadre individuel de l'analyse des données des pratiques enseignantes pour les transformer en problèmes de la profession rencontrés dans l'exercice même du métier de professeur ou identifiés par l'observation et l'analyse des conditions et des contraintes de ce métier.

Mots-clés : profession, pratique professionnelle, formation, recherche.

Tóm tắt

Công tác đào tạo giáo viên cần phải được xem xét trong mối liên hệ qua lại giữa ba cực cơ bản: nghề nghiệp, hệ thống giáo dục, những nghiên cứu về hệ thống này và về việc dạy học. Một trong những vai trò của cách tiếp cận này là nó cho phép tích hợp các kết quả nghiên cứu vào hệ thống giáo dục mà vẫn tính đến những ràng buộc về nghề nghiệp.

Vấn đề đặt ra cho giáo viên là gì ? Phân tích thực hành dạy học của giáo viên như thế nào? Những hệ quả nào tác động lên công tác đào tạo giáo viên?

Thông qua một ví dụ, chúng tôi sẽ chỉ ra sự cần thiết phải vượt qua phạm vi cá nhân khi phân tích dữ liệu thu được từ thực hành dạy học, để chuyển hiện tượng quan sát được thành vấn đề nghề nghiệp mà giáo viên gặp khi tác nghiệp hoặc thành vấn đề được xác định từ quan sát và phân tích các điều kiện, các ràng buộc của chính nghề này.

Từ khóa: nghề, thực hành nghề nghiệp, đào tạo, nghiên cứu.

1. Nghĩ gì về việc đào tạo giáo viên và nghề giáo ?

Công tác đào tạo giáo viên cần phải được xem xét trong mối liên hệ qua lại giữa ba cực cơ bản: nghề, hệ thống giáo dục và các nghiên cứu về hệ thống này cũng như về việc dạy học. Một trong những vai trò của cách tiếp cận này là nó cho phép tích hợp các kết quả nghiên cứu vào hệ thống giáo dục mà vẫn tính đến những ràng buộc về nghề nghiệp.

Thế nhưng xác định nghề dạy học như thế nào?

* LIG (Laboratoire Informatique de Grenoble), Đại học Grenoble Alpes.

Chevallard (2010) cho rằng tác động vào nghề dạy học toán là “*tập hợp những nhân vật chủ chốt liên quan đến việc dạy học toán, từ mẫu giáo đến đại học*”, nghĩa là không chỉ có thầy giáo – lực lượng đương nhiên phải kể đến, đặc biệt là thầy giáo toán bậc trung học, cũng như những chiến hữu hay nghiệp đoàn của họ, mà còn có cả đội ngũ đào tạo giáo viên, các thanh tra giáo dục, các lãnh đạo của Bộ phụ trách việc dạy học toán, và còn cả các nhà nghiên cứu việc dạy học toán nữa, ...

Công tác đào tạo, nhất là trong trường hợp đào tạo “số lượng lớn”, không thể chỉ quy về việc làm cho lớp giáo viên trẻ mới bước vào nghề thích ứng được với một trật tự nghề nghiệp đã được thiết lập. Trong thực tế, việc đào tạo phải làm thay đổi, cho dù rất ít, chính trật tự này.

Một trường đại học đào tạo nghề còn phải làm nhiều hơn việc biến đổi nghề nhắm đến : nó phải cố gắng làm cho nghề này tiến triển, qua tranh luận với những người làm chính nghề đó, với xã hội dân sự, xã hội chính trị và với đội ngũ các nhà bác học.

Theo Chevallard (2010), một trường đại học đào tạo nghề dạy học là một “trường chuẩn”¹, trường sẽ tham gia vào việc làm thay đổi một số chuẩn đang tồn tại trong nghề này và trong xã hội, bằng cách cho phép đưa vào các kết quả nghiên cứu trong khi vẫn tính đến những ràng buộc của nghề.

2. Khái niệm “vấn đề nghề nghiệp”

Thái độ tự phát trước một khó khăn gặp phải khi thực hành nghề dạy học là người ta nhìn nhận nó như một khó khăn cá nhân và cần một câu trả lời cá nhân.

Thế nhưng phần lớn khó khăn sinh ra khi một cá nhân thực hành nghề dạy học lại cần phải được xem xét như là biểu hiện - theo một cách thức nào đó - của một hay nhiều vấn đề, không chỉ liên quan đến cá nhân cụ thể này mà là của nghề dạy học (ở đây là dạy toán).

Về kiểu nghiên cứu này, Chevallard (2010) cho rằng phải “*vượt qua phạm vi cá nhân khi phân tích dữ liệu thu được từ thực hành dạy học để chuyển hiện tượng quan sát được thành [...] những vấn đề nghề nghiệp mà giáo viên gặp khi tác nghiệp, hoặc thành vấn đề được xác định từ quan sát và phân tích các điều kiện, các ràng buộc của chính nghề này, thừa nhận chúng – ít nhất là một phần, như những vấn đề của nghề dạy học, nghĩa là xem chúng như những khó khăn khách quan (dù rằng thoạt đầu chúng được cảm thấy một cách chủ quan), xứng đáng có một sự huy động tập thể để tìm một phương sách nghề nghiệp nào đó.*” (tr.17)

3. Nghiên cứu một trường hợp : những vấn đề gặp trong dạy học xác suất ở lớp 11 của Việt Nam

Trước hết chúng tôi sẽ giới thiệu công trình của Trần Tuý An (2007) thực hiện trong khuôn khổ một luận văn thạc sỹ chuyên ngành Didactic Toán, trong đó tác giả nghiên cứu thực hành dạy học khái niệm xác suất ở các lớp phổ thông thường và các

¹ Trong tiếng Pháp, trường đại học đào tạo giáo viên được gọi là “*école normale supérieure*”, trong đó *normal* là tính từ có gốc danh từ *norme*, nghĩa là chuẩn (ND).

lớp song ngữ² của Việt Nam. Chúng tôi sẽ tóm tắt kết quả phân tích thể chế, sau đó là phân tích mà tác giả đã tiến hành về thực hành dạy học của hai giáo viên – mỗi người được chọn trong một thể chế, cũng như là kết quả đánh giá sơ bộ những học sinh của hai lớp học được quan sát.

Sau đó chúng tôi sẽ tự hỏi phải chăng những khó khăn đã được chỉ ra trong phân tích thực hành dạy học khái niệm xác suất ở lớp 11 của hai giáo viên này phản ánh một vấn đề về nghề nghiệp.

Cuối cùng chúng tôi sẽ chỉ ra rằng có thể tìm câu trả lời cho câu hỏi này như thế nào qua các tiết bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên.

3.1. Dạy học xác suất ở lớp 11 : phân tích thể chế

Trong phần này Trần Tuý An nghiên cứu các tổ chức toán học được hai thể chế khuyến dùng (ràng buộc thể chế: chương trình và sách giáo khoa) và làm rõ những lựa chọn khác nhau của các thể chế.

Trong thể chế lớp song ngữ, I1, người ta khuyến xét vài phép thử gắn liền với thực tế có các kết cục không đồng khả năng: gieo một cái đỉnh mũ, bài toán của Bá tước Toscane (Tung ba con xúc sắc. Quan sát tổng số chấm xuất hiện trên ba mặt của ba xúc sắc. Xác suất nhận được 9 chấm hay 10 chấm sẽ lớn hơn?). Việc trình bày khái niệm xác suất dựa vào hai cách tiếp cận: tiếp cận tần suất và tiếp cận “đối xứng”. Trong cách tiếp cận thứ nhất, xác suất của một biến cố sơ cấp hiển nhiên là phụ thuộc vào kết quả thực nghiệm. Cách tiếp cận “đối xứng” dựa trên tính cân bằng của các biến cố sơ cấp, và khi đó công thức cổ điển của Laplace trở thành một trường hợp đặc biệt. Như vậy, thể chế I1 đề nghị hình thành một cái nhìn tổng quát về các phép thử ngẫu nhiên : các biến cố sơ cấp của phép thử có thể đồng khả năng hoặc không đồng khả năng xảy ra.

Trong thể chế lớp phổ thông thường, I2, việc xây dựng các phép thử ngẫu nhiên chủ yếu dựa trên ba mô hình: tung đồng tiền xu, tung con xúc sắc, rút ngẫu nhiên, 100% các phép thử được nghiên cứu đều có các biến cố sơ cấp là đồng khả năng. Định nghĩa thống kê (tiếp cận tần suất) được trình bày trong sách giáo khoa. Thế nhưng, những phép thử được lựa chọn lại không chỉ ra sự mở rộng phạm vi hợp thức của kỹ thuật mới : lý do tồn tại của kỹ thuật mới này không thực sự được làm rõ.

	I1 (lớp song ngữ)	I2 (lớp phổ thông thường)
Hình thành khái niệm xác suất	- tiếp cận tần suất (phép thử tung con xúc sắc), - sau đó tiếp cận “đối xứng” và công thức Laplace.	- công thức Laplace, - sau đó định nghĩa thống kê (được đưa vào từ phép thử tung đồng xu).
Các phép thử ngẫu nhiên được xem xét	Tung đỉnh mũ, bài toán của Toscane, tung con xúc sắc, ...	Tung đồng xu, con xúc sắc, lấy ngẫu nhiên một quả bóng và những mô hình tương tự.
T ₁ : Mô tả không gian mẫu Ω T ₂ : Tìm số trường hợp thuận lợi cho biến cố A	- kỹ thuật sơ đồ cây, - kỹ thuật bảng, (theo chương trình thì lúc này các yếu tố của Đại số tổ hợp còn chưa được dạy).	Các kỹ thuật tương ứng được giải thích bởi các công thức của Đại số tổ hợp – được dạy ngay trước khi đưa vào khái niệm xác suất.

² Việc dạy học trong các lớp song ngữ phải tuân thủ đồng thời chương trình dành cho các lớp phổ thông thường và chương trình song ngữ, vì kỳ thi tú tài của Việt Nam là bắt buộc, trong khi kỳ thi tú tài Pháp lại là tùy chọn đối với học sinh học hệ song ngữ.

T3 : Tính xác suất của một biến cố	- τ_{La} : sử dụng công thức Laplace sau khi đã kiểm tra tính đồng khả năng của các kết cục của phép thử - τ_{fre} (kỹ thuật tần suất) : được xem là thích hợp với mọi phép thử	- τ_{La} : sử dụng công thức Laplace, không có chỉ dẫn về sự cần thiết phải kiểm tra tính đồng khả năng của các kết cục của phép thử - τ_{fre} (kỹ thuật tần suất) : xuất hiện ngầm ẩn khi giới thiệu thực nghiệm của Buffon, mà không có một bài tập nào cho thấy sự cần thiết của kỹ thuật.

Bảng 1: Tóm tắt sự so sánh thể chế

So sánh trên cho thấy sự lựa chọn của hai thể chế không giống nhau ở điểm nào, đồng thời cũng đã chỉ rõ sự khác biệt trong những kỹ thuật được đưa vào để giải quyết các kiểu nhiệm vụ T1, T2, T3. Điều đó để lại hệ quả gì lên thực hành dạy học của giáo viên ? Những nghĩa nào của khái niệm xác suất được xây dựng trong lớp học ?

3.2 Dạy học xác suất ở lớp 11 : phân tích thực hành

Tiếp theo, tác giả Trần Tuý An thực hiện phân tích thực hành thông qua dữ liệu thu được từ quan sát tiết dạy của hai giáo viên P1, P2, mỗi người thuộc một thể chế. Tác giả không chỉ phân tích cách thức các giáo viên này đưa vào khái niệm xác suất mà còn xem xét cả những kiểu nhiệm vụ họ yêu cầu học sinh giải quyết cũng như những yếu tố công nghệ - lý thuyết giải thích các kỹ thuật mà họ cung cấp.

P1 (giáo viên 1, thể chế song ngữ)

Chúng ta hãy xem xét kỹ hơn: những hoạt động chuẩn bị nào được sách giáo khoa song ngữ khuyến đưa vào (tr.49).

Hoạt động 1: cho học sinh làm quen với các từ vựng của xác suất (khái niệm phép thử ngẫu nhiên, biến cố...) bằng cách liên hệ với ngôn ngữ tập hợp.

Hoạt động 2: giới thiệu định nghĩa xác suất bằng cách dựa trên tần suất xuất hiện một biến cố, thu được bằng thống kê khi thực hiện phép thử : xác suất được giới thiệu như là “giá trị lí tưởng” của tần suất này. Ba phép thử được sách giáo khoa đề nghị : tung đỉnh mũ, tung đồng xu và tung con xúc sắc có 6 mặt. Hai phép thử cuối được giới thiệu sau nhận xét sau: “*Đối với việc tung đỉnh mũ, chỉ có thực nghiệm mới cho phép tính gần đúng xác suất của một kết quả. **May mắn thay việc này diễn ra theo một cách khác**³ đối với các phép thử loại khác*”. Đối với hai phép thử này, sách giáo khoa nói: “Trong trò chơi sấp hay ngửa, chúng ta luôn giả sử đồng xu được sử dụng là đủ **đối xứng** để thừa nhận rằng cơ hội xuất hiện các mặt sấp và ngửa là như nhau”. “Tung con xúc sắc là phép thử có đặc trưng thông thường. Luôn luôn là những lí do về sự đối xứng và đồng chất.”

Hoạt động 3: Cho học sinh vận dụng được luật xác suất- trước khi giới thiệu phần lí thuyết cho trường hợp tổng quát.

Hoạt động 4: cho học sinh giải bài tập trong trường hợp đồng khả năng xuất hiện.

³ Do chính chúng tôi viết đậm để nhấn mạnh.

Sau hoạt động 4, sách giáo khoa nêu lưu ý : “*Trong một số trường hợp (“sắp hay ngửa”, “con xúc sắc”, ...), tất cả các kết quả đều có cùng xác suất : ta nói là chúng đồng khả năng*”. Sách giáo khoa nói thêm là trong trường hợp phép thử gồm N kết quả đồng khả năng thì xác suất của tất cả các kết quả đều bằng $\frac{1}{N}$. Sách nói thêm: “*những* phát biểu như “đồng xu cân đối”, “xúc sắc đồng chất”, “lấy ngẫu nhiên quả bóng”, “với cơ hội như nhau”, ... đều có nghĩa là các kết quả đồng khả năng.” (tr. 25) Đây chính là công thức cổ điển của Laplace.

Trần Túy An còn nghiên cứu các tổ chức toán học và tổ chức didactic, nhưng chúng tôi không thể trình bày ở đây. Chúng tôi sẽ chỉ tóm tắt ngắn gọn những điểm mà phân tích của tác giả đã làm rõ.

Giáo viên P1 (thể chế lớp song ngữ)

Giáo viên P1 không yêu cầu học sinh thực hiện hoạt động 2 của sách giáo khoa và chỉ xây dựng kỹ thuật τ_{La} . Hai kiểu nhiệm vụ con T1, T2 được nhắc lại và củng cố. Kỹ thuật sử dụng công thức Laplace được thể chế hoá nhiều lần trong tiết dạy và P1 cho học sinh giải nhiều bài tập thuộc kiểu này để củng cố.

Phân tích của Trần Túy An chỉ ra rằng trong lớp học của mình, P1 không tôn trọng sự lựa chọn của thể chế I1: không đưa vào cách tiếp cận tần suất và chỉ đề cập đến những mô hình toán học liên quan đến phép thử tung xúc sắc, tung đồng xu hay rút ngẫu nhiên. Tuy nhiên, giáo viên thường xuyên nhắc học sinh việc cần phải kiểm tra điều kiện đồng xác suất trước khi sử dụng công thức Laplace.

P2 (giáo viên 2, thể chế lớp phổ thông thường)

Giáo viên P2 dựa vào những phép thử mà các biến cố đồng khả năng (tung đồng xu, tung con xúc sắc) để đưa vào khái niệm mới (phép thử, biến cố, xác suất). Tuân thủ tiến trình lựa chọn của sách giáo khoa, giáo viên P2 bắt đầu bằng tiếp cận cổ điển với công thức Laplace để đưa vào khái niệm xác suất. Sau đó P2 sử dụng lại tình huống mà sách giáo khoa đề nghị (thí nghiệm tung đồng xu của Buffon) để chứng tỏ rằng nếu số lần thực hiện phép thử khá lớn thì tần suất tiến dần tới xác suất. Theo đúng sách giáo khoa, P1 nói là ở đây thì tần suất được gọi là xác suất thực nghiệm. Nhưng giáo viên P1 không đưa ra một bài tập nào sử dụng kỹ thuật tần suất mà lý do tồn tại của nó không được giải thích.

Việc τ_{La} không cho phép nghiên cứu những phép thử bao gồm các biến cố không đồng xác suất không được đề cập.

3.3. Dạy học xác suất : thử đánh giá

Những nghĩa nào của khái niệm xác suất đã được xây dựng trong lớp học?

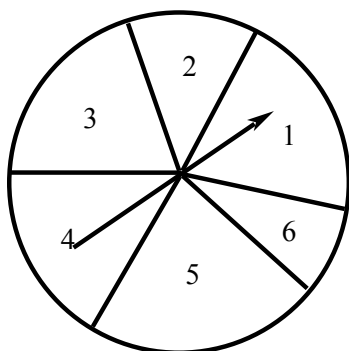
Để trả lời câu hỏi này, tác giả nêu ra cho học sinh của hai thể chế nhiều bài tập gắn với trường hợp các biến cố không đồng khả năng để đặt các em vào những tình huống mà kỹ thuật sử dụng công thức Laplace dẫn đến thất bại.

Ba bài toán dưới đây được nêu ra cho 78 học sinh của I1 và 92 học sinh của I2. Tất cả các phép thử xét trong ba bài toán này đều liên quan đến các biến cố không đồng khả năng.

Bài toán 1

Xét trò chơi “quay số”. Dưới đây là quy tắc của trò chơi :

Quay bánh xe được phân ô và mỗi ô có một số như dưới đây. Khi bánh xe ngừng quay, quan sát con số nằm trong ô mà mũi tên chỉ vào. Ai nhận được một số là bội số của 3 thì người đó sẽ trúng thưởng.

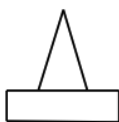


a) Em hãy nêu một cách tìm xác suất trúng thưởng khi tham gia trò chơi.

b) Hãy trình bày thêm một cách thứ hai để tìm xác suất trúng thưởng.

Bài toán 2

Đặt một đỉnh mũ (loại đỉnh gồm một đầu nhọn và một đầu tròn) trong lòng bàn tay và tung nó lên. Quan sát tư thế của đỉnh khi nó đã nằm yên trên mặt đất, người ta thấy có hai kết quả được minh họa như hình vẽ sau:



Kết quả 1



Kết quả 2

Vấn đề là phải tìm xác suất xuất hiện mỗi kết quả.

Em hãy nêu phương pháp tìm các xác suất đó.

Bài toán 3

Từ hai đồng tiền kim loại: 200đ và 500đ (hiện đang lưu hành tại Việt nam), người ta dán hai mặt sấp (mặt có hình quốc huy) của hai đồng tiền này thì nhận được một đồng tiền ghép có hai mặt như sau: một mặt ghi mệnh giá 200đ và mặt kia ghi mệnh giá 500đ.



Kết quả nhận được

Sự vắng mặt của việc nghiên cứu kỹ thuật tần suất trong hai thể chế kéo theo một lượng lớn sai lầm, đặc biệt là khi học sinh sử dụng một cách máy móc kỹ thuật • La cho các phép thử gồm những biến cố không đồng khả năng.

Trong I1 (78 học sinh)

Từ 50% đến 70% học sinh sử dụng τ_{La} . Tùy theo từng câu hỏi, có 1 đến 10 học sinh không cho câu trả lời. Nhưng khoảng 30% trả lời là “không thể tính vì các biến cố không đồng khả năng”. Không có lời giải nào thuộc kiểu “tần suất” xuất hiện.

Điều này có thể được giải thích bởi việc giáo viên P1 thường xuyên nhắc học sinh sự cần thiết phải kiểm tra điều kiện đồng khả năng trước khi sử dụng công thức Laplace. Nhưng tất cả những phép thử mà giáo viên P1 đưa cho học sinh nghiên cứu đều thuộc mô hình toán học, nên việc kiểm tra điều kiện “đồng khả năng” chỉ là hình thức. Khi điều kiện này không thoả mãn, học sinh không có kỹ thuật khác để giải quyết bài toán.

Trong I2 (92 học sinh)

Từ 56% đến 72% học sinh sử dụng τ_{La} . Khoảng 12% không đưa ra câu trả lời. Không có một chiến lược “tần suất” nào xuất hiện.

Đáng lưu ý là một số ít học sinh đề nghị lấy tần suất làm xác suất cho các câu hỏi 1a (1%), 1b (2%), 2 (10%) và 3 (11%), nhưng không nói rõ điều kiện là số phép thử phải khá lớn.

Trong phần tiếp theo của luận văn, tác giả Trần Tuý An xây dựng một “tiểu đồ án dạy học”, qua đó giới thiệu với học sinh hai cách tiếp cận khái niệm xác suất. Ở đây chúng tôi không đề cập phần này của luận văn.

Phân tích các tiết học đã quan sát dẫn chúng tôi đến những câu hỏi sau :

- *Giải thích như thế nào hiện tượng không khác nhau bao nhiêu trong sự lựa chọn của hai giáo viên, mặc dù quan điểm của các thể chế được nghiên cứu lại khác nhau ?*
- *Công tác đào tạo giáo viên ban đầu đã tính đến phương diện tri thức luận của tri thức như thế nào ?*
- *Làm sao để đưa vào trong hệ thống giáo dục những kết quả nghiên cứu về việc dạy học xác suất trong khi vẫn tính đến một cách đầy đủ những ràng buộc nghề nghiệp ?*

4. Khó khăn đã gặp trong dạy học xác suất ở lớp 11 có phải là một vấn đề nghề nghiệp hay không ?

Chúng ta đã thấy ở trên là một vấn đề của nghề nghiệp cần phải được xác định qua quan sát và phân tích những điều kiện, những ràng buộc của nghề này và cần phải thừa nhận – ít nhất một phần, như là một khó khăn khách quan (dù có thể lúc đầu khó khăn đó chỉ được cá nhân cảm thấy một cách chủ quan), và xứng đáng có một huy động tập thể để tìm một số phương sách cho nghề.

Có nhiều khả năng để mang lại một câu trả lời cho vấn đề được đặt ra. Trong nghiên cứu này, chính hoạt động bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên sẽ được sử dụng để chỉ ra rằng việc không dạy kỹ thuật tần suất thực sự là một vấn đề. Vấn đề này vượt quá bối cảnh của nghiên cứu trên và là vấn đề đặt ra cho nghề dạy học.

Ở đây, giảng viên hướng dẫn luận văn của Trần Tuý An sẽ sử dụng một số tiết được thực hiện trong các đợt bồi dưỡng thường xuyên cho một số lớn giáo viên ở các tỉnh. Việc đào tạo này được tiến hành qua bốn pha.

Pha 1 : các giáo viên tham gia lớp đào tạo được phân thành hai đội, mỗi đội phân tích biên bản một tiết dạy (của P1 và P2). Giảng viên ghi nhận là giáo viên chỉ đưa ra những nhận xét theo kiểu : P1, P2 đã đưa đủ các ví dụ, đã không xây dựng nhiều hoạt động cho học sinh tìm tòi. Khi toàn lớp thảo luận cũng không ai nói về sự không đầy đủ của kỹ thuật giải quyết T3 (vắng mặt bước kiểm tra tính đồng khả năng) và tầm quan trọng của định nghĩa khái niệm xác suất theo tần suất.

Pha 2 : Giảng viên trình bày sự cần thiết và lợi ích của nghiên cứu tri thức luận về tri thức cần dạy, bằng cách làm việc trên trường hợp cụ thể là khái niệm xác suất : những phép thử mà các biến cố đồng khả năng chỉ là những phép thử “lý tưởng”. Khi ta làm việc với kiểu phép thử này, ta chỉ ở trong mô hình toán học. Chỉ có cách tiếp cận tần suất mới cho phép nghiên cứu xác suất của các biến cố gắn với thực tiễn.

Pha 3 : Sau khi nghiên cứu tri thức cần dạy với việc chỉ ra sự cần thiết của cách tiếp cận tần suất để nghiên cứu xác suất của các biến cố gắn với thực tiễn, giáo viên được mời phân tích sách giáo khoa hiện hành và sau đó thiết kế tình huống dạy học khái niệm xác suất. Khi phân tích sách giáo khoa, một số ý kiến của giáo viên cho thấy họ đã tính đến phương diện tri thức luận của khái niệm xác suất, nhưng họ vẫn không đi đến chỗ xây dựng được tình huống dạy học cho phép bổ sung quan hệ thể chế.

Pha 4 : Việc phân tích các tình huống đã xây dựng cho thấy giáo viên đã tính đến phương diện tri thức luận của khái niệm xác suất. Nhưng họ có khó khăn trong việc xây dựng các tình huống dạy học cho phép bổ sung quan hệ thể chế.

Pha 5 : Sau khi trình bày một số nghiên cứu về dạy học khái niệm xác suất, giảng viên mời giáo viên tham dự đợt bồi dưỡng thường xuyên phân tích vài tình huống dạy học được đề nghị trong các công trình này.

Hoạt động bồi dưỡng giáo viên kể trên cho phép kết luận rằng rõ ràng là ở đây Việt Nam đang đối diện với một vấn đề nghề nghiệp.

Cái còn lại là đương đầu với những vấn đề kiểu này như thế nào ? Chắc chắn phải có một thay đổi chương trình đào tạo giáo viên ban đầu⁴, trong đó chú trọng đến nghiên cứu tri thức luận các tri thức, và cho phép lồng vào chương trình những kết quả nghiên cứu về việc dạy học các tri thức này.

5. Thay cho lời kết

Công việc thực hiện trong hoạt động bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên đã chỉ ra rằng vấn đề ghi nhận được khi phân tích thực hành dạy học của hai giáo viên P1, P2 rõ ràng là một vấn đề nghề nghiệp ở Việt – Nam.

Nó cũng chỉ ra những lỗ hổng trong đào tạo ban đầu : các học phần toán học thuần túy chỉ làm việc trên mô hình toán học. Chẳng hạn, trình bày các định nghĩa khác nhau của khái niệm xác suất : định nghĩa cổ điển (bằng công thức Laplace), tần suất,

⁴ Trong bài viết này, từ *đào tạo ban đầu* dùng để chỉ sự đào tạo ở các trường sư phạm, mà đối tượng đào tạo là những người chưa phải là giáo viên.

hình học, tiên đề, nhưng không có một nghiên cứu nào về bản chất tri thức luận, cũng không giải thích sự cần thiết và sự sử dụng mỗi định nghĩa.

Từ đó suy ra tầm quan trọng của công tác đào tạo ban đầu. Việc đào tạo này phải chú ý mang lại những giải pháp (luôn luôn là bộ phận và tạm thời) cho những vấn đề nghề nghiệp, với hy vọng là những giải pháp đó “thấm” được vào nghề thông qua đội ngũ giáo viên được đào tạo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bessot A., Comiti C. (2013) Apport des recherches comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Vietnam/France, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(1), pp. 45-77, Grenoble : La Pensée Sauvage
2. Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), pp. 22–265, Grenoble : La Pensée Sauvage
3. Chevallard Y. (2006) Former des professeurs, construire la profession de professeur. *Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation* – Genève <http://yves.chevallard.free.fr/>
4. Chevallard Y. (2010) Présentation in Bronner, Larguier, Artaud, Bosch., Chevallard, Cirade, Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp.15–19). Montpellier : Université Montpellier 2.
5. Comiti C. (2013) Comment la recherche en didactique peut répondre aux besoins des enseignants, *Quelques avancées significatives dans la recherche en didactique des mathématiques*, Actes du Colloque International Franco-Vietnamien en didactique des mathématiques, Ho Chi Minh Ville, Việt-Nam
6. Larguier M. (2012) La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession en seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32 (1) pp. 101-144, Grenoble : La Pensée Sauvage.
7. Trần Tuý An (2007), *Nghiên cứu thực hành giảng dạy khái niệm xác suất trong các lớp song ngữ và các lớp phổ thông ở Việt Nam*, Luận văn Thạc sỹ, Đại học Sư phạm tp Hồ Chí Minh
8. Manuel des classes bilingues (1998) “*Activités propédeutiques. Classes : 11ème -12ème. Dossier thématique : Statistiques/ Probabilités*”. Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE VISANT À SENSIBILISER LES ÉLÈVES DE PREMIÈRE S AU CONCEPT DE LIMITE D'UNE SUITE

Patrick Gibel*

Résumé

Cet article vise à établir la pertinence d'un modèle d'analyse des raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations didactiques comportant une dimension recherche. Le modèle, élaboré à partir de la Théorie des Situations Didactiques et de la Sémiotique de C.S. Pierce, offre la possibilité d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations d'action, de formulation mais aussi en situation de validation. Nous l'utiliserons dans le cadre de l'étude d'une séquence, visant à sensibiliser les élèves de Première scientifique au concept de limite, afin d'effectuer une analyse a priori de la situation et de décrire les raisonnements susceptibles d'être produits au cours de la séquence.

Mots-clés: Raisonnement, suite, Analyse, limite, TICE.

Introduction

La première partie de l'article a pour objet de présenter les caractéristiques du modèle d'analyse des raisonnements élaboré précédemment par Bloch et Gibel (2011), Gibel (2015). Nous commençons par définir ce que nous appelons *raisonnement* dans le cadre de notre recherche en didactique des mathématiques, puis nous explicitons les principales caractéristiques de notre modèle. Ce dernier permet d'effectuer une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori* détaillée des raisonnements apparaissant dans une situation adidactique (Brousseau, 1998) ou à dimension adidactique (Mercier 1995 ; Bloch 1999).

Dans la deuxième partie, nous présentons la situation « La suite de carrés » mise en œuvre dans une classe de Première scientifique¹. Nous expliciterons les enjeux et les spécificités de cette ingénierie et nous proposerons une analyse *a priori* détaillée de cette séquence en définissant les différents niveaux de milieux liés aux situations d'action, de formulation et de validation.

1. Présentation du modèle d'analyse des raisonnements

1.1 Caractérisation du raisonnement

1.1.1 La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

En classe de mathématiques, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons pris comme définition initiale celle proposée par Oléron :

* Lab-E3D, Laboratoire Epistémologie et Didactiques des disciplines, Université de Bordeaux, FRANCE.

¹ Les élèves sont âgés de 16-17 ans.

Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. (Oleron, 1977, p.10).

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau & Gibel, 2005), parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement – le moins possible - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » dans la Théorie des Situations Didactiques. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La Théorie des Situations Didactiques a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

1.1.2. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences. Mais cette caractérisation doit être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante :

Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A , à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus un agent E , élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

1.2 La Théorie des Situations Didactiques comme fondement de notre modèle

Un postulat de notre travail est que la Théorie des Situations Didactiques fournit un cadre privilégié pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être nécessairement complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements (Gibel, 2004) et des signes, formels et langagiers, qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction nous utilisons les outils d'analyse issus de la sémiotique peircienne (Bloch & Gibel, 2011 ; Bloch, 2008 ; Gibel, 2015).

1.3 Le modèle d'analyse des raisonnements

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement, issues de situations fondamentales d'un savoir dans la Théorie des Situations Didactiques a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Le tableau 1 résume les niveaux de milieux – de M1 à M-3 – correspondants à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999). En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

M1 Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet	didacti-que
M0 Milieu d'apprentissage: institutionnalisation	E0: Elève	P0: Professeur enseignant	S0: situation didactique	
M-1 Milieu de référence : situation de formulation & situation de validation	E-1: E-apprenant	P-1: P régulateur	S-1: situation d'apprentissage	adidac-tique
M-2Milieu objectif: situation d'action Milieu heuristique	E-2: E-agissant	P-2: P dévoluteur observateur	S-2: situation de référence	
M-3 Milieu matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective	

Tableau 1. La structuration du milieu

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généralité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées.

Dans Bloch et Gibel (2011), nous avons été amenés à retenir trois axes principaux qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment

Le premier axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux. Le deuxième axe est celui des signes et des représentations observables. Le troisième axe est étroitement lié aux représentations

observables, il s'agit d'une analyse de l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation.

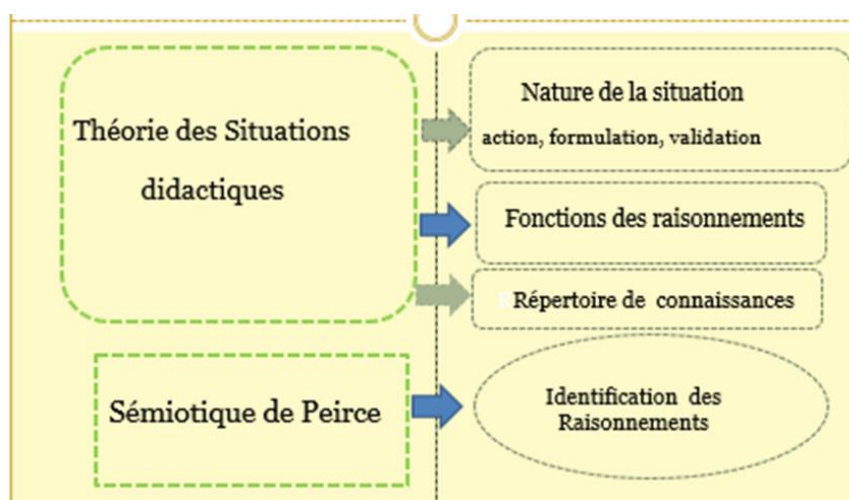


Figure 1. Schéma du modèle d'analyse des raisonnements

2. Etude de la situation « La suite de carrés »

2.1. La situation : Présentation et enjeu didactique de la séquence

La situation « La suite de carrés » a été proposée à des élèves d'une classe de Première scientifique². On construit une « suite » de carrés juxtaposés de la manière suivante : le côté du premier carré est de longueur 1 (en référence à une unité choisie), puis chaque carré a pour mesure de côté $\frac{3}{4}$ de la mesure du côté du carré précédent.

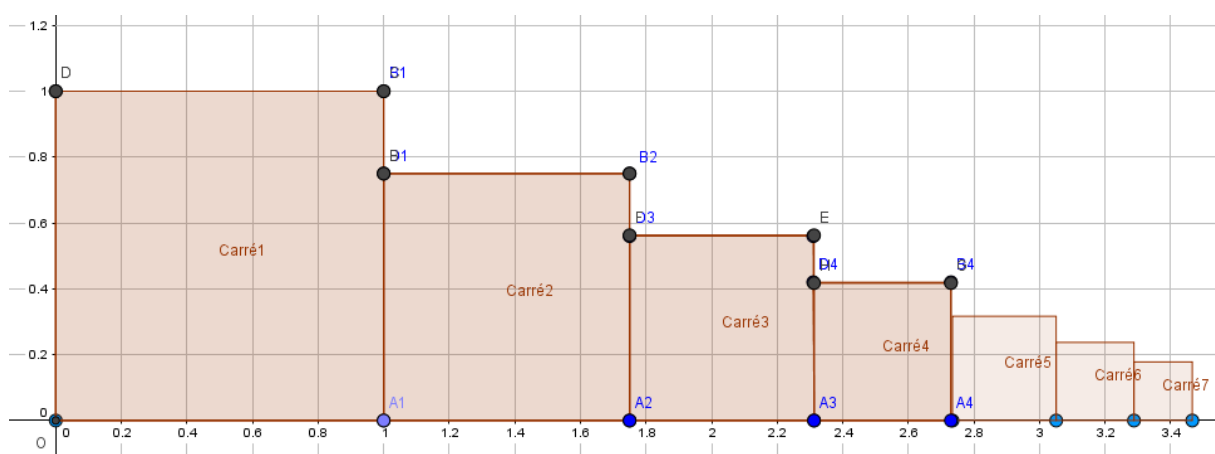


Figure 2. Les sept premiers carrés obtenus par le dispositif de construction

Dans cette situation, il s'agit pour les élèves de déterminer s'il est possible de construire un n ème carré, dont a_n , l'abscisse du point A_n correspondant à la mesure OA_n , (où O désigne l'origine du repère), est strictement supérieure à 4.

L'objectif de la séquence est de sensibiliser les élèves à la notion de limite finie d'une suite. Cette situation d'apprentissage est une situation à dimension adidactique visant à confronter les élèves à la notion de limite. Cette dernière est obtenue ici comme le résultat du processus de construction des carrés itéré à l'infini.

² Les élèves sont âgés de 16-17 ans.

D'un point de vue mathématique, nous cherchons à déterminer dans un premier temps si la suite (a_n) est majorée et ensuite si elle admet une limite.

La limite de cette suite, associée à l'abscisse du point A_n , assimilable à une suite de sommes partielles (d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$) ne peut s'obtenir qu'à l'issue d'un calcul de limite.

L'enjeu de la situation est que les élèves puissent avoir l'idée « intuitive » du résultat de ce processus de calcul itéré « à l'infini ». Cependant, ils ne pourront accéder seuls aux arguments mathématiques justifiant la valeur de cette limite. D'un point de vue numérique, le professeur devra encourager l'utilisation d'outils TICE, afin que les élèves élaborent des éléments de justification, acceptables à ce moment-là de la scolarité compte tenu des programmes de la classe de Première scientifique.

La situation prévoit l'introduction de la notion de limite, à partir de conjectures sur des grandeurs relatives à des objets géométriques : ainsi les élèves disposent d'une entrée dans un milieu matériel qui leur permet de s'appuyer sur des représentations initiales d'ordre figural. Cette « entrée » permet de faciliter la dévolution du problème. Les éléments de preuve devront cependant être fournis, en partie, par le professeur dans un épisode didactique, car les élèves n'ont, à ce stade, pas d'outils de définition et de preuve de ce qu'est une limite finie (dans le cadre de l'étude d'une suite). En ce sens il s'agit d'une situation à dimension adidactique (Mercier 1995 ; Bloch 1999).

Cette ingénierie a été élaborée conjointement avec Pierre Bourumeau, enseignant de la classe de Première scientifique dans laquelle s'est déroulée la séquence.

La séquence produite vérifie les caractéristiques suivantes :

1. Elle vise à sensibiliser les élèves au concept de limite finie d'une suite réelle.
2. Cette séquence intègre une situation de formulation et une situation de validation.
3. Elle prend appui sur l'utilisation des TICE.
4. Elle permet de développer la pratique du raisonnement, au travers de ses différentes fonctions pour donner du sens au concept de limite.

2.2 Analyse ascendante des différents niveaux de milieu

Nous allons à présent expliciter les différents niveaux de milieu correspondants au Tableau 1.

2.2.1. La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

Le milieu matériel est constitué des cinq premiers carrés qui ont été construits par les élèves. L'enseignant a construit sur le papier millimétré le premier carré et leur a communiqué le processus de construction.

2.2.2. La situation de référence : Sujet agissant et milieu objectif

Le milieu objectif est constitué des n premiers carrés (n quelconque) résultant de la construction des carrés. Ces figures fonctionnent comme un indice de la figure « finale ».

Les actions du sujet agissant ont pour objet de :

- conjecturer et prouver l'alignement des sommets $(B_i, 1 \leq i \leq N)$
- calculer l'abscisse a_n du point A_n pour n quelconque.

2.2.3. La situation d'apprentissage : élève apprenant et milieu de référence

Le milieu de référence est constitué des conjectures sur la limite de la suite (a_n) . Les élèves vont produire des calculs et des raisonnements assimilables à des éléments de preuve. Les élèves vont être amenés à débattre de la validité des raisonnements produits pour répondre à la problématique. Il s'agit ici d'une situation de validation.

2.3 Eléments d'analyse a priori

2.3.1. *L'objectif de la séquence* est ici relativement ambitieux : les divers moyens d'investigation doivent permettre de conjecturer que : quel que soit le nombre n de carrés construits, la longueur OA_n ne peut excéder une certaine valeur numérique (4). Il s'agira ensuite de mettre les élèves en situation de prouver, grâce notamment aux outils de géométrie analytique nouvellement acquis (vecteurs et équations de droites) que la suite est nécessairement majorée par la valeur (4). L'objectif est de sensibiliser les élèves à la notion de limite.

La problématique dévolue aux élèves est formulée ainsi : « En répétant le processus de construction des carrés un nombre n de fois suffisant, peut-on créer un carré dont l'abscisse du sommet A_n dépasse 4 ? »

2.3.2. *Elément de différenciation* : l'enseignant envisage d'aider, si nécessaire, certains élèves en difficulté pour expliciter a_n directement en fonction de n ; il leur proposera la démarche suivante (visant à exprimer (a_n) sous la forme d'une suite récurrente) :

On note a_n l'abscisse du point A_n .

Ainsi, on a la suite numérique $a_1 = 1, a_2 = 1,75, a_3 = \dots\dots\dots, a_4 = \dots\dots\dots$, etc.

2.3.3. Procédures de résolution attendues

1) Calculs des abscisses $a_2 \dots a_5$

Étape $n =$	1	2	3	4	5
Côté $n^{\text{ième}}$ carré	1	0,75			
Abscisse a_n	1	1,75			

2) Conjecture à l'aide de logiciels :

On établit en s'appuyant sur la logique de construction des carrés que

$$a_{n+1} = a_n + (3/4)(a_n - a_{n-1})$$

- Conjecture à l'aide d'un tableur :

En entrant la formule correspondante dans un tableur, on peut calculer les 100 premiers termes de la suite (a_n) avec une précision de 14 décimales, et on observe que les termes a_n se rapprochent de la valeur 4, à laquelle ils sont arrondis à partir de $n = 82$.

– Conjecture à l'aide d'un algorithme :

Les élèves peuvent rédiger un programme sur Algobox ou sur la calculatrice. En procédant ainsi, ils observent de même une « stagnation » à la valeur 4, qui ne peut s'expliquer que par les limites de la puissance de calcul des outils numériques.

Les outils numériques permettent donc de conjecturer l'existence d'une valeur « limite » des valeurs des abscisses des points A_n notée a_n , qui semble être 4.

2.3.4. Démonstration de la convergence de la suite

Pour tous sommets B_n et B_{n+1} de deux carrés consécutifs, l'abscisse de B_{n+1} est celle de B_n augmentée de $\frac{3}{4}$ de la longueur $A_n B_n$, correspondant au côté du $n^{\text{ième}}$ carré), et l'ordonnée de B_{n+1} est celle de B_n diminuée de $1/4$ de la même longueur $A_n B_n$. Pour tout entier n , le coefficient directeur de la droite $(B_n B_{n+1})$ est donc :

$$\frac{-\frac{1}{4}A_n B_n}{\frac{3}{4}A_n B_n} = -\frac{1}{3}$$

Toutes les droites passant par des couples de points consécutifs ont même coefficient directeur $-\frac{1}{3}$, elles sont donc parallèles entre elles. Une autre façon de le voir est que tout vecteur $\overrightarrow{B_n B_{n+1}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Comme ces droites ont toujours un point en commun (deux à deux), elles sont confondues. Les points B_n sont donc alignés. La droite qui les joint a pour équation :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Il est alors possible de démontrer que cette droite coupe l'axe des abscisses en $x = 4$.

Or tout point B_n a une ordonnée positive (fraction de la longueur de départ), comme ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, alors son abscisse a_n (qui bien sûr est aussi celle de A_n) vérifie

$$-\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3} \geq 0$$

$$\text{d'où } a_n \leq 4.$$

Par conséquent aussi grand que soit n , a_n , l'abscisse du point A_n , ne peut donc pas dépasser 4.

Si le caractère borné de la suite est accessible aux élèves de Première scientifique, de même que le fait qu'elle soit croissante ils ne disposent pas du résultat leur permettant de déduire que la suite est convergente. Ils seront donc conduits à étudier la convergence de la suite en utilisant les TICE.

2.3.5. Déroulement envisagé

Séance 1

Après l'exposé de la situation initiale, l'appropriation de la situation se fera par le calcul et le tracé individuel des cinq premiers carrés sur le papier quadrillé fourni. Une première conjecture sera émise, en binôme, à propos des points B_1 , B_2 et B_3 , les élèves devront prouver par la méthode de leur choix (de nature scalaire ou de nature vectorielle) l'alignement des points. La séance se poursuivra par la formulation d'une conjecture (générale), à propos des points $B_1, B_2, \dots, B_N$ (où N désigne un entier quelconque fixé) que les élèves devront ensuite prouver.

La dernière phase de cette première séance vise à amener les élèves à produire des éléments de réponse à la problématique (existence d'une valeur « limite » de la suite (a_n)). Les élèves pourront choisir de s'appuyer sur l'alignement des sommets B_n afin de montrer que la suite (a_n) est majorée. Ils pourront aussi exprimer a_n soit directement en fonction de n (suite de somme partielle associée à une suite géométrique de raison $3/4$), soit en fonction de a_{n-1} et a_{n-2} (suite récurrente) ; ils pourront étudier cette suite en mettant en œuvre des outils numériques.

Séance 2

En début de séance 2 les élèves poursuivront en binôme leur recherche en mettant en œuvre les outils numériques : tableur et/ou programmation d'algorithme afin de déterminer le comportement de la suite. La valeur limite apparaîtra, et sera aussi l'occasion de souligner les « limitations » liées à l'usage des outils numériques. En effet, la convergence étant rapide, Excel comme Algobox ou les calculatrices arrondissent rapidement le résultat à 4, d'où l'incohérence : on ajoute un nouveau carré, si petit soit-il, et la longueur reste identique.

La phase suivante vise à mettre en débat les éléments de réponse à la problématique. Il faudra alors revenir au tracé initial des carrés, et à l'alignement des sommets B_n , pour afin en déduire l'existence et la valeur de la limite. Le déroulement envisagé par l'enseignant est présenté, de façon détaillée, en Annexe.

2.4 Les raisonnements susceptibles d'être produits

Les raisonnements susceptibles d'apparaître au cours de la séquence « La suite des carrés » sont explicités dans le tableau 2 ci-dessus. Nous indiquons pour chaque niveau de milieu :

- Les fonctions des raisonnements attendus ;
- Les niveaux d'utilisation des symboles ;
- Les niveaux d'actualisation du répertoire ;
- Les types de raisonnements (inductif, déductif, abductif).

Dans le tableau 2, SEM désigne un raisonnement de nature sémantique et SYNT désigne un raisonnement de nature syntaxique.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Conjectures - Intuition sur un dessin ou calcul	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques Conjectures Décision sur un objet mathématique Décision sur un outil numérique	R1.3 SYNT Preuves sémantiques Généralisations
Niveau d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes Enrichissement au niveau heuristique	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau arguments - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques (notion de seuil)
Type de raisonnement	R.4.1 Abductif Déductif, inductif abductif	R.4.2 Déductif, inductif	R.4.3 Déductif

Tableau 2. Fonctions et statuts des raisonnements susceptibles d'être produits au cours de la séquence

Conclusion

L'analyse *a priori* de la séquence, produite conjointement avec l'enseignant dans le cadre d'une recherche collaborative, nous a permis non seulement de formuler les raisons pour lesquelles nous avons élaboré cette situation d'apprentissage, mais encore d'explicitier les formes de raisonnements susceptibles d'apparaître lors des différentes phases de la séquence. Cette analyse *a priori* a ainsi facilité la tâche de l'enseignant en le préparant à envisager un traitement adéquat des raisonnements des élèves produits au cours de chacune des situations (situation d'action, de formulation et de validation). Par ailleurs, l'analyse *a priori* a mis en évidence la nécessité d'articuler les différents cadres (numériques, algébriques et géométriques) durant chacune des phases de la séquence afin de permettre aux élèves une sensibilisation à la notion de limite d'une suite. Cette même analyse prépare également l'enseignant à gérer les résultats numériques obtenus par l'usage des TICE en vue de faire acquérir à ses élèves une attitude critique vis-à-vis des résultats numériques obtenus.

Une analyse *a posteriori* détaillée de la séquence mise en œuvre, basée sur l'analyse de différents épisodes, réalisée à l'aide de notre modèle d'analyse des raisonnements nous a conduit à mettre en lumière les différentes formes de raisonnements mis en œuvre par les élèves. La contrainte liée au nombre de pages ne

nous autorise pas à expliciter, dans le cadre de cet article, la manière dont nous avons produit l'analyse des épisodes. Nous avons mis ainsi en évidence les différentes fonctions des raisonnements : décision de calcul, conjecture, décision sur un objet mathématique, décision sur un outil numérique, interprétation, établissement d'une preuve sémantique, élaboration d'une preuve syntaxique. Ceci nous a permis de mettre en lumière la richesse de cette séquence du point de vue de la pratique du raisonnement en classe de Première scientifique.

Notre modèle d'analyse des raisonnements semble donc être un outil pertinent pour élaborer une analyse des formes de raisonnements susceptibles d'être produits au cours de chacune des phases et ensuite pour produire une analyse *a posteriori* détaillée du déroulement de la séquence, mettant en lumière les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves. Cette étude nous a permis de rendre compte de la pertinence et de l'adéquation de cette situation d'apprentissage pour permettre une sensibilisation des élèves à la notion de limite, qui sera étudiée de façon détaillée l'année suivante en classe de Terminale.

REFERENCES

1. Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193.
2. Bloch, I. (2006) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7, Paris.
3. Bloch, I., & Gibel, P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
4. Brousseau, G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
5. Brousseau, G., & Gibel, P. (2005) Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
6. Durand-Guerrier, V. (2007) Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In A. Rouchier (Ed), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom)*. Bordeaux : IUFM d'Aquitaine.
7. Duval, R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
8. Everaert-Desmedt, N. (1990) *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce*. Liège : Pierre Mardaga.
9. Gibel, P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques*. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 2, Bordeaux.

10. Gibel, P. (2008) Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39.
11. Gibel P. (2015) Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire, *Éducation et Didactique*, 9-2, 51-72, Presses Universitaires de Rennes.
12. Legrand, M. (1997) La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), 221-279.
13. Margolinas, C. (1994) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations. In Margolinas C. (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques*, (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
14. Mercier, A. (1995) Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas C (Ed.), *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168), Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
15. Oléron, P. (1977) *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
16. Pierce, C. S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud).

ANNEXE

Déroulement de la séquence constituée de 2 séances

Séance 1_(en demi-groupe)

Phase 1 : Présentation de la situation- Consigne relative à la construction des 5 premiers carrés.

Phase 2 : Construction sur papier millimétré des 5 premiers carrés.

Phase 3 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) relatives à B_1, B_2, B_3 .

Phase 4 : Mise en commun des conjectures-Communication des preuves.

Phase 5 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) $B_1, B_2, \dots, B_N$.

Phase 6 : Mise en commun des conjectures-Communication des preuves.

Phase 7 : Formulation de la problématique.

Phase 8 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Séance 2_(en groupe-classe)

Phase 9 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Phase 10 : Recueil des résultats.

Phase 11 : Majoration de la suite Situation de formulation des expressions de (a_n) .

Phase 11 : Situation de validation.

Phase 12 : Situation de rédaction individuelle d'une procédure de résolution.

Phase 13 : Situation d'institutionnalisation.

PHÂN TÍCH MỘT TÌNH HUỐNG DẠY HỌC NHẪM NÂNG CAO NHẬN THỨC VỀ KHÁI NIỆM GIỚI HẠN DÃY SỐ CỦA HỌC SINH LỚP 11 BAN KHOA HỌC

Patrick Gibel*

Résumé

Cet article vise à établir la pertinence d'un modèle d'analyse des raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations didactiques comportant une dimension recherche. Le modèle, élaboré à partir de la Théorie des Situations Didactiques et de la Sémiotique de C.S. Pierce, offre la possibilité d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations d'action, de formulation mais aussi en situation de validation. Nous l'utiliserons dans le cadre de l'étude d'une séquence, visant à sensibiliser les élèves de Première scientifique au concept de limite, afin d'effectuer une analyse a priori de la situation et de décrire les raisonnements susceptibles d'être produits au cours de la séquence.

Mots-clés : Raisonnement, suite, Analyse, limite, TICE.

Tóm tắt

Bài viết này hướng đến việc thiết lập sự thích đáng giữa mô hình phân tích các lập luận của học sinh và của giáo viên trong các tình huống didactic dưới góc nhìn nghiên cứu. Mô hình, được thiết kế từ Lý thuyết tình huống của didactic và Lý thuyết ngữ nghĩa của C.S. Pierce, cho phép phân tích các lập luận mà học sinh và giáo viên sử dụng trong các tình huống hoạt động, tình huống diễn đạt và cả trong tình huống hợp thức hoá. Chúng tôi sử dụng nó trong việc nghiên cứu một buổi học được thiết kế để giúp cho học sinh lớp 11 ban khoa học cảm nhận được khái niệm giới hạn, từ đó, chúng tôi sẽ thực hiện một phân tích tiên nghiệm cho tình huống và mô tả những lập luận có thể xuất hiện trong buổi học.

Từ khoá: Lập luận, dãy số, Giải tích, giới hạn, tích hợp công nghệ thông tin và truyền thông trong dạy học (TICE).

Mở đầu

Phần đầu của bài viết giới thiệu những đặc trưng của mô hình phân tích các lập luận được thiết kế trước đây bởi Bloch và Gibel (2011), Gibel (2015). Chúng tôi bắt đầu bằng việc định nghĩa khái niệm lập luận trong khuôn khổ nghiên cứu didactic toán của mình, tiếp theo, chúng tôi giải thích những đặc trưng chủ yếu trong mô hình của mình. Mô hình cho phép thực hiện một phân tích tiên nghiệm và hậu nghiệm chi tiết về các lập luận xuất hiện trong tình huống lý tưởng (Brousseau, 1998), hoặc một tình huống định hướng lý tưởng (Mercier, 1995; Bloch, 1999).

Trong phần thứ hai, chúng tôi giới thiệu tình huống « dãy các hình vuông » được dạy ở một lớp 11 ban khoa học¹. Chúng tôi sẽ giải thích các trọng điểm, các điểm đặc thù của đề án này và đề xuất một phân tích tiên nghiệm chi tiết của buổi dạy bằng cách định nghĩa những cấp độ môi trường khác nhau gắn với các tình huống hoạt động, tình huống diễn đạt và tình huống hợp thức hoá.

* Lab-E3D, Viện nghiên cứu Tri thức luận và Didactic các môn học, Đại học Bordeaux, Pháp.

¹ Các học sinh ở lứa tuổi từ 16 đến 17.

1. Giới thiệu mô hình phân tích các lập luận

1.1 Đặc trưng của lập luận

1.1.1 Xác định một lập luận tạo ra bởi một chủ thể : khái niệm « tình huống »

Trong một lớp học toán, thuật ngữ « lập luận » bao trùm một phạm vi rộng lớn hơn rất nhiều so với các lập luận hình thức, lập luận logic, hoặc lập luận toán học. Do vậy, chúng tôi xem xét định nghĩa được đề xuất bởi Oléron:

Một lập luận là một chuỗi, một sự kết hợp hoặc một sự đối chiếu các phát biểu hoặc các trình bày tuân thủ những ràng buộc có thể làm rõ được, và dẫn đến một mục đích nào đó. (Oleron, 1977, tr.10).

Do đó, như chúng tôi đã làm rõ về thuật ngữ này (Brousseau & Gibel, 2005), trong số những điều kiện đi kèm cùng việc sản sinh ra một lập luận giả định, chỉ một số chúng - ít có thể nhất – có thể dùng để xác định và làm rõ nó. Những điều kiện này không phải là bất kì. Chúng tạo thành một tổng thể chặt chẽ, được gọi là « tình huống » trong Lý thuyết tình huống của didactic. Một tình huống có thể giải thích tại sao mà một lập luận sai được sản sinh từ các lí do khác hơn là một sai lầm hoặc là một sự thiếu hiểu biết của chủ thể. Quan điểm này hơi khác biệt so với những gì mà các giáo viên thường nghĩ: chỉ những lập luận hoàn toàn đúng mới được sử dụng thật sự. Một lập luận sai chỉ là một đối tượng nghiên cứu khá đặc biệt. Lý thuyết tình huống của didactic đặt mục tiêu nghiên cứu và mô hình hoá các tình huống được định nghĩa như trên. Lý thuyết này là một công cụ nghiên cứu các giải thích tối thiểu nhất cho những gì quan sát được, phù hợp với các thực tế đã biết.

1.1.2. Những lập luận có hiệu lực

Những lập luận mà chúng tôi sẽ nghiên cứu trong khuôn khổ học toán có thể được mô hình hoá một cách cơ bản bởi các suy diễn. Nhưng việc nêu các đặc trưng này phải được bổ sung thêm vì chúng tôi muốn phân biệt các lập luận có hiệu lực trong các trích dẫn và tích hợp các lập luận thể hiện trong các hoạt động phi ngôn ngữ cũng như các khẳng định; điều này dẫn chúng tôi đến việc phát biểu định nghĩa sau đây:

Một lập luận là một mối quan hệ R giữa hai yếu tố A và B thoả mãn :

- A biểu thị một điều kiện hoặc một thực tế quan sát được, ngẫu nhiên ;
- B là một hệ quả, hoặc một quyết định, hoặc một thực tế được dự kiến ;
- R là một quan hệ, một quy tắc, tổng quát hơn là một kiến thức vay mượn từ một tham chiếu được xem như đã biết, đã được chấp nhận. Quan hệ R đưa đến hành vi thực hiện quyết định B , hoặc là dự đoán thực tế B , hoặc thông báo rằng thực tế B là đúng, trong bối cảnh A .

Một lập luận có hiệu lực bao gồm nhiều hơn một tác nhân E , học sinh hoặc giáo viên, sử dụng quan hệ R như là một kế hoạch xác định bởi một tình huống mà việc thực hiện nó đòi hỏi phải sử dụng quan hệ này.

1.2 Lý thuyết tình huống của didactic: nền tảng trong mô hình của chúng tôi

Công việc của chúng tôi giả định rằng Lý Thuyết tình huống của didactic cung cấp một khung lý thuyết phù hợp cho nghiên cứu này, đặc biệt là việc phân tích các chức năng của lập luận ở những mức độ khác nhau của môi trường cho phép khắc hoạ đặc trưng của các lập luận. Thế nhưng, khung lý thuyết này cần phải được bổ sung thêm các công cụ phân tích cục bộ và một phân tích các chức năng của lập luận (Gibel, 2004) và các dấu hiệu, cả hình thức lẫn ngôn ngữ hỗ trợ nó. Đối với chức năng cuối cùng này, chúng tôi sử dụng các công cụ phân tích xuất phát từ Lý thuyết ngữ nghĩa của Pierce (Bloch & Gibel, 2011 ; Bloch, 2008 ; Gibel, 2015).

1.3 Mô hình phân tích các lập luận

Một giải thích phổ biến cho việc xây dựng các tình huống dạy học, xuất phát từ các tình huống cơ bản của tri thức trong Lý thuyết Tình huống của Didactic, đã được đưa ra từ ích lợi của kiểu tình huống này đối với khả năng đưa học sinh đến tiến trình chứng minh (Legrand, 1997). Thiết kế và phân tích *tiền nghiệm* các tình huống này dựa trên việc nghiên cứu các cấp độ của những môi trường được tạo ra; phân tích *hậu nghiệm* cho phép người nghiên cứu xác định liệu có hay không một sự tương hợp giữa những gì thực sự diễn ra với những gì được dự đoán.

Bảng 1 tóm tắt các cấp độ của những tình huống – từ M1 đến M-3 – tương ứng với tình huống thực nghiệm. Các cấp độ gắn với các dấu hiệu hoàn toàn không được chấp nhận được chúng tôi đặc biệt quan tâm trong thiết kế mà chúng tôi nghiên cứu, chẳng hạn, sự xuất hiện của tiến trình chứng minh trong khi thực hiện tình huống định hướng lý tưởng (Bloch, 1999). Thật vậy, chúng tôi muốn tìm thấy và phát triển các lập luận được mong đợi trong sự nối khớp giữa môi trường khách quan và môi trường tham chiếu.

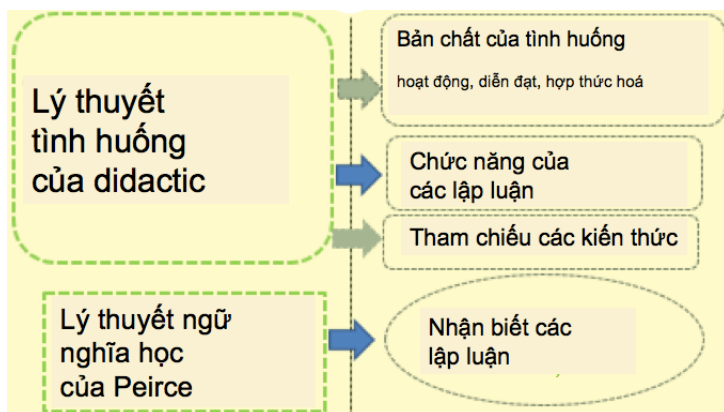
M1 Môi trường dạy học	E1 : Học sinh – phản hồi	P1: giáo viên – người trình bày	S1 : tình huống trình bày	tình huống dạy học
M0 Môi trường học : sự thể chế hoá	E0 : Học sinh	P0: Giáo viên – người dạy	S0 : tình huống dạy học	
M-1 Môi trường tham chiếu : tình huống diễn đạt và hợp thức hoá	E-1 : Học sinh – người học	P-1: Giáo viên – trọng tài	S-1 : tình huống học	tình huống lý tưởng
M-2 Môi trường khách quan : tình huống hành động Môi trường σ -rix-tic	E-2 : Học sinh – hành động	P-2 : Giáo viên – người chuyển giao, người quan sát	S-2 : tình huống tham chiếu	
M-3 Môi trường vật chất	E-3 : Học sinh – khách quan		S-3 : tình huống khách quan	

Bảng 1. Cấu trúc hoá môi trường

Trong cấu trúc nói trên, chúng tôi cho rằng các giai đoạn của tình huống có thể là nguồn gốc của các lập luận toán học: sự đối chiếu với một môi trường σ -rix-tic (môi trường khách quan) để thiết lập chúng; bước chuyển sang một môi trường tham chiếu để thiết lập điểm chung chất của các phương pháp và điểm đặc thù cần cho các tính chất được tìm thấy.

Theo Bloch và Gibel (2011), chúng tôi giữ lại ba trục phân tích chính cho phép định hướng và cấu trúc hoá phân tích của chúng tôi trên các lập luận trong mỗi tình huống được mô tả ở trên.

Trục đầu tiên là phân tích các chức năng của lập luận, được chỉ ra trên đây lúc cần thiết. Chúng tôi chú ý đến việc chỉ ra làm thế nào mà các chức năng của lập luận được gắn với các cấp độ khác nhau của môi trường và làm thế nào mà các chức năng này thể hiện các cấp độ của môi trường, để chúng có thể phục vụ cho việc định ra vị trí của học sinh trong mỗi một cấp độ này. Trục thứ hai là các dấu hiệu và các biểu diễn có thể quan sát được. Trục thứ ba gắn chặt với các biểu diễn có thể, nó hướng đến một phân tích trên việc sử dụng danh mục dạy học và cấp độ hiện thực hoá của nó.

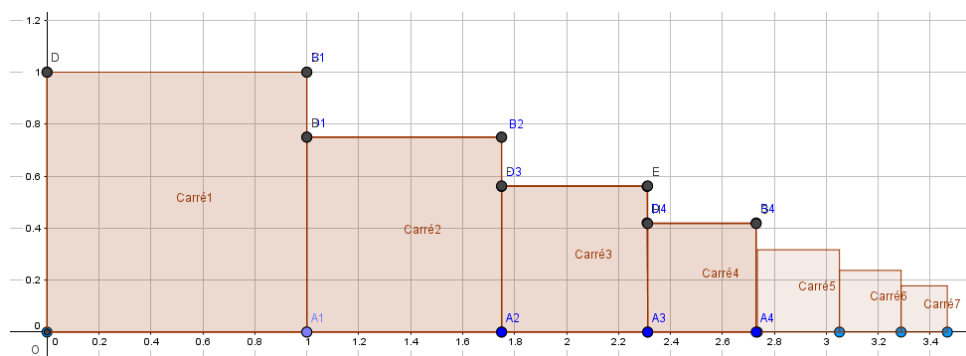


Hình 1. Sơ đồ của mô hình phân tích các lập luận

2. Nghiên cứu tình huống « Dãy các hình vuông »

2.1. Tình huống: Biểu diễn và mẫu chốt dạy học của buổi học

Tình huống « Dãy các hình vuông » đã được thực nghiệm trên đối tượng học sinh của một lớp 11 ban khoa học². Chúng tôi xây dựng một « dãy » các hình vuông đặt liền kề nhau theo cách sau đây: cạnh của hình vuông thứ nhất có độ dài 1 (theo một đơn vị độ dài), mỗi hình vuông tiếp theo có độ dài cạnh bằng $\frac{3}{4}$ độ dài cạnh của hình vuông trước đó.



Hình 2. Bảy hình vuông đầu tiên theo cách dựng được yêu cầu

Trong tình huống này, học sinh cần xác định liệu có thể dựng được một hình vuông thứ n , mà a_n , hoành độ của điểm A_n ứng với độ dài OA_n (trong đó O là gốc toạ độ), lớn hơn 4.

² Học sinh lứa tuổi 16-17.

Mục tiêu của buổi học là giúp học sinh cảm nhận được khái niệm giới hạn hữu hạn của một dãy số. Tình huống học tập này là một tình huống theo định hướng lý tưởng nhằm giúp học sinh đối diện với khái niệm giới hạn. Mục tiêu này được xem như là kết quả của tiến trình dựng các hình vuông lặp lại vô hạn lần.

Từ quan điểm toán học, chúng tôi tìm cách xác định: trước tiên, dãy (a_n) là dãy tăng và tiếp theo, nó có một giới hạn.

Giới hạn của dãy này, gắn với hoành độ của điểm A_n , ứng với dãy các tổng n số hạng đầu tiên (của một cấp số nhân với công bội $\frac{3}{4}$) chỉ có thể tìm được bằng một tính toán trên giới hạn.

Mấu chốt của tình huống là làm học sinh nảy sinh ra ý tưởng mang tính « trực giác » về kết quả của quá trình tính toán lặp lại « vô hạn lần ». Thế nhưng, học sinh không chỉ dùng các lập luận toán học để giải thích cho giá trị giới hạn này. Từ quan điểm số, giáo viên phải đưa vào các công cụ công nghệ thông tin (TICE), nhằm giúp học sinh thiết lập các yếu tố giải thích, có thể chấp nhận được vào thời gian học tập đó của chương trình lớp 11 ban khoa học.

Tình huống dự kiến việc đưa vào khái niệm giới hạn, từ các phỏng đoán trên các giá trị liên quan đến các đối tượng hình học : như vậy, học sinh tạo ra một lối vào trong môi trường vật chất, nó cho phép họ dựa trên những biểu diễn ban đầu của hình vẽ. « Lối vào » này cho phép làm tiến triển vấn đề. Thế nhưng, các yếu tố cần cho việc chứng minh phải được cung cấp, một phần, bởi giáo viên trong giai đoạn dạy học, bởi vì học sinh không có các công cụ để định nghĩa và chứng minh một giới hạn hữu hạn (trong khuôn khổ học tập một dãy số). Theo nghĩa này, chúng ta đang hướng đến một tình huống định hướng lý tưởng (Mercier 1995; Bloch 1999).

Đồ án dạy học này được thiết kế với sự hỗ trợ của Pierre Bourumeau, một giáo viên lớp 11 ban khoa học.

Buổi học được tiến hành với các mục đích sau đây:

1. Giúp học sinh cảm nhận được quan niệm về giới hạn hữu hạn của một dãy số thực.
2. Tích hợp một tình huống diễn đạt và một tình huống hợp thức hoá.
3. Tích hợp công nghệ thông tin trong dạy học (TICE).
4. Phát triển thực hành lập luận, thông qua các chức năng khác nhau của nó để đem lại nghĩa cho quan niệm giới hạn.

2.2 Phân tích từ dưới lên các cấp độ khác nhau của môi trường

Chúng tôi giải thích các mức độ khác nhau của môi trường tương ứng trong Bảng 1.

2.2.1. Tình huống khách quan: tác động khách quan và môi trường vật chất

Môi trường vật chất được cấu thành từ năm hình vuông đầu tiên được dựng bởi học sinh. Giáo viên đã dựng trước trên giấy kẻ mi-li-mét hình vuông đầu tiên và trao đổi với học sinh về tiến trình dựng hình.

2.2.2. Tình huống tham chiếu: Chủ thể hành động và môi trường khách quan

Môi trường khách quan được cấu thành từ n hình vuông đầu tiên (n bất kì), là kết quả của việc dựng các hình vuông. Các hình này hoạt động như một chỉ dẫn cho hình vuông « cuối cùng ».

Các hành động của chủ thể hoạt động nhằm thực hiện mục tiêu :

- phỏng đoán và chứng tỏ sự thẳng hàng của các đỉnh ($B_i, 1 \leq i \leq N$)
- tính hoành độ a_n của điểm A_n với n bất kì.

2.2.3. Tình huống học tập : học sinh học tập và môi trường tham chiếu

Môi trường tham chiếu được cấu thành từ các phỏng đoán về giới hạn của dãy số (a_n). Các học sinh sẽ thực hiện các tính toán và lập luận tương tự như các yếu tố chứng minh. Học sinh sẽ thảo luận về tính hợp thức của các sản phẩm lập luận để trả lời cho vấn đề đặt ra. Chúng ta hướng đến ở đây một tình huống hợp thức hoá.

2.3 Các yếu tố của phân tích tiên nghiệm

2.3.1. Mục đích của buổi học ở đây khá tham vọng

Các phương tiện khác nhau của việc điều tra phải cho phép phỏng đoán rằng: với số lượng bất kì n hình vuông nào được dựng, chiều dài OA_n không thể đạt đến một giá trị số cụ thể nào (4). Cần đưa học sinh vào tình huống chứng tỏ, đặc biệt là nhờ vào các công cụ của hình học giải tích mới học (các vec-tơ và các phương trình đường thẳng), rằng dãy số tăng đến giá trị xác định (4). Mục tiêu là để học sinh cảm nhận được khái niệm giới hạn.

Như vậy, cách đặt vấn đề cho sự tiến triển ở học sinh được phát biểu như sau : “Bằng cách lặp đi lặp lại tiến trình dựng các hình vuông đến n lần đủ lớn, liệu người ta có thể tạo ra được một hình vuông mà hoành độ của đỉnh A_n vượt quá 4?”

2.3.2. Các yếu tố phân hóa: giáo viên cân nhắc việc giúp đỡ, nếu cần thiết, các học sinh gặp khó khăn trong việc giải thích a_n như là một hàm số theo n ; giáo viên đề nghị các học sinh thực hiện theo tiến trình sau đây (nhằm diễn tả (a_n) dưới dạng một dãy hội quy):

Người ta kí hiệu a_n là hoành độ của điểm A_n .

Như vậy, người ta có dãy số $a_1 = 1, a_2 = 1,75, a_3 = \dots\dots\dots, a_4 = \dots\dots\dots, v.v\dots$

2.3.3. Các tiến trình giải toán được mong đợi

1) Tính các hoành độ $a_2\dots a_5$

Bước $n =$	1	2	3	4	5
Cạnh hình vuông thứ n	1	0,75			
Hoành độ a_n	1	1,75			

2) Đưa ra phỏng đoán với sự giúp đỡ của các phần mềm:

Bằng cách dựa trên lo-gic của cách dựng các hình vuông, người ta thiết lập được

$$a_{n+1} = a_n + (3/4)(a_n - a_{n-1})$$

– Đưa ra phỏng đoán với sự giúp đỡ của một bảng tính

Bằng cách nhập công thức tương ứng trong một bảng tính, người ta có thể tính được 100 số hạng đầu tiên của dãy (a_n) với độ chính xác 14 chữ số thập phân, và nhận xét rằng các số hạng a_n tiến dần đến 4, và sẽ đạt đến giá trị này khi làm tròn số từ bước thứ $n = 82$.

– Đưa ra phỏng đoán với sự trợ giúp của một thuật toán

Các học sinh có thể soạn thảo một phần mềm trên Algobox hoặc trên máy tính cầm tay. Bằng cách đó, học sinh nhận ra sự « dồn nén » ở giá trị 4, điều này chỉ có thể giải thích được bằng giới hạn sức mạnh tính toán của các công cụ số.

Như vậy, các công cụ số cho phép phỏng đoán sự tồn tại của một giá trị « giới hạn » của giá trị hoành độ của các điểm A_n được kí hiệu là a_n , có vẻ bằng 4.

2.3.4. Chứng minh sự hội tụ của dãy số

Đối với mọi đỉnh B_n và B_{n+1} của hai hình vuông kề nhau, hoành độ của B_{n+1} bằng với hoành độ của B_n được tăng thêm $\frac{3}{4}$ chiều dài đoạn $A_n B_n$ (ứng với cạnh của hình vuông thứ n), và tung độ của B_{n+1} bằng với tung độ của B_n bị giảm bớt đi $1/4$ chiều dài cũng của đoạn $A_n B_n$.

Với mọi số tự nhiên n , hệ số góc của đường thẳng $(B_n B_{n+1})$ bằng:

$$\frac{-\frac{1}{4}A_n B_n}{\frac{3}{4}A_n B_n} = -\frac{1}{3}.$$

Tất cả đường thẳng đi qua các cặp điểm kề nhau có cùng hệ số góc là $-\frac{1}{3}$, do đó, chúng song song với nhau. Một cách khác để thấy điều này là tất cả các vec-tơ $\overrightarrow{B_n B_{n+1}}$ đều cùng phương với vec-tơ $\vec{u}\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Vì những đường thẳng này luôn có một điểm chung (theo cặp đôi), chúng đều đồng quy. Do đó, các điểm B_n là thẳng hàng. Đường thẳng nối chúng có phương trình:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Do đó, ta có thể chứng minh đường thẳng này cắt trục hoành tại $x = 4$. Mà tất cả các điểm B_n đều có một tung độ dương (phân số từ chiều dài ban đầu), bởi vì các toạ độ của chúng cho biết phương trình đường thẳng, nên hoành độ a_n của nó (dĩ nhiên, cũng là hoành độ của A_n) xác định bởi

$$-\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3} \geq 0,$$

trong đó $a_n \leq 4$.

Kết quả là, dù n lớn như thế nào đi chăng nữa, hoành độ a_n của điểm A_n không thể vượt quá 4.

Mặc dù học sinh lớp 11 ban khoa học có thể hiểu được tính bị chặn, cũng như tính đồng biến, nhưng điều đó không đưa học sinh đến việc suy ra dãy số là hội tụ. Do đó, học sinh cần phải nghiên cứu sự hội tụ của dãy số bằng cách khai thác các ứng dụng công nghệ thông tin (TICE).

2.3.5. Diễn tiến buổi học

Tiết 1

Sau khi trình bày tình huống ban đầu, tình huống sẽ diễn tiến tiếp theo với việc mỗi học sinh tính toán và vẽ năm hình vuông đầu tiên trên giấy kẻ ô ly được cung cấp sẵn. Từ một phỏng đoán ban đầu, được hình thành sau khi học sinh làm việc theo cặp đôi, học sinh cần phải chứng minh các điểm B_1 , B_2 et B_3 thẳng hàng theo cách mà mình chọn (bằng cách sử dụng hệ số góc, hoặc công cụ vec-tơ). Tiết học tiếp tục diễn ra với việc hình thành một phỏng đoán (tổng quát) liên quan đến sự thẳng hàng của các điểm $B_1, B_2, \dots, B_N$ (trong đó N là một số tự nhiên cố định bất kì) và học sinh tiếp tục chứng minh chúng.

Pha cuối cùng của tiết học đầu tiên này hướng đến việc giúp học sinh hình thành các yếu tố trả lời cho vấn đề đã được đặt ra (sự tồn tại của một giá trị « giới hạn » của dãy số (a_n)). Các học sinh có thể dựa trên sự thẳng hàng của các đỉnh B_n để chứng minh dãy số (a_n) tăng. Học sinh cũng có thể xem a_n như là một hàm số (trực tiếp) theo n (dãy tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân với công bội $3/4$), hoặc một hàm số được mô tả theo a_{n-1} và a_{n-2} (công thức hồi quy); học sinh có thể nghiên cứu dãy số này bằng cách sử dụng các công cụ số.

Tiết 2

Đầu tiết 2, các học sinh vẫn làm việc theo cặp đôi để nghiên cứu dãy số bằng các công cụ số: bảng tính và/hoặc phần mềm hỗ trợ thuật toán để xác định tính chất của dãy số. Giá trị giới hạn sẽ xuất hiện, và cũng sẽ là cơ hội để nhấn mạnh các « giới hạn » gắn với việc sử dụng các công cụ số. Thật vậy, sự hội tụ diễn ra nhanh, Excel hoặc Algobox hoặc các máy tính cầm tay làm tròn nhanh chóng kết quả thành 4, từ đó đưa đến điều không phù hợp: người ta thêm một hình vuông mới, đủ nhỏ, và chiều dài vẫn giữ nguyên.

Pha tiếp theo hướng đến việc tranh luận về các yếu tố trả lời cho vấn đề đặt ra. Do đó, học sinh phải quay lại với nét vẽ đầu tiên của các hình vuông, và sự thẳng hàng của các đỉnh B_n , để suy ra sự tồn tại và giá trị của giới hạn. Diễn tiến của tiết học mà giáo viên quan sát được trình bày chi tiết trong phần phụ lục.

2.4 Những lập luận có thể được sản sinh

Những lập luận có thể xuất hiện trong buổi học « Dãy các hình vuông » được trình bày tường minh trong bảng 2 dưới đây. Chúng tôi chỉ ra trong mỗi cấp độ của môi trường:

- Chức năng của các lập luận được mong đợi;
- Các cấp độ sử dụng kí hiệu;

- Các cấp độ sử dụng các tham chiếu;
- Các dạng lập luận (quy nạp, suy diễn, diễn dịch).

Trong bảng 2, SEM diễn tả một suy luận mang bản chất ngữ nghĩa và SYNT diễn tả một suy luận mang bản chất cú pháp.

Bảng 2. Chức năng và trạng thái của các lập luận có thể sinh ra trong buổi dạy

	Môi trường M-2	Môi trường M-1	Môi trường M0
Chức năng của các lập luận	R1.1 SEM - Quyết định tính toán - Các phỏng đoán - Trực giác hình vẽ hoặc tính toán	R1.2 SYNT/SEM - Các tính toán đặc thù - Các phỏng đoán - Các quyết định trên một đối tượng toán học - Các quyết định trên một công cụ số	R1.3 SYNT Chứng minh một cách hình thức Khái quát hoá
Cấp độ sử dụng kí hiệu	R2.1 SEM Biểu tượng hoặc chỉ báo tùy thuộc vào bối cảnh	R2.2 SYNT/SEM Các biện giải mang tích chất ‘địa phương’ hoặc đặc thù hơn : các chỉ báo, tính toán	R2.3 SYNT Các biện giải hình thức đặc thù
Cấp độ sử dụng các tham chiếu	R3.1 SYNT/SEM - Sử dụng tại chỗ các kiến thức cũ - Làm phong phú ở cấp độ σ -rix-tic	R3.2 SYNT/SEM - Làm phong phú ở cấp độ biện giải - Các thông báo - Hệ thống tổ chức	R3.3 SYNT - Diễn đạt các chứng minh - Biểu đạt tường minh được tổ chức - Tích hợp các yếu tố lý thuyết (khái niệm ngưỡng)
Dạng lập luận	R.4.1 Diễn dịch, quy nạp, suy diễn	R.4.2 Diễn dịch, quy nạp	R.4.3 Diễn dịch

Kết luận

Phân tích *tiên nghiệm* tiết dạy, với sự cộng tác của giáo viên trong khuôn khổ một nghiên cứu hợp tác, đã cho phép chúng tôi không chỉ xác thực được các lí do mà chúng tôi đã thiết kế trong tình huống học tập này, mà còn làm rõ các dạng lập luận có thể xuất hiện trong các pha khác nhau của buổi học. Từ đó, phân tích *tiên nghiệm* này giúp ích cho công việc của giáo viên khi cần một xử lý thích đáng cho các lập luận của học sinh trong các tình huống (tình huống hành động, diễn đạt và hợp thức hoá). Mặt khác, phân tích *tiên nghiệm* đã làm rõ sự cần thiết của việc nối khớp các khung khác nhau (số học, đại số và hình học) trong mỗi pha của buổi dạy để cho phép học sinh cảm nhận khái niệm giới hạn của một dãy số. Phân tích này cũng mang lại các chuẩn bị cho giáo viên để quản lý các kết quả số nhận được từ việc tích hợp công nghệ thông tin trong dạy học (TICE) theo cách học sinh có thói quen phản biện các kết quả số nhận được.

Một phân tích *hậu nghiệm* chi tiết buổi dạy, dựa trên việc phân tích các giai đoạn khác nhau, thực hiện với sự hỗ trợ của mô hình phân tích các lập luận, đã làm rõ những dạng lập luận khác nhau mà học sinh thực hiện. Ràng buộc hạn chế về số trang không cho phép chúng tôi giải thích trong khuôn khổ bài viết này, cách thức mà chúng tôi đã phân tích các giai đoạn. Tuy thế, chúng tôi đã làm rõ được những chức năng khác nhau của các lập luận: quyết định tính toán, phỏng đoán, quyết định trên một đối tượng toán học, quyết định trên một công cụ số, phiên dịch, thiết lập một chứng minh mang bản chất ngữ nghĩa, thiết kế một chứng minh mang tính chất cú pháp. Điều đó đã cho phép chúng tôi làm sáng tỏ sự phong phú của buổi dạy từ góc nhìn thực hành lập luận ở lớp 11 ban khoa học.

Mô hình phân tích các lập luận của chúng tôi có thể là một công cụ thích đáng để thiết kế một phân tích các dạng lập luận có thể sinh ra trong mỗi một pha và còn để sản sinh một phân tích *hậu nghiệm* chi tiết về diễn tiến của buổi dạy, bằng cách làm sáng tỏ các kiến thức và tri thức được học sinh huy động. Nghiên cứu này cho phép chúng ta tính đến sự phù hợp và thích đáng của tình huống dạy học cho phép học sinh cảm nhận được khái niệm giới hạn – sẽ được nghiên cứu kỹ hơn ở năm học lớp 12 tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193.
2. Bloch, I. (2006) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7, Paris.
3. Bloch, I., & Gibel, P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
4. Brousseau, G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
5. Brousseau, G., & Gibel, P. (2005) Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
6. Durand-Guerrier, V. (2007) Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In A. Rouchier (Ed), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom.)*. Bordeaux : IUFM d'Aquitaine.
7. Duval, R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
8. Everaert-Desmedt, N. (1990) *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce*. Liège : Pierre Mardaga.

9. Gibel, P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques*. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 2, Bordeaux.
10. Gibel, P. (2008) Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39.
11. Gibel P. (2015) Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire, *Éducation et Didactique*, 9-2, 51-72, Presses Universitaires de Rennes.
12. Legrand, M. (1997) La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), 221-279.
13. Margolinas, C. (1994) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations. In Margolinas C. (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques*, (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
14. Mercier, A. (1995) Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas C (Ed.), *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168), Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
15. Oléron, P. (1977) *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
16. Pierce, C. S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud).

PHỤ LỤC

Buổi dạy được chia thành 2 tiết.

Tiết 1 (học sinh hoạt động theo cặp – nhóm)

Pha 1 : Giới thiệu tình huống – Hướng dẫn dựng 5 hình vuông đầu tiên.

Pha 2 : Dựng trên giấy kẻ ô ly 5 hình vuông đầu tiên.

Pha 3 : Hướng dẫn (các) phỏng đoán về B_1, B_2, B_3 .

Pha 4 : Thảo luận chung về các phỏng đoán – Trao đổi các chứng minh.

Pha 5 : Hướng dẫn (các) phỏng đoán về $B_1, B_2, \dots, B_N$.

Pha 6 : Thảo luận chung về các phỏng đoán – Trao đổi các chứng minh.

Pha 7 : Diễn đạt vấn đề đặt ra.

Pha 8 : Nghiên cứu tích hợp công nghệ thông tin và truyền thông trong dạy học - TICE (Bảng tính, Algobox, máy tính cầm tay,...).

Tiết 2 (học sinh hoạt động theo nhóm – lớp).

Pha 9 : Nghiên cứu tích hợp công nghệ thông tin và truyền thông trong dạy học - TICE (Bảng tính, Algobox, máy tính cầm tay,...).

Pha 10 : Báo cáo kết quả.

Pha 11 : Đặc tính tăng dần của dãy số - Tình huống diễn đạt các biểu thức của (a_n) .

Pha 11 : Tình huống hợp thức.

Pha 12 : Tình huống soạn thảo (cá nhân) một tiến trình giải quyết vấn đề.

Pha 13 : Tình huống thể chế hoá.

ADAPTATION DE JQUIZ POUR L'AUTO-APPRENTISSAGE INTERACTIF DE LA CHIMIE UNE EXPÉRIMENTATION À LA FACULTÉ DE SCIENCES DE L'ÉDUCATION DU LAOS

Xaya Chemcheng*

Résumé

Cet article porte sur une expérimentation concernant l'utilisation d'un média en langue Lao d'auto-apprentissage interactif créé pour la chimie générale, ainsi que son évaluation au sein de la Faculté des Sciences de l'Éducation de l'Université Nationale du Laos. Afin d'enrichir le système d'enseignement universitaire et en particulier pour combler le manque de ressource d'auto-apprentissage, nous avons conçu pour la chimie générale un dispositif d'étude basé sur le logiciel Jquiz, composé d'unités de questions à choix multiples, accompagnés de résumés de cours sous Powerpoint. L'expérimentation a été menée durant sept sessions hebdomadaires d'auto-apprentissage en salle d'ordinateurs, de quatre-vingt-dix minutes chacune, durant les deux derniers mois du premier semestre 2015-16.

Mots-clés: Chimie, Auto-apprentissage interactif, Jquiz.

1. Introduction

Afin de compléter le système le système d'auto-apprentissage à destination des étudiants, en particulier de combler le manque de ressource éducative en langue lao, nous avons créé pour la chimie générale un dispositif d'étude basé sur le logiciel Jquiz, composé d'unités de questions à choix multiples et accompagné de résumés de cours sous Powerpoint. L'environnement est devenu possible avec la « démocratisation » en cours des PC en milieu étudiant, malgré un débit Internet encore insuffisant ; nous avons choisi l'option du travail « hors ligne ». Ceci en vue de parer à une pénurie d'enseignant dû à l'insuffisance des quotas d'embauche des nouveaux enseignants et à la proportion grandissante des enseignants, approchant la retraite.

Les objectifs sont :

(1) de fournir une ressource d'auto-apprentissage interactive en chimie basée sur le logiciel Jquiz, contenant un nombre non négligeable d'exercices avec réponse et commentaires ;

(2) d'expérimenter cette ressource auprès d'étudiants de première année d'université afin de pouvoir l'évaluer et l'améliorer.

2. Questions de recherche

Nos questions de recherche sont les suivantes :

(1) Comment exploiter les matériaux d'apprentissage de la chimie en vue de créer un média d'auto-apprentissage interactif en Lao basé sur Jquiz ?

(2) Quel peut être l'apport de ce média à l'étude de la chimie pour les étudiants ?

(3) Ce média peut-il contribuer à un apprentissage durable ? Est-il adapté aux besoins actuels des étudiants ?

* Université Nationale du Laos

3. Méthodologie

Nous recourons à quatre outils d'étude :

(1) Une observation en salle d'ordinateur des étudiants pratiquant l'auto-apprentissage en utilisant ce média ;

(2) Une évaluation finale des étudiants fournie par l'enseignante, chargée de cours ;

(3) Un test final conçu pour évaluer la durabilité et l'efficacité de l'apprentissage ;

(4) Un questionnaire à destination des étudiants participant à cette étude.

La population étudiée comporte quarante-trois étudiants de première année en chimie générale, divisée au hasard en groupe témoins (23) et en groupe expérimental (20), en respectant l'équité du genre et de l'ethnie. Le groupe témoin n'avait pas en principe accès au média.

3.1. L'observation des étudiants en salle d'ordinateurs s'appuie sur une grille structurée par les paramètres suivants :

- l'ordre de priorité que donnent les étudiants aux activités proposées par le média;
- la motivation des apprenants ;
- le comportement des étudiants en activité d'auto-apprentissage ;
- le repérage des manques ;
- l'efficacité de l'auto-apprentissage dans chaque session.

L'observation s'est déroulée durant sept sessions d'étude en salle d'ordinateurs durant les deux derniers mois du premier semestre 2015 - 2016. Chaque session hebdomadaire a duré quatre-vingt-dix minutes.

Les résultats de chaque session d'observation ont servi à améliorer le contenu du média et à optimiser la conception des sessions ultérieures.

3.2. Le test final vise à évaluer :

- la solidité des acquis de l'auto-apprentissage et la cohérence des réponses, en proposant des questions à choix multiples s'imbriquant suivant le concept et le contenu des cours. Ces questions portent sur des applications, la théorie, les compétences, la réflexion ;
- la persistance de l'auto-apprentissage : ce test a été effectué deux mois après l'examen final, de façon à ce que les adeptes de l'apprentissage par cœur aient suffisamment le temps d'oublier.

3.3. Le questionnaire porte sur l'usage et la perception qu'ont les étudiants de ce média d'auto-apprentissage, à savoir :

- la gestion du temps d'auto-apprentissage de ce média ;

- l’usage des ressources éducatives disponibles sur le média ;
- les obstacles d’apprentissage rencontrés ;
- l’efficacité perçue de ce média ;
- et enfin l’adhésion des étudiants à l’emploi de cet outil d’auto-apprentissage.

4. Résultats et discussions

4.1. L’observation en salle d’ordinateurs

Les étudiants ont donné la priorité aux exercices. Peu s’intéressait aux résumés et aux travaux dirigés.

Au début, presque tous ont réagi négativement à certaines rétroactions du média, mais peu à peu cette attitude s’est modifiée dans un sens positif.

Les manques repérés en compétences ont été considérables, en particulier sur l’interprétation des données autres que littéraires, à savoir tableau, graphique, unités, axes.....

4.2. Ecart entre les résultats issus de l’évaluation finale et ceux issus du test réalisé deux mois après

Nous donnons dans le Tableau 1 les résultats statistiques des étudiants à l’examen final et au test expérimental passé par les mêmes étudiants deux mois après.

Groupes (43)	Examen Final				Test réalisé 2 mois après			
	Mini	Maxi	Moyenne	Ecart- type	Mini	Maxi	Moyenne	Ecart- type
Expérimental (20)	55	86	69	8,736	6	20	10,35	3,587
Témoin (23)	57	88	72	7,354	4	12	7,913	2,254

Tableau 1. Résultats des étudiants à l’évaluation finale et au test

Ci-après quelques commentaires sur les résultats du Tableau 1 et quelques compléments qualitatifs.

Le groupe expérimental a des résultats moins bons que le groupe témoin à l’examen final. Par contre, il obtient un résultat dépassant significativement le groupe témoin au test passé deux mois après.

L’analyse du sujet d’examen (proposé par l’enseignante) montre que celui-ci est un QCM portant sur des faits, des questions indépendantes, nécessitant une mémorisation et susceptible de tricherie, les candidats ayant la possibilité de copier les uns sur les autres. De plus on observe très peu de cohésion entre les divers thèmes sous-jacents aux questions. Les réponses justes dues au hasard sont donc possibles.

Quant aux QCM du test, il est le même pour tous, à la différence près que toutes les questions et toutes les réponses sont permutées, rendant tout copiage entre candidats pratiquement impossible, compte tenu de la durée allouée.

Ce média d’auto-apprentissage est-il efficace pour les apprenants ?

Quelques apprenants attestent d'une bonne compréhension des notions apprises : en effet ils réussissent à fournir des réponses justes concernant des questions liées de manière systématique. Ces apprenants se trouvent exclusivement dans le groupe expérimental. Les « meilleurs éléments » du groupe témoin ne fournissent que peu de réponses justes sur des questions liées : une bonne partie de ces réponses peuvent donc être attribuée au hasard.

En ce qui concerne les apprenants de niveau « faible », ceux du groupe expérimental se montrent « moins faible » que ceux du groupe témoin. Une raison pour que les étudiants « faibles » du groupe expérimental restent « faibles » est sans doute qu'ils n'ont pu bénéficier de la durée d'apprentissage dont ils ont besoin, les sept sessions n'étant pas suffisantes pour eux.

4.3. Résultats du questionnaire sur le média d'auto-apprentissage

4.3.1. Utilité et efficacité du média d'auto-apprentissage

Les résultats obtenus à partir du questionnaire confirment l'utilité et l'efficacité de ce média d'auto-apprentissage comme le montre le Tableau 2 suivant.

No	Contenu du questionnaire	Groupe expérimental	Groupe témoin
1.1	Ce média favorise l'auto-apprentissage	73,7%	45,8%
1.2	Epargne le temps de recherche des ressources et de la pratique des exercices	94,7%	45,85%
1.3	Réponses immédiatement disponibles	94,7%	54,2%
1.4	Exercices variées disponibles	57%	41,7%
1.5	Exercices résolus disponibles en travaux dirigés	34,9%	50%
1.6	Favorable au développement des diverses compétences	52,6%	37,5%
1.7	Possibilité d'obtention de réponses sans réflexion ni raisonnement	34,9%	50%

Tableau 2. Résultats des étudiants au questionnaire sur le média

Les étudiants du groupe expérimental n'ont pratiqué l'auto-apprentissage sur ce média que durant sept sessions, ce qui est relativement limité : les réponses au questionnaire montrent qu'ils ne sont pas encore familiarisés avec toutes les ressources contenus dans ce média. Ils se sont principalement focalisés sur le quiz et la plupart ont négligé les résumés de cours et les travaux dirigés.

Ce média épargne aux apprenants le temps passé à rechercher des livres, des exercices, d'où une aide précieuse sur l'optimisation de la pratique des exercices : 94,7% de réponses favorables contre 34,9% des étudiants qui pensent que ce média ne favorise pas le raisonnement.

A la question sur l'utilité de ce média 89,5% du groupe expérimental affirment l'utilité contre 50% du groupe témoin.

L'explication des réponses positives de la moitié des étudiants du groupe témoin pourrait être la suivante. Le média étant téléchargé sur les ordinateurs de la salle informatique de l'université, seul le groupe expérimental y avait accès durant

l'expérimentation : il ne pouvait ni le sauvegarder sur des clés USB ni les transmettre via internet, le travail se faisant hors ligne. *Toutefois, certains étudiants avaient photographié les écrans d'ordinateur avec leur portable.* Des étudiants du groupe témoin ont donc pu lire ou travailler en groupe sur certaines pages du média via les portables des étudiants du groupe expérimental. Cette possibilité est probable étant donné que parmi les réponses au questionnaire concernant l'utilité de ce média, certains étudiants ont suggéré un travail en groupe de 2 à 3 étudiants par poste d'ordinateur pour tenir compte du manque d'ordinateur. Ils ont même ajouté que ce serait souhaitable pour permettre un débat entre eux.

4.3.1. Gestion du temps par les étudiants pour l'apprentissage de la chimie

Le Tableau 3 porte sur la gestion du temps par les étudiants pour l'apprentissage de la chimie.

No	Durée en nombre d'heures	Groupe expérimental	Groupe Témoin
3.1	Pas plus d'une heure par semaine	5,3%	29,2%
3.2	2 à 3 heures par semaine	84,2%	45,8%
3.3	Plus de 4 heures par semaine	10,5%	20,8%
3.4	Plus de 4 heures uniquement en période d'examen	5,3%	20,8%

Tableau 3. Temps consacré par les étudiants à l'apprentissage de la chimie

La majorité des étudiants des deux groupes utilisent de deux à trois heures hebdomadaires.

Le groupe témoin investissant plus de 4 heures par semaine atteint 20,8% contre 10,5% pour le groupe expérimental. Le groupe témoin utilisant moins d'une heure par semaine atteint 29,2% contre seulement 5,3% pour le groupe expérimental. Nous pouvons en déduire que ce média favorise concrètement l'auto-apprentissage des étudiants.

4.3.3. Difficultés rencontrées par les étudiants pour l'étude de la chimie

A la question concernant certaines difficultés rencontrées par les étudiants pour l'étude de la chimie, nous présentons les résultats dans le Tableau 4.

No	Contenu	Groupe Expérimental	Groupe Témoin
4.1	Achat d'ouvrages en librairie	26,3%	62,5%
4.2	Emprunt à la promotion précédente	5,3%	8,3%
4.3	Emprunt à la bibliothèque centrale	57,9%	54,2%
4.4	Utilisation de manuels Thaï avec le problème de vocabulaire sous-jacent	73,7%	37,5%
4.5	Concepts chimiques difficiles à comprendre	94,7%	66,7%
4.6	Manque de personne- ressource ou de tuteur	34,9%	41,7%
4.7	Durée d'assimilation limitée	26,3%	16,6%

Tableau 4. Difficultés rencontrées par les étudiants pour l'étude de la chimie

L'un des problèmes au Laos pour mener à bien des études universitaires est la disponibilité et le coût de ressources, en particulier d'ouvrages de référence. Le média d'auto-apprentissage peut être une réponse à ces difficultés en épargnant partiellement l'achat de livres.

Les étudiants ayant rencontré des situations diverses et variées grâce au média sont devenus plus motivés à chercher à surmonter les problèmes rencontrés : une grande partie (73,7%) des étudiants du groupe expérimental recourent à l'utilisation de manuels Thaï. Ceci est un avantage essentiel de ce média vis à vis de l'auto-apprentissage, ce qui contribue à l'amélioration de la qualité de l'éducation.

4.3.4. Appréciation des étudiants du média d'auto-apprentissage

Concernant la prise de position des étudiants vis-à-vis de ce média (5), à la qualité de leur apprentissage (6) et à leur engagement à participer ultérieurement à ce genre d'expérience (7), les résultats sont donnés dans le Tableau 5 suivant.

No	Contenu	G. Expérimental	G Témoin
5.1	Ce média répond exactement aux besoins actuels des étudiants, contribue à améliorer la qualité de l'apprentissage	94,7%	87,5%
5.2	Ce média ne peut pas être utile aux étudiants ne disposant pas d'ordinateur	5,3%	8,3%
5.3	Il faut développer ce genre de média	100%	87,5%
6.1	Après 2 mois de cours, presque toutes les leçons sont oubliées	5,3%	8,3%
6.2	Après 2 mois de cours, la plupart des leçons sont oubliées	26,3%	37,5%
6.3	Après 2 mois de cours, une petite partie des leçons sont oubliées	57,9%	50,0%
7.1	Prêt à participer à l'expérience	94,7%	91,7%
7.2	Ne pas vouloir participer à l'expérience	0%	0%

Tableau 5. Appréciation des étudiants du média d'auto-apprentissage

Les étudiants confirment que ce média d'apprentissage correspond exactement à leur attente et souhaitent que ce genre de média soit étendu à d'autres disciplines. Il contribue réellement à améliorer la qualité de l'apprentissage. Concernant la qualité de l'apprentissage pour les étudiants, en confrontant les appréciations avec les résultats du test expérimental, on voit que les étudiants des deux groupes surestiment leur acquisition: la réalité est qu'après deux mois, les parties oubliées sont beaucoup plus importantes qu'ils ne l'ont ressenti, à l'exception des « meilleurs éléments ».

Au sujet de leur engagement à participer ultérieurement à ce genre d'expérience, la quasi totalité des participants à cette présente étude se dit intéressée ; les quelques autres ne nient pas pour autant leur participation, ils sont seulement indisponibles pour cause d'emploi complémentaire.

Si l'on revient à nos questions de recherches, il nous semble avoir répondu à notre première question « Comment exploiter les matériaux d'apprentissage de la chimie en vue de créer un média d'auto-apprentissage interactif en Lao basé sur Jquiz ? » par

l'étude du tutoriel Jquiz, par l'expérimentation de divers adaptations des matériaux d'apprentissage de la chimie dans l'environnement de Jquiz à l'aide des résultats de l'observation des étudiants en salle d'ordinateurs. Le résultat final est compilé dans un CDrom que nous utilisons comme média d'auto-apprentissage interactif.

Pour notre deuxième question « Quel est l'apport de ce média à l'étude de la chimie pour les étudiants ? », le média créé semble en effet utile aux étudiants du fait qu'il contribue à combler le vide en ressources éducatives en langue Lao, qu'il propose des situations d'apprentissage à la fois diverses et variées, qu'il est muni de solutions immédiatement disponibles mais aussi d'une fonction rétroactive invitant l'apprenant à la réflexion en tenant compte du paramètre qu'il a jusqu'alors négligé. Il permet aussi de résoudre la contrainte du temps limité de l'étude pour les étudiants.

Pour notre troisième question « Ce média peut-il contribuer à un apprentissage durable ? Est-il adapté aux besoins actuels des étudiants ? » les résultats du test final entrepris deux mois après l'examen final, confrontés avec ceux de l'examen final plaident en faveur d'une contribution à un apprentissage durable de ce média d'auto-apprentissage. Les résultats obtenus à partir du questionnaire confirment que ce média semble adapté aux besoins actuels des étudiants.

L'expérimentation de ce média ayant été réalisée avec un nombre assez limité d'étudiants et ne comportant que sept sessions d'observation, il est souhaitable que cette expérience soit reproduite avec une population plus importante et avec une durée plus étendue, mais aussi en développant davantage son contenu.

Conclusion et recommandations

Nous pouvons affirmer que la réalisation de ce média d'auto-apprentissage pour la chimie répond à notre première question de recherche. Ce média facilite le travail des apprenants en leur épargnant le temps passé à chercher des ressources éducatives, en leur proposant des situations d'apprentissage diverses et variées.

Il répond également aux besoins actuels des étudiants en ressources éducatives alternatives. Il s'inscrit dans le contexte de développement futur des ressources éducatives : lorsque la situation du pays le permettra en fournissant un accès à Internet avec un débit suffisant, nous pourrions envisager de convertir ce média en des cours en ligne avec pour perspective à la fois :

- de pouvoir résoudre le manque de ressources éducatives en langue Lao
- et la pénurie des enseignants.

Nos recommandations seraient d'élargir l'usage de ce genre de média à d'autres disciplines mais aussi d'étudier la possibilité d'étendre l'application de ce média à des Smartphones dont la popularité au sein des étudiants et des adolescents dépasse actuellement celle des PC.

REFERENCES

1. Aylward G. & Findlay T. (2008) *SI Chemical Data*. 6th edition, Wiley.
2. Buthelezi R.T., Dingrando L., Hainen N., Wistrom C., Zike D. (2012). *Chemistry Matter and Change*. Mc Graw Hill.

3. Garnett J.P. (2003) *Foundations of Chemistry*. Longman.
4. Moore J.W., Stanitski C. L., Jurs P.C. (2010) *Principles of Chemistry. The Molecular Science*. Brooks/Cole Cengage Learning.
5. Rabardel P., Verillon P. (1995) *Les hommes et les technologies, Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.

Autre documentation

6. Chanthavong B. *Final subject examination paper for General Chemistry*
7. Jquiz Tutorial, Hot Potatoes™ Half-baked Software Inc. version 6.

THÍCH ỨNG JQUIZ TRONG TỰ HỌC TƯƠNG TÁC Ở MÔN HOÁ HỌC: THỰC NGHIỆM TẠI KHOA KHOA HỌC GIÁO DỤC, ĐẠI HỌC QUỐC GIA LÀO

Xaya Chemcheng *

Résumé

Cet article porte sur une expérimentation concernant l'utilisation d'un média en langue Lao d'auto-apprentissage interactif créé pour la chimie générale, ainsi que son évaluation au sein de la Faculté des Sciences de l'Éducation de l'Université Nationale du Laos. Afin d'enrichir le système d'enseignement universitaire et en particulier pour combler le manque de ressource d'auto-apprentissage, nous avons conçu pour la chimie générale un dispositif d'étude basé sur le logiciel Jquiz, composé d'unités de questions à choix multiples, accompagnés de résumés de cours sous Powerpoint. L'expérimentation a été menée durant sept sessions hebdomadaires d'auto-apprentissage en salle d'ordinateurs, de quatre-vingt-dix minutes chacune, durant les deux derniers mois du premier semestre 2015-16.

Mots-clés: Chimie, Auto-apprentissage interactif, Jquiz.

Tóm tắt

Bài báo này trình bày một thực nghiệm liên quan đến việc sử dụng một phương tiện tự học tương tác bằng tiếng Lào đối với môn Hoá đại cương, cũng như những đánh giá về phương tiện này ở Khoa khoa học giáo dục, Trường Đại học Quốc gia Lào. Để làm phong phú hơn hệ thống dạy học đại học và đặc biệt để giải quyết việc thiếu nguồn tài nguyên tự học, chúng tôi đã xây dựng một phương tiện nghiên cứu Hoá đại cương dựa trên phần mềm Jquiz, bao gồm những đơn vị câu hỏi nhiều lựa chọn kèm theo tóm tắt bài học bằng Powerpoint. Thực nghiệm đã được thực hiện trong suốt 7 buổi tự học ở phòng máy tính, với thời gian một buổi là 90 phút mỗi tuần, kéo dài trong 2 tháng cuối của học kỳ 1 năm học 2015 – 2016.

Từ khóa: Hóa học, Tự học tương tác, Jquiz.

1. Đặt vấn đề

Để hoàn chỉnh hệ thống tự học cho sinh viên, đặc biệt giải quyết việc thiếu nguồn tài nguyên giáo dục bằng tiếng Lào, chúng tôi đã xây dựng một phương tiện nghiên cứu Hoá đại cương dựa trên phần mềm Jquiz, bao gồm những đơn vị câu hỏi nhiều lựa chọn kèm theo tóm tắt bài học bằng Powerpoint. Môi trường trở nên khả thi với « sự dân chủ hoá » trong việc học bằng máy tính ở sinh viên, mặc dù lưu lượng internet còn chưa đủ; chúng tôi đã chọn làm việc « không có kết nối mạng ». Điều này giúp giải quyết việc thiếu giáo viên do không đủ hạn ngạch tuyển dụng giáo viên mới và tỉ lệ ngày càng tăng các giáo viên sắp nghỉ hưu.

Các mục tiêu là:

(1) cung cấp nguồn tài nguyên học tập tương tác môn Hóa học dựa trên phần mềm Jquiz, chứa một số lượng đáng kể các bài tập với câu trả lời và bình luận;

(2) triển khai nguồn tài nguyên này với sinh viên năm nhất bậc đại học để có thể đánh giá và phát triển nó.

* Đại học quốc gia Lào.

2. Câu hỏi nghiên cứu

Câu hỏi nghiên cứu của chúng tôi là:

1. Làm thế nào khai thác các phương tiện học tập Hoá học để tạo ra một phương tiện tự học tương tác ở Lào dựa trên Jquiz?
2. Phương tiện được tạo ra mang lại lợi ích gì cho việc học Hoá học của sinh viên?
3. Phương tiện này có thể góp phần vào việc học tập bền vững không? Nó có phù hợp với nhu cầu hiện tại của sinh viên hay không?

3. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng bốn công cụ nghiên cứu sau:

1. Quan sát phòng máy tính mà sinh viên thực hành việc tự học bằng phương tiện này;
2. Đánh giá kết quả cuối kì của sinh viên do người phụ trách lớp học cung cấp;
3. Một bài kiểm tra cuối kì được thiết kế để đánh giá tính bền vững và hiệu quả của việc học;
4. Một bộ câu hỏi dành cho sinh viên tham gia nghiên cứu này.

Mẫu nghiên cứu gồm 43 sinh viên năm nhất ngành Hóa đại cương, được chia ngẫu nhiên thành nhóm đối chứng (23) và nhóm thực nghiệm (20), chỉ tính đến sự cân bằng về giới tính và dân tộc. Về nguyên tắc, nhóm đối chứng không truy cập vào phương tiện tự học.

3.1. Việc quan sát sinh viên ở phòng máy tính dựa trên một lưới được cấu trúc bởi các tham số sau:

- thứ tự ưu tiên mà sinh viên dành cho các hoạt động được đề nghị bởi phương tiện;
- động cơ của người học;
- hành vi của sinh viên trong hoạt động tự học;
- xác định những lỗ hổng kiến thức, kỹ năng của sinh viên ;
- hiệu quả của việc tự học trong mỗi buổi.

Việc quan sát này diễn ra trong suốt 7 buổi học ở phòng máy tính trong 2 tháng cuối của học kì I năm học 2015 – 2016. Mỗi tuần một buổi với thời gian là 90 phút.

Kết quả của mỗi buổi quan sát phục vụ cho việc cải tiến nội dung của phương tiện và tối ưu hoá việc xây dựng các buổi học sau đó.

3.2. Bài kiểm tra cuối kì nhằm đến đánh giá:

- sự bền vững trong việc lĩnh hội kiến thức tự học và sự gắn kết của các câu trả lời, bằng việc đề nghị các câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn được xếp theo các khái niệm và nội dung của khoá học. Các câu hỏi này đề cập đến ứng dụng, lý thuyết, kỹ năng, ý nghĩa.

– sự kiên trì của việc tự học: bài kiểm tra được thực hiện hai tháng sau bài thi cuối kì, do đó, những người học thuộc lòng có đủ thời gian để quên kiến thức.

3.3. Bộ câu hỏi đề cập đến việc sử dụng và đánh giá của sinh viên về phương tiện tự học, nhằm làm rõ:

- việc quản lý thời gian tự học với phương tiện;
- việc sử dụng các nguồn tài nguyên giáo dục có sẵn trên phương tiện;
- những chướng ngại về học tập mà họ gặp phải;
- hiệu quả của phương tiện;
- và cuối cùng sự tán thành của sinh viên trong việc sử dụng công cụ tự học này.

4. Kết quả và thảo luận

4.1. Quan sát trong phòng máy

Sinh viên ưu tiên cho các bài tập. Rất ít sinh viên quan tâm đến phần tóm tắt và những hoạt động có hướng dẫn.

Ban đầu, hầu hết tất cả sinh viên phản ứng chưa tốt với một số phản hồi của phương tiện, nhưng thái độ của họ đã được điều chỉnh dần dần theo hướng tích cực.

Những lỗ hổng về kỹ năng xác định được là rất đáng kể, đặc biệt là việc giải thích các dữ kiện không được diễn tả bằng lời, để hiểu các bảng, đồ thị, đơn vị, trục,...

4.2. Sự khác nhau giữa kết quả đánh giá cuối kì và kết quả từ bài kiểm tra thực hiện 2 tháng sau đó

Chúng tôi trình bày trong Bảng 1 kết quả thống kê sinh viên tham gia bài thi cuối kì và bài kiểm tra thực nghiệm thực hiện với cùng đối tượng sinh viên hai tháng sau đó.

Nhóm (43)	Bài thi cuối kì				Bài kiểm tra thực hiện 2 tháng sau đó			
	Nhỏ nhất	Lớn nhất	Trung bình	Độ lệch chuẩn	Nhỏ nhất	Lớn nhất	Trung bình	Độ lệch chuẩn
Thực nghiệm (20)	55	86	69	8,736	6	20	10,35	3,587
Đối chứng (23)	57	88	72	7,354	4	12	7,913	2,254

Bảng 1. Kết quả sinh viên tham gia bài thi cuối kì và bài kiểm tra

Sau đây là một số bình luận về kết quả ở Bảng 1 và một số nhận xét định tính bổ sung.

Nhóm thực nghiệm có kết quả không tốt bằng nhóm đối chứng trong bài thi cuối kì. Tuy vậy, ở bài kiểm tra 2 tháng sau đó, họ nhận được kết quả vượt trội đáng kể so với nhóm đối chứng.

Phân tích chủ đề của kì thi (được đề nghị bởi giáo viên) chứng tỏ đó là một bộ câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn liên quan đến những vấn đề, những câu hỏi độc lập với nhau, cần thiết phải ghi nhớ và có khả năng gian lận, sinh viên có thể chép bài lẫn

nhau. Hơn nữa, có rất ít sự liên hệ giữa các chủ đề khác nhau xuất hiện trong các câu hỏi. Do đó, câu trả lời đúng đến từ việc chọn lựa ngẫu nhiên là có thể xảy ra.

Đối với câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn trong bài kiểm tra, do sự khác biệt mà tất cả các câu hỏi và tất cả các câu trả lời được đổi chỗ, làm cho mọi sự sao chép giữa các sinh viên hầu như không thể trong thời gian được phân bổ.

Phương tiện tự học này có hiệu quả đối với người học?

Một số sinh viên xác nhận việc hiểu sâu sắc các khái niệm mà họ lĩnh hội được: thật vậy, họ thành công trong việc đưa ra câu trả lời đúng liên quan đến những câu hỏi được gắn kết một cách hệ thống. Những sinh viên này chỉ tìm thấy duy nhất trong nhóm thực nghiệm. Những « thành phần tốt nhất » của nhóm đối chứng chỉ đưa ra ít câu trả lời đúng cho những câu hỏi được đề nghị: phần lớn câu trả lời có thể được đưa ra một cách ngẫu nhiên.

Liên quan đến sinh viên ở mức độ « yếu », sinh viên của nhóm thực nghiệm tỏ ra « ít yếu hơn » sinh viên của nhóm đối chứng. Một lý do mà sinh viên « yếu » ở nhóm thực nghiệm vẫn « yếu » chắc chắn là do họ không có đủ thời gian tự học mà họ cần, đối với họ 7 buổi là không đủ.

4.3. Kết quả bộ câu hỏi điều tra về phương tiện tự học

4.3.1. Sự hữu ích và hiệu quả của phương tiện tự học

Kết quả nhận được từ bộ câu hỏi chứng minh tính hữu ích và hiệu quả của phương tiện tự học này. Kết quả đó thể hiện cụ thể trong Bảng 2 sau đây:

STT	Nội dung bộ câu hỏi	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
1.1	Phương tiện này tạo thuận lợi cho việc tự học	73,7%	45,8%
1.2	Tiết kiệm thời gian nghiên cứu các nguồn tài nguyên và thực hành bài tập	94,7%	45,85%
1.3	Đáp án có sẵn ngay tức thì	94,7%	54,2%
1.4	Bài tập có sẵn phong phú	57%	41,7%
1.5	Bài tập có lời giải có sẵn trong mục tự học có hướng dẫn	34,9%	50%
1.6	Tạo thuận lợi cho việc phát triển các năng lực khác nhau	52,6%	37,5%
1.7	Khả năng nhận được câu trả lời mà không suy nghĩ hay lập luận	34,9%	50%

Bảng 2. Kết quả bộ câu hỏi điều tra về phương tiện tự học

Sinh viên của nhóm thực nghiệm chỉ thực hành tự học với phương tiện tự học này trong 7 buổi, điều này tương đối hạn chế: các câu trả lời cho bộ câu hỏi cho thấy sinh viên chưa quen với tất cả tài nguyên chứa trong phương tiện này. Họ tập trung chủ yếu vào câu hỏi, phần lớn họ bỏ qua phần tóm tắt bài học và hoạt động có hướng dẫn.

Phương tiện này tiết kiệm thời gian cho người học trong việc tìm kiếm tài liệu, bài tập - một sự trợ giúp quý báu để tối ưu hoá việc thực hành với các bài tập: 94,7% đưa ra phản hồi tích cực ngược lại 34,9% sinh viên nghĩ rằng phương tiện này không tạo thuận lợi cho việc lập luận.

Với câu hỏi về tính hữu ích của phương tiện này, 89,5% sinh viên nhóm thực nghiệm xác nhận sự hữu ích trong khi 50% ở nhóm đối chứng.

Giải thích về các phản hồi tích cực của một nửa sinh viên nhóm đối chứng có thể như sau. Phương tiện được tải về máy tính trong phòng máy của trường đại học, chỉ có nhóm thực nghiệm có thể truy cập trong suốt các buổi thực nghiệm: họ không được lưu trên USB cũng như không được chuyển qua internet vì không có kết nối. Tuy nhiên, một số sinh viên đã chụp hình màn hình máy tính với điện thoại di động của họ. Vì vậy, các sinh viên của nhóm đối chứng có thể đọc hoặc làm việc theo nhóm trên một số trang của phương tiện qua điện thoại di động của sinh viên nhóm thực nghiệm. Khả năng này là có thể vì trong khi trả lời cho bộ câu hỏi liên quan đến phương tiện, một số sinh viên đề nghị làm việc theo nhóm 2 đến 3 người trên một máy tính để giải quyết việc thiếu máy tính. Họ thậm chí còn bổ sung rằng họ mong muốn cho phép được tranh luận trong nhóm.

4.3.1. Việc quản lý thời gian của sinh viên đối với việc học Hoá học

Bảng 3 mô tả việc quản lý thời gian của sinh viên đối với việc học Hoá học.

STT	Thời gian tính bằng số giờ	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
3.1	Không quá một giờ mỗi tuần	5,3%	29,2%
3.2	2 đến 3 giờ mỗi tuần	84,2%	45,8%
3.3	Nhiều hơn 4 giờ mỗi tuần	10,5%	20,8%
3.4	Nhiều hơn 4 giờ chỉ trong khoảng thời gian thi	5,3%	20,8%

Bảng 3. Thời gian sinh viên dành cho việc học Hoá học

Đa số sinh viên của cả hai nhóm sử dụng 2 đến 3 giờ mỗi tuần.

Nhóm đối chứng đầu tư nhiều hơn 4 giờ mỗi tuần đạt 20,8% trong khi 10,5% nhóm thực nghiệm. Nhóm đối chứng sử dụng ít hơn 1 giờ mỗi tuần đạt 29,2% trong khi chỉ có 5,3% đối với nhóm thực nghiệm. Từ đó, chúng tôi có thể suy ra rằng, phương tiện này thúc đẩy một cách hiệu quả việc tự học của sinh viên.

4.3.3. Khó khăn của sinh viên trong việc học Hoá học

Với câu hỏi liên quan đến một số khó khăn mà sinh viên gặp phải khi học Hoá học, chúng tôi trình bày kết quả trong Bảng 4.

STT	Nội dung	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
4.1	Mua sách trong nhà sách	26,3%	62,5%
4.2	Mượn của các khoá trước	5,3%	8,3%
4.3	Mượn ở thư viện trung tâm	57,9%	54,2%
4.4	Sử dụng sách giáo khoa Thái Lan với những vấn đề cơ bản về từ vựng	73,7%	37,5%
4.5	Những khái niệm Hoá học khó hiểu	94,7%	66,7%
4.6	Thiếu tài liệu hay người hướng dẫn	34,9%	41,7%
4.7	Thời gian học có hạn	26,3%	16,6%

Bảng 4. Khó khăn sinh viên gặp phải trong việc học Hoá học

Một trong những vấn đề tại Lào để thực hiện tốt việc học đại học là sự sẵn có và chi phí các nguồn tài nguyên, đặc biệt là các tài liệu tham khảo. Phương tiện tự học có thể giải quyết khó khăn này, đó là tiết kiệm một phần việc mua sách.

Sinh viên mà đã gặp những tình huống phong phú và đa dạng nhờ vào phương tiện thì trở nên có động lực hơn để tìm cách vượt qua những vấn đề mà họ gặp phải: một phần lớn (73,7%) sinh viên nhóm thực nghiệm dùng đến sách giáo khoa Thái Lan. Đây là một lợi thế quan trọng của phương tiện này liên quan đến việc tự học, nó góp phần cải tiến chất lượng giáo dục.

4.3.4. Đánh giá của sinh viên về phương tiện tự học

Liên quan đến ý kiến của sinh viên đối với phương tiện này (5), đối với chất lượng việc học của họ (6) và sự cam kết sau này tham gia vào những thực nghiệm kiểu này (7), kết quả được trình bày trong Bảng 5 sau đây.

STT	Nội dung	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
5.1	Phương tiện này đáp ứng chính xác những mong đợi hiện tại của sinh viên, góp phần cải tiến chất lượng học tập	94,7%	87,5%
5.2	Phương tiện này không thể được sử dụng với những sinh viên không có máy tính	5,3%	8,3%
5.3	Cần phải phát triển những phương tiện kiểu này	100%	87,5%
6.1	Sau 2 tháng của các lớp học, hầu hết tất cả các bài học bị quên lãng	5,3%	8,3%
6.2	Sau 2 tháng của các lớp học, phần lớn các bài học bị quên lãng	26,3%	37,5%
6.3	Sau 2 tháng của các lớp học, một phần nhỏ các bài học bị quên lãng	57,9%	50,0%
7.1	Sẵn sàng tham gia thực nghiệm	94,7%	91,7%
7.2	Không muốn tham gia thực nghiệm	0%	0%

Bảng 5. Đánh giá của sinh viên về phương tiện tự học

Sinh viên xác nhận rằng phương tiện học tập này đáp ứng chính xác những mong đợi của họ và mong muốn rằng loại phương tiện này nên được mở rộng cho những môn học khác. Nó đóng góp thực sự vào việc cải tiến chất lượng học tập. Liên quan đến chất lượng học tập đối với sinh viên, bằng cách đối chiếu với kết quả bài kiểm tra thực nghiệm, chúng tôi thấy rằng sinh viên của hai nhóm đánh giá cao việc lĩnh hội của họ: thực tế là sau 2 tháng, những phần kiến thức quên đi thì quan trọng hơn rất nhiều so với những gì họ cảm thấy, trừ « những thành phần tốt nhất ».

Với chủ đề khuyến khích họ sau này tham gia vào loại thực nghiệm này, gần như tất cả sinh viên tham gia nghiên cứu này đều nói quan tâm; vài người khác không phủ nhận sự tham gia của họ, họ chỉ không sẵn sàng vì lý do công việc làm thêm.

Nếu chúng ta trở lại các câu hỏi nghiên cứu, dường như đã có câu trả lời cho câu hỏi đầu tiên « Khai thác các phương tiện học tập hoá học như thế nào để tạo ra một phương tiện tự học tương tác ở Lào dựa trên Jquiz? » bằng việc nghiên cứu Jquiz có hướng dẫn, bằng việc thực nghiệm những đáp ứng khác nhau của các phương tiện học tập hoá học trong môi trường Jquiz nhờ vào kết quả qua sát sinh viên trong phòng máy

tính. Kết quả cuối cùng được chép trong một đĩa CD mà chúng tôi sẽ sử dụng như một phương tiện tự học tương tác.

Đối với câu hỏi thứ hai « Những lợi ích nào mà phương tiện này có thể mang lại cho việc tự học hoá học của sinh viên? », phương tiện tạo ra đường như hữu ích với sinh viên vì nó góp phần giải quyết việc thiếu nguồn tài nguyên giáo dục bằng tiếng Lào, nó đề xuất những tình huống học tập phong phú, đa dạng, nó đưa ra lời giải tức thì nhưng cũng có chức năng phản hồi để người học suy nghĩ đến những tham số mà họ chưa chú ý tới. Nó cũng cho phép giải quyết vấn đề ràng buộc thời gian hạn chế trong việc học của sinh viên.

Đối với câu hỏi thứ ba « Phương tiện này có góp phần vào việc học tập bền vững? Nó có phù hợp với nhu cầu hiện tại của sinh viên không? », câu trả lời của bài kiểm tra thực hiện 2 tháng sau bài thi cuối kì, được đối chiếu với kết quả bài thi cuối kì minh chứng sự đóng góp cho việc học tập bền vững của phương tiện tự học này. Kết quả nhận được từ bộ câu hỏi xác nhận rằng phương tiện này có vẻ phù hợp với nhu cầu hiện tại của sinh viên.

Việc triển khai phương tiện này đã được thực hiện với một số lượng sinh viên khá hạn chế và chỉ gồm 7 buổi quan sát, mong rằng thực nghiệm này được thực hiện lại với một mẫu lớn hơn và với thời gian nhiều hơn, nhưng cũng cần tiếp tục phát triển nội dung của nó.

Kết luận và kiến nghị

Chúng tôi có thể khẳng định rằng việc triển khai phương tiện tự học này trả lời được câu hỏi nghiên cứu đầu tiên của chúng tôi. Phương tiện tự học này thúc đẩy hoạt động của người học bằng việc tiết kiệm thời gian tìm tài nguyên giáo dục, đề xuất cho họ những tình huống học tập phong phú và đa dạng.

Nó cũng đáp ứng nhu cầu hiện tại của sinh viên về tài nguyên giáo dục thay thế. Nó phù hợp với bối cảnh phát triển tương lai của tài nguyên giáo dục: khi tình hình trong nước cho phép truy cập internet với dung lượng đủ, chúng ta có thể xem xét chuyển đổi phương tiện này sang các khoá học trực tuyến với triển vọng đồng thời:

- có thể giải quyết việc thiếu nguồn tài nguyên giáo dục bằng tiếng Lào,
- và việc thiếu giáo viên.

Chúng tôi đề nghị mở rộng việc sử dụng những phương tiện kiểu này đối với các môn học khác cũng như nghiên cứu khả năng mở rộng việc áp dụng phương tiện này với điện thoại thông minh hiện phổ biến trong sinh viên và thanh thiếu niên hiện nay hơn so với máy tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Aylward G. & Findlay T. (2008) *SI Chemical Data*. 6th edition, Wiley.
2. Buthelezi R.T., Dingrando L., Hainen N., Wistrom C., Zike D. (2012). *Chemistry Matter and Change*. Mc Graw Hill.
3. Garnett J.P. (2003) *Foundations of Chemistry*. Longman.

4. Moore J.W., Stanitski C. L., Jurs P.C. (2010) *Principles of Chemistry. The Molecular Science*. Brooks/Cole Cengage Learning.
5. Rabardel P., Verillon P. (1995) *Les hommes et les technologies, Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.

Tài liệu khác

6. Chanthavong B. *Final subject examination paper for General Chemistry*
7. Jquiz Tutorial, Hot Potatoes™ Half-baked Software Inc. version 6.

MỘT SỐ NHÂN TỐ ẢNH HƯỞNG TỚI SỰ LỰA CHỌN SỰ PHẠM CỦA GIÁO VIÊN TRONG THỰC HÀNH DẠY HỌC KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

*Bùi Thị Thanh Mai**

Tóm tắt

Thực hành dạy học của giáo viên là một trong những yếu tố quan trọng quyết định chất lượng và hiệu quả của hoạt động dạy – học, do đó việc xác định các nhân tố ảnh hưởng tới sự lựa chọn sự phạm của họ là cần thiết. Tham luận trình bày một phương pháp luận nghiên cứu cho phép làm sáng tỏ các nhân tố này cũng như thời điểm và mức độ ảnh hưởng của mỗi nhân tố. Sau đó, chúng tôi phân tích các kết quả thu được khi áp dụng phương pháp luận trên vào một trường hợp cụ thể: thực hành dạy học khái niệm đạo hàm của giáo viên trong thể chế dạy học toán 11 ở Việt Nam.

Từ khóa: lựa chọn sự phạm, thực hành dạy học, đạo hàm.

Abstract

The professional practice of teachers plays an important role in determining the quality and effectiveness of the teaching and learning process. Thus, the identification of the factors affecting teachers' didactic decisions is essential. This article presents a research methodology that sheds light on these factors as well as the moments and weight of each factor. Then, we analyze the findings obtained from applying this methodology on a specific case: the practice of teaching the concept of derivative in Vietnam.

Key words: didactic decision, practice of teaching, derivative.

1. Mở đầu

Theo I. Lima, hoạt động dạy học của giáo viên (GV) có thể xem như một chuỗi các lựa chọn sự phạm, trong đó những lựa chọn dù ở mức độ vĩ mô hay vi mô đều là những yếu tố hết sức quan trọng [3, tr. 115]. Vì vậy, việc trả lời cho câu hỏi “*Cái gì quyết định sự lựa chọn sự phạm của GV trong thực hành dạy học của anh ta?*” là một yếu tố then chốt để hiểu được hoạt động của họ. Tuy nhiên, vấn đề xác định các nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn sự phạm của GV vẫn còn khá mới mẻ ở Việt Nam.

Hiện tại, ekip MeTAH – LIG¹ (Đại học Grenoble Alpes, Pháp) và các cộng sự thuộc khoa Toán – Tin học trường Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh đang bước đầu triển khai dự án hợp tác “*Mô hình hóa các lựa chọn sự phạm của GV toán nhằm hỗ trợ thiết kế các hoạt động dạy học trong môi trường EIAH²*”. Dự án nhằm thiết lập một mô hình didactic và tin học cho việc đưa ra lựa chọn sự phạm, từ đó phát triển hệ thống thông tin hỗ trợ GV xây dựng, thực hiện tiết dạy và phát triển các tiến trình dạy học.

* ThS, Khoa Toán-Tin, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

¹ MeTAH: Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain: Các mô hình và công nghệ cho việc học tập của con người; LIG: Laboratoire d'Informatique de Grenoble: Viện nghiên cứu tin học Grenoble.

² Modélisation des décisions didactiques des enseignants de mathématiques en vue d'aider à la conception de scénarios d'enseignement dans un environnement EIAH.

Trả lời cho câu hỏi đặt ra ở trên sẽ là một trong những bước khởi đầu của dự án – đó cũng chính là động lực thúc đẩy chúng tôi thực hiện nghiên cứu này.

2. Thuật ngữ “lựa chọn sự phạm”

Theo từ điển Tiếng Việt, “*lựa chọn*” được định nghĩa một cách khái quát là “*chọn giữa nhiều cái cùng loại*”. Cụ thể hơn, động từ “*chọn*” mang ý nghĩa “*xem xét, so sánh lấy cái hợp yêu cầu trong nhiều cái cùng loại*” [4, tr. 235]. Margolinas đưa ra một ví dụ về “*lựa chọn*” như sau:

Trong bàn ăn, bạn nói với người bên cạnh “*Làm ơn cho tôi xin hũ muối!*” và người đó chuyển hũ muối qua cho bạn. Khi đó, người bạn này đã thực hiện một *hành động* mà không có lựa chọn nào được đưa ra. Giả sử có hai hũ muối trên bàn, người bạn sẽ lịch sự hỏi lại “*Anh muốn dùng hũ bên trái hay bên phải?*”. Trong trường hợp này, có nhiều *khả năng* tồn tại. Tuy nhiên, trong những tình huống “*tâm thường*” như vậy, ta không gọi đó là *lựa chọn*. Bây giờ, hãy tưởng tượng, người bạn đó biết rằng hũ muối bên trái được nối với một kíp nổ, còn hũ muối bên phải thì không. Khi đó, anh ta phải đưa ra một *lựa chọn*. Nói chung, tất cả mọi *lựa chọn* đều dựa trên sự tồn tại các *khả năng*. [3, tr. 99]

Để thúc đẩy quá trình học tập một tri thức cụ thể của học sinh (HS), GV luôn luôn phải lựa chọn. Họ đứng trước nhiều khả năng và phải quyết định xem “*cách tốt nhất để giảng dạy nội dung này là gì?*”, hay “*nên đặt ra những bài toán nào cho HS?*”... Theo H. Chaachoua (2015), trong thực hành dạy học, GV đưa ra nhiều lựa chọn. Một số lựa chọn **đặc thù cho tri thức dạy học**, nhằm **tăng cường hiểu biết của HS về tri thức**, được gọi là những **lựa chọn sự phạm**. Những lựa chọn này có thể được đưa ra trước, trong, và sau tiết dạy: khi GV thiết kế giáo án, tiến hành giảng dạy trên lớp hoặc sau đó. Khi xây dựng và thiết kế các tình huống dạy học, họ phải chọn bài toán đưa ra cho HS, thời điểm và cách đặt câu hỏi, các câu trả lời được chấp nhận hoặc không được chấp nhận, v.v.... Hiển nhiên, những lựa chọn của GV sẽ ảnh hưởng lên việc học của HS.

Trong tham luận, thuật ngữ “*lựa chọn sự phạm*” được dùng theo cách định nghĩa trên, đôi khi, để ngắn gọn chúng tôi sẽ gọi tắt là “*lựa chọn*”.

3. Các nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn sự phạm của GV

Trong quá trình quyết định để đưa ra một lựa chọn sự phạm, GV chịu tác động từ nhiều nhân tố: những ràng buộc của thể chế dạy học (sách giáo khoa, phân phối chương trình, đánh giá, thi cử...), HS (trình độ, nguồn gốc xã hội...), đồng nghiệp, và chính bản thân họ (kiến thức chuyên môn, năng lực sự phạm, kinh nghiệm...) [3, tr.100]. Những nhân tố này dường như chồng chéo lên nhau và rất khó để GV phân biệt được “*cái gì quyết định sự lựa chọn sự phạm của họ*”. Trên thực tế, chúng có bản chất rất khác nhau. H. Chaachoua đã phân loại các nhân tố ảnh hưởng thành hai nhóm: nhóm các nhân tố khoa học luận và nhóm các nhân tố lịch sử sự phạm.

3.1. Nhóm các nhân tố khoa học luận

Nhân tố khoa học luận bao gồm những yếu tố nuôi dưỡng quan hệ cá nhân của giáo viên với đối tượng cần dạy.

Bảng 1. Nhóm các nhân tố khoa học luận ảnh hưởng tới lựa chọn của GV

Nhân tố	Giải thích	Ví dụ về cái có thể quan sát được
Về bộ môn	Kiến thức của GV về bộ môn (toán) và những lĩnh vực mà đối tượng (O) cần dạy có liên quan.	Trong dạy học, để thực hiện bước chuyển từ số học sang đại số, GV tìm thấy một tình huống mà việc giải quyết bằng số học không quá dễ dàng, thông qua đó đưa vào đại số.
Về mặt sư phạm học	Kiến thức sư phạm của GV, quan niệm của GV về quá trình dạy học.	Một vài GV xem tiếng ồn như một yếu tố gây nhiễu, cần loại bỏ trong lớp học; một số khác lại chấp nhận tiếng ồn trong phạm vi cho phép.
Về mặt nội dung, phương pháp dạy học	Khả năng thiết kế và tổ chức các hoạt động học tập, để HS gặp gỡ các yếu tố của kiến thức toán một cách hiệu quả.	GV nhận ra nguồn gốc sai lầm của HS khi thao tác với các đối tượng đại số...và có những can thiệp hợp lý để HS vượt qua các chướng ngại trong học tập.
Về chương trình, các tài nguyên thể chế	Hiểu biết của GV về quan hệ R(I,O).	Theo tinh thần giảm tải của chương trình hiện hành, dạng toán này không còn nữa.
Về cộng đồng giảng dạy	Những hiểu biết của GV về cách các đồng nghiệp của họ dạy đối tượng (O).	Tôi chọn bài toán này vì các đồng nghiệp của tôi ...

Bảng 1 cho thấy nhóm này gồm những nhân tố liên quan đến sự hiểu biết của GV về khoa học giáo dục (mà sư phạm học là một phần của nó), về môn học nói chung, về chính đối tượng O nói riêng, và về cả thực tiễn giảng dạy.

3.2. Nhóm các nhân tố lịch sử sư phạm

Như Bảng 1 đã chỉ ra, ảnh hưởng đến lựa chọn sư phạm của GV có thể là kinh nghiệm thực tiễn của anh ta về cộng đồng giảng dạy. Thế nhưng, hiểu biết về người học đương nhiên cũng có ảnh hưởng quan trọng đến các lựa chọn sư phạm mà giáo viên đưa ra. Ở đây ta quan tâm đến sự hiểu biết được xét về phương diện lịch sử sư phạm. Lịch sử sư phạm là lịch sử chia sẻ giữa GV và HS về tri thức cốt yếu của việc dạy, dưới những điều kiện và ràng buộc của thể chế.

Bảng 2. Nhóm các nhân tố lịch sử sư phạm ảnh hưởng tới lựa chọn của GV

Nhân tố	Giải thích	Ví dụ về cái có thể quan sát được
HS xét trong sự liên kết	HS xét trong sự liên kết nói đến sự chia sẻ, không phải với một HS mà với một nhóm HS, trong đó bao gồm 2 loại: - Tập thể HS của lớp học đích, tức là lớp học làm việc với GV trong năm học này. - Tập thể HS của một lớp học giả tưởng	- Khi soạn giáo án, GV cân nhắc tới trình độ chung của HS trong lớp mình đang dạy. - GV dự đoán các khó khăn có thể gặp phải của đối tượng HS từ lớp 9 lên lớp 10, dựa theo kinh nghiệm của mình.

Cá nhân HS	Cá nhân HS với những đặc trưng riêng	Trong tiết học, ta quan sát được nó khi GV phản hồi lại cho một HS riêng biệt.

Trong mục 5 của tham luận, chúng tôi sẽ đưa thêm ví dụ về các nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn sự phạm của GV khi phân tích tiết dạy cụ thể. Cần lưu ý thêm rằng một lựa chọn có thể xuất phát từ nhiều nhân tố.

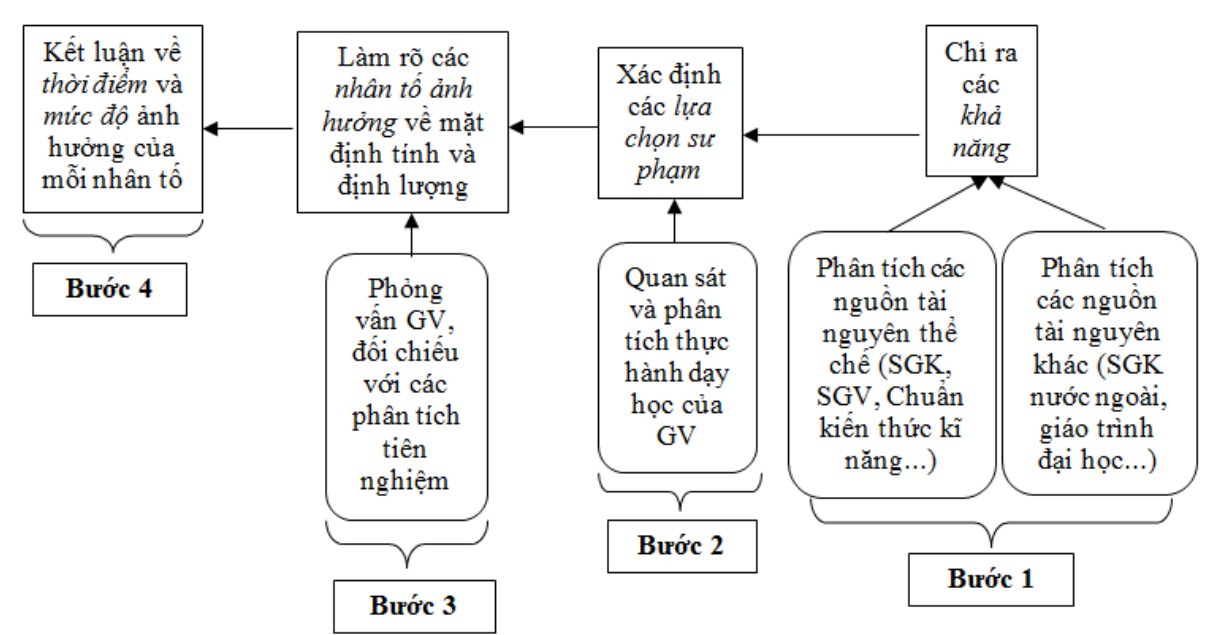
4. Phương pháp luận nghiên cứu

Trong phần đầu của tham luận, chúng tôi đã làm rõ thuật ngữ “*lựa chọn sự phạm*”, chỉ ra các đặc trưng của nó, cũng như xác định và phân loại các nhân tố ảnh hưởng. Ba vấn đề đặt ra là:

- (i) Làm sao xác định được nhân tố nào đã tác động đến quá trình đưa ra một lựa chọn sự phạm của GV?
- (ii) Liệu rằng các nhân tố này có cùng mức độ ảnh hưởng, hay trong đó có một số nhân tố đóng vai trò quyết định, chi phối các nhân tố còn lại?
- (iii) Thời điểm ảnh hưởng của mỗi nhân tố: trong quá trình GV soạn giáo án chuẩn bị cho bài dạy hay trên lớp học?

Trong phần tiếp theo, nhằm mục tiêu trả lời cho các câu hỏi nêu trên, chúng tôi xây dựng một phương pháp luận nghiên cứu cho phép *định tính* và *định lượng* các nhân tố ảnh hưởng. Phương pháp này có thể hệ thống hóa trong sơ đồ 3:

Sơ đồ 3: Phương pháp luận nghiên cứu



Giải thích các bước nghiên cứu trong sơ đồ:

- Để làm sáng tỏ các nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn sự phạm nhằm đưa ra các kết luận về thời điểm và mức độ ảnh hưởng của mỗi nhân tố (**Bước 3 và 4**), vấn đề đầu tiên đặt ra là “*GV đã đưa ra những lựa chọn sự phạm nào?*” (**Bước 2**). Như chúng tôi đã trình bày, tất cả lựa chọn đều dựa trên sự tồn tại các khả năng. Vì vậy, bước tiên

quyết để xác định các lựa chọn sự phạm của GV là làm rõ những khả năng đó: trong dạy học, GV có những lựa chọn nào để trình bày một tri thức, những tình huống nào có thể xây dựng, những bài toán nào có thể đưa ra cho HS?... (**Bước 1**).

– **Bước 1:** Một trong những tư liệu “*bắt buộc phải tham khảo*” để xác định các khả năng chính là nguồn tài nguyên thể chế bao gồm sách giáo khoa (SGK), sách giáo viên (SGV), chuẩn kiến thức kỹ năng... Tuy nhiên, chỉ phân tích các tài liệu đó thôi là chưa đủ, vì GV còn tiếp xúc với nhiều nguồn tư liệu phong phú, họ có thể có những khả năng khác để lựa chọn. Do đó, song song với các tài nguyên thể chế; các SGK nước ngoài, giáo trình đại học, sách tham khảo, các tài nguyên trên mạng internet,... cũng cần được xem xét.

– **Bước 2:** Sau khi xác định được các khả năng, chúng tôi tiến hành quan sát thực hành dạy học của GV, tạo lập biên bản quan sát lớp học, đối chiếu với những kết quả thu được trong Bước 1 để làm sáng tỏ các lựa chọn sự phạm của họ. Các công cụ của thuyết nhân học trong didactic toán được chúng tôi sử dụng trong hai bước phân tích này bao gồm: khái niệm praxéologie và khái niệm tổ chức dạy học.

– **Bước 3:** Tiếp theo, chúng tôi cùng với GV xem lại biên bản quan sát lớp học, yêu cầu họ giải thích lý do và thời điểm của những lựa chọn đã được đưa ra. Dựa trên các phân tích tiên nghiệm trước đó, chúng tôi xác định bản chất của các lựa chọn, từ đó kết luận về thời điểm và mức độ ảnh hưởng của mỗi nhân tố trong **Bước 4**.

5. Các nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn sự phạm của GV: trường hợp dạy học khái niệm đạo hàm

Trong phần này, chúng tôi trình bày các kết quả thu được khi áp dụng phương pháp luận nghiên cứu đã xây dựng vào một trường hợp cụ thể: thực hành dạy học khái niệm đạo hàm trong thể chế dạy học toán 11 ở Việt Nam. Do khuôn khổ có hạn của tham luận, chúng tôi không thể trình bày chi tiết các phân tích đã tiến hành, mà chỉ phác thảo những ý tưởng cơ bản nhất trong từng bước nghiên cứu³.

5.1. Bước 1 – Chỉ ra các khả năng

Chúng tôi xem xét hai bộ SGK Đại số và Giải tích 11 Cơ bản và Nâng cao, Sách bài tập (SBT) và Sách giáo viên (SGV) trên các phương diện: những bài toán được đặt ra nhằm dẫn tới khái niệm đạo hàm, các nghĩa đặc trưng và các praxéologie tiêu biểu gắn liền với khái niệm được xây dựng trong thể chế. Một tài liệu *ngoài* thể chế là *Calculus: Early Transcendentals* của tác giả James Stewart, một giáo trình đại học tiêu biểu của Mỹ, cũng được phân tích nhằm tạo ra một “*bộ tham chiếu tương đối đầy đủ hơn*” về các *khả năng* giáo viên có thể lựa chọn trong thực hành dạy học.

5.2. Bước 2 – Xác định các lựa chọn sự phạm

Chúng tôi tiến hành quan sát thực hành dạy học các tiết học thuộc §1 “*Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm*” - chương V “*Đạo hàm*” - *Đại số và Giải tích 11* của hai GV: GV1 đã có trên mười năm kinh nghiệm giảng dạy ở trường Trung học thực hành Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh, GV2 mới ra trường và có một năm kinh nghiệm giảng dạy ở trường Trung học thực hành Sài Gòn Đại học Sài Gòn. Cả hai GV đều được đào tạo tại

³ Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo thêm tài liệu 3 trong danh mục tài liệu tham khảo

khoa Toán – Tin học trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh. Các lớp học quan sát được lựa chọn ngẫu nhiên: lớp 11.1 trường thứ nhất và lớp 11A3 trường thứ hai.

Dựa trên băng ghi âm và những ghi chép trên lớp, biên bản quan sát lớp học được tạo lập. Từ biên bản thu được, đối chiếu với những phân tích trong Bước 1, chúng tôi xác định những lựa chọn GV đã đưa ra trong thực hành dạy học: các nghĩa nào của đạo hàm được GV xây dựng trong lớp học, các tình huống nào được thiết kế để đưa vào các nghĩa đó, các praxéologie nào được triển khai. Đồng thời, chúng tôi cũng ghi nhận những lựa chọn sư phạm của GV về các thời điểm được ưu tiên trong dạy học; các ví dụ, bài toán GV đưa ra cho HS; cách đặt câu hỏi và thời điểm đặt câu hỏi; các câu trả lời được chấp nhận hoặc không được chấp nhận; ứng xử của GV trước các câu trả lời đúng hoặc sai của HS...Tất cả những yếu tố đó sẽ được ghi nhận chi tiết tại Cột 2 “*Những ghi nhận quan sát được về lựa chọn của GV*” trong *Biên bản quan sát lớp học và các phân tích*⁴.

5.3. Bước 3 – Làm rõ các nhân tố ảnh hưởng

Trong bước này, chúng tôi làm việc với GV, cùng xem lại biên bản, yêu cầu họ giải thích về những lựa chọn của mình và thời điểm đưa ra lựa chọn. Câu trả lời của GV được ghi nhận ở Cột 3 “*Lí giải của GV*”. Đối chiếu câu trả lời của GV với các phân tích tiên nghiệm về nhân tố ảnh hưởng trong mục 1 và 2 của tham luận, sẽ cho phép chúng tôi xác định nguyên nhân của mỗi lựa chọn là do nhân tố nào quyết định (Cột 4 “*Phân tích nhân tố ảnh hưởng*”). Chúng tôi trích dẫn một ví dụ về cách thức phân tích:

Bảng 4. Trích đoạn “Biên bản quan sát lớp học và các phân tích”

(1) Biên bản quan sát lớp học	(2) Những ghi nhận quan sát được về lựa chọn của GV	(3) ♦ Lí giải của GV (+): thời điểm soạn giáo án (-): trong giờ học	(4) Phân tích nhân tố ảnh hưởng
...	...	...	...
GV1 mở đầu tiết học về khái niệm đạo hàm bằng cách vừa đọc vừa ghi định nghĩa đạo hàm lên bảng và yêu cầu HS chép vào tập.	GV1 chọn tiến trình Đối tượng → Công cụ để trình bày định nghĩa đạo hàm.	(+): Do mặt bằng chung của lớp là trung bình khá nên GV lựa chọn trình bày trực tiếp khái niệm. Hơn nữa, với những kiến thức mới, tốt nhất là GV giảng giải rõ ràng, sáng sủa và HS chăm chú lắng nghe, như vậy sẽ dễ tiếp thu bài học hơn.	♦ Nhân tố tập thể HS của lớp học đích ♦ Nhân tố KHL về mặt sư phạm học
...	...	...	...
(GV1) Như vậy, có thể hiểu nôm na như sau, đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 chẳng qua là giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi x tiến tới	GV1 nhấn mạnh đạo hàm là một giới hạn đặc biệt (điều này được GV1 lặp	(-): Khi được phỏng vấn, GV1 quan niệm đạo hàm là một loại giới hạn đặc biệt và cho rằng đó là đặc trưng quan trọng nhất HS cần nắm được để hiểu khái niệm này.	♦ Nhân tố KHL về bộ môn

⁴ Bạn đọc có thể tìm thấy các Biên bản này trong Phụ lục 1 và Phụ lục 2 của tài liệu 3.

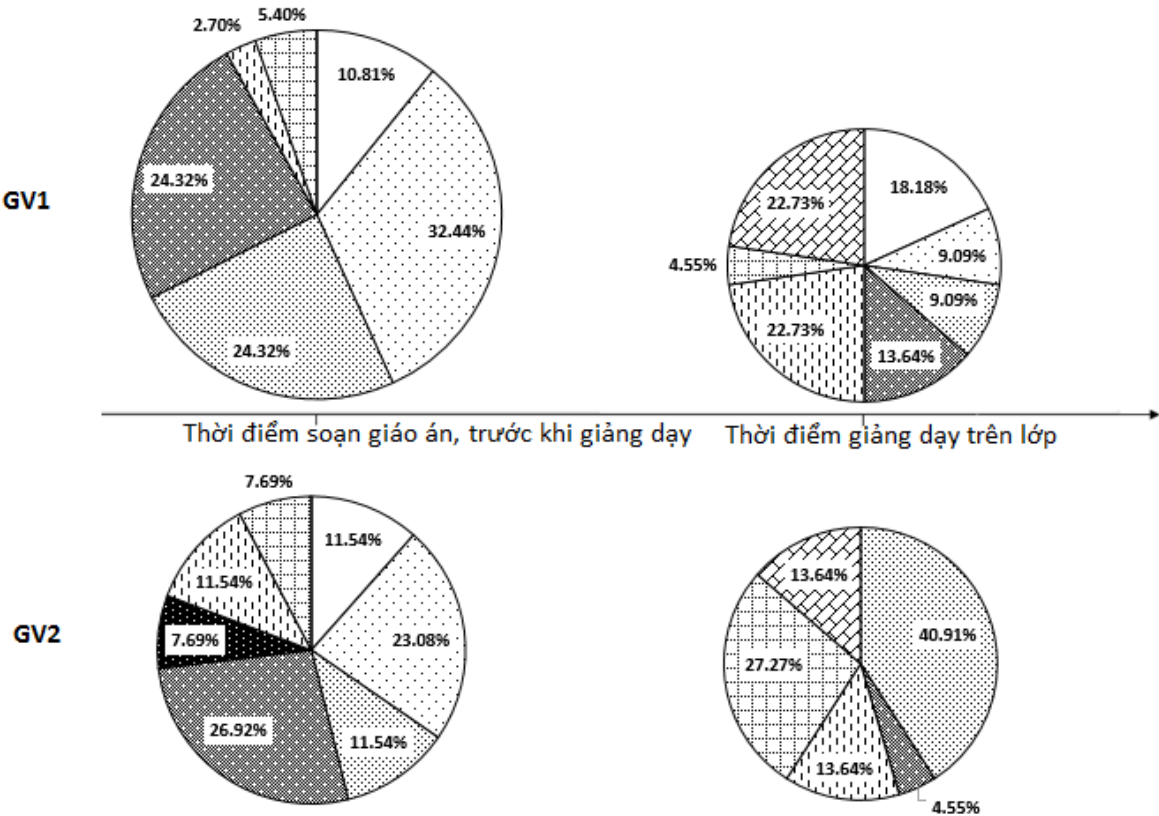
x_0 . (GV dùng phấn màu đồng khung công thức trên bảng)	lại 9 lần trong giờ học).		
...	...	...	...
(GV1) Trước khi nêu ý nghĩa vật lí của đạo hàm thầy đặt ra vấn đề nhỏ như thế này: “Trên một đoạn đường có vận tốc tối đa cho phép là 40 km/h, một người chạy xe với vận tốc trung bình là 35 km/h. Hỏi người đó có vi phạm luật giao thông hay không?”	GV1 đưa ra một tình huống khác, không sử dụng bài toán mở đầu trong các SGK.	(+): Tình huống cho HS thấy ý nghĩa của khái niệm vận tốc tức thời. Bài toán mở đầu chỉ xây dựng công thức tính vận tốc tức thời mà không cho thấy ý nghĩa của khái niệm này.	♦ Nhân tố khoa học luận về mặt nội dung, phương pháp dạy học
...	...	...	...
GV2 không trình bày ý nghĩa vật lí của đạo hàm.	Tuy nhiên, trong đề cương phát cho HS vào đầu giờ, GV2 có đề cập tới nghĩa này.	(+): Trong đề kiểm tra tập trung và đề thi học kì không có nội dung này. Đề cương có phần ý nghĩa vật lí của đạo hàm là do GV2 tham khảo từ một tài liệu được chia sẻ trên mạng.	♦ Nhân tố KHL về thể chế (đánh giá, thi cử) ♦ Nhân tố KHL về cộng đồng giảng dạy
...	...	...	...
<i>Để giảng giải ý nghĩa hình học của đạo hàm, GV1 bắt đầu bằng việc nhắc lại khái niệm tiếp tuyến.</i> (GV1) Tiếp tuyến là sao? Mấy bạn đã biết tiếp tuyến chưa? Mấy bạn đã gặp tiếp tuyến ở lớp dưới chưa? Ví dụ như chúng ta gặp tiếp tuyến của parabol chưa, sự tiếp xúc của đường thẳng và parabol chúng ta đã học chưa? Đường thẳng được gọi là tiếp xúc với parabol khi nào?	GV1 liên tiếp đặt các câu hỏi về tiếp tuyến của parabol để gợi nhớ HS về khái niệm tiếp tuyến.	(-): Vì HS mới học kiến thức về parabol và tiếp tuyến của parabol ở lớp 9 và lớp 10 nên có thể HS sẽ thấy quen thuộc hơn.	♦ Nhân tố tập thể HS của lớp học giả tưởng
...	...	...	...
<i>Trong phần xây dựng ý nghĩa hình học của đạo hàm, một đoạn hội thoại diễn ra giữa GV và một HS như sau:</i> (GV2) Rồi bây giờ chúng ta quan sát ý nghĩa của đạo hàm...Hỏi này thầy nói tana bằng cái gì, DT? (HS DT): $f(x)$.	Phản ứng trước câu trả lời không được chấp nhận của HS: GV2 gọi một HS khác mà không kiên nhẫn đặt thêm các câu hỏi	(-): GV2 gọi HS DT vì nhận thấy em không tập trung vào bài giảng. Trước đó, GV2 đã trình bày công thức này nhưng HS không trả lời được. Nếu tiếp tục đặt câu hỏi sẽ làm mất thời gian của lớp học.	♦ Nhân tố cá nhân HS

(GV2) : Không phải, hồi này tôi nói rồi, tôi có câu khẳng định ở dưới đó. Rồi mời bạn khác coi.	gợi ý như thường lệ.		
...	...	...	...

5.4. Bước 4 – Kết luận về các nhân tố ảnh hưởng

Đề trả lời cho câu hỏi: “*Các nhân tố này can thiệp vào những thời điểm nào và có mức độ ảnh hưởng ra sao tới lựa chọn của GV?*”, chúng tôi tổng kết số lượng nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn của GV1 và GV2 theo từng loại (5 nhân tố khoa học luận và 3 nhân tố lịch sử sư phạm) và từng thời điểm (trước và trong khi giảng dạy). Kết quả tổng hợp được biểu diễn dưới dạng biểu đồ quạt. Chúng tôi lựa chọn dạng biểu đồ này để biểu diễn dữ liệu vì nó cho phép nhận thấy tương quan giữa các nhân tố ảnh hưởng – yếu tố trả lời cho câu hỏi về *mức độ* ảnh hưởng của từng nhân tố.

Biểu đồ 5: Các nhân tố ảnh hưởng tới lựa chọn sư phạm của GV1 và GV2 trong thực hành dạy học khái niệm đạo hàm



Chú thích:

- ☐ KHL về bộ môn

☐ KHL về mặt sư phạm học

☐ KHL về mặt nội dung, phương pháp dạy học

☐ KHL về thể chế

☐ KHL về cộng đồng giảng dạy
- ☐ Tập thể HS lớp học giả tưởng

☐ Tập thể HS lớp học đích

☐ Cá nhân HS

Từ các kết quả phân tích, chúng tôi rút ra một số kết luận tiêu biểu sau:

- Vì diện tích mỗi hình quạt tỉ lệ thuận với số lựa chọn sự phạm, nhìn vào biểu đồ 5, ta thấy rõ ràng thời điểm soạn giáo án đóng vai trò quan trọng trong thực hành dạy học: số lựa chọn được hai GV đưa ra vào thời điểm này thậm chí còn nhiều hơn số lựa chọn trên lớp học.

- Trong quá trình chuẩn bị cho bài giảng, các nhân tố khoa học luận quyết định lựa chọn sự phạm của GV; trong khi đó các nhân tố lịch sử sự phạm giữ vị trí chủ đạo đối với các lựa chọn trên lớp học.

- Trong nhóm các nhân tố khoa học luận, các nhân tố về bộ môn, về mặt sự phạm học, về mặt nội dung, phương pháp dạy học và về thể chế có mức độ ảnh hưởng lớn.

- Những ràng buộc của thể chế để lại dấu ấn đậm nét trong thực hành dạy học của GV... Khi trả lời phỏng vấn, cả hai GV đều bày tỏ quan điểm mong muốn xây dựng những tình huống và bài toán giúp HS hiểu được “*kiến thức này dùng để làm gì*”, tức là nghĩa của tri thức và những ứng dụng của nó. Tuy nhiên, trong thực tế giảng dạy, GV1 và GV2 đều tập trung ưu tiên những kiểu nhiệm vụ được SGK chú trọng, đặc biệt là những kiểu nhiệm vụ xuất hiện trong các kì thi.

- Một điểm đáng lưu ý nữa là những hiểu biết sự phạm của GV ảnh hưởng mạnh mẽ đến lựa chọn của họ, thậm chí hơn cả kiến thức chuyên ngành.

- Trái lại với các nhân tố khoa học luận trên, cộng đồng giảng dạy hầu như không tác động tới thực hành dạy học của GV: nhân tố này chỉ xuất hiện một đôi lần trong quá trình soạn giáo án của GV2 – một GV mới ra trường, chưa có nhiều kinh nghiệm. Hơn nữa, “cộng đồng giảng dạy” trong trường hợp này không phải là các đồng nghiệp trong tổ bộ môn mà là cộng đồng chia sẻ tài nguyên trên mạng internet.

- Trong nhóm các nhân tố lịch sử sự phạm, tập thể HS được GV cân nhắc nhiều hơn so với cá nhân HS khi đưa ra các lựa chọn sự phạm. Ngoài ra, chúng tôi cũng nhận thấy một điểm khác biệt thú vị: trong khi GV1 chú trọng hơn đến tập thể HS của lớp học giả tưởng, GV2 lại quan tâm đến tập thể HS của lớp học đích nhiều hơn. Điều này có thể được lí giải bởi sự thiếu kinh nghiệm giảng dạy thực tế tại trường phổ thông của GV2, tiền đề tham chiếu cho nhân tố “tập thể HS của lớp học giả tưởng”.

6. Một số kiến nghị

Các kết quả phân tích trên dẫn chúng tôi tới một số đề xuất nhằm hỗ trợ giáo viên cải tiến chất lượng và hiệu quả của hoạt động dạy – học.

Vấn đề đầu tiên đặt ra đối với các cơ sở đào tạo GV. Kết quả thu được cho thấy nhân tố khoa học luận về mặt sự phạm học và về mặt nội dung, phương pháp dạy học là những nhân tố ảnh hưởng sâu sắc nhất tới lựa chọn của GV. Chúng đóng vai trò quan trọng hơn cả nhân tố khoa học luận về bộ môn. Nói cách khác, các kiến thức nghề nghiệp của GV có mức độ ảnh hưởng mạnh mẽ hơn cả kiến thức chuyên ngành (toán học) đối với thực hành dạy học. Tuy nhiên, trên thực tế, nhìn lại Chương trình đào tạo GV toán tại Khoa Toán – Tin học trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh, dường như những kiến thức nghề nghiệp này chưa được quan tâm đúng mực. Trong tổng số 135 tín chỉ của chương trình khung, chỉ có 38 tín chỉ dành cho nhóm kiến thức nghề nghiệp, còn lại 59 tín chỉ thuộc khối kiến thức chuyên ngành toán, 38 tín chỉ dành cho

khối kiến thức chung, các môn thi tốt nghiệp và tự chọn tự do. Sự chênh lệch giữa trọng tâm kiến thức được cung cấp cho sinh viên trên giảng đường đại học với nhu cầu thực tế của một GV đứng lớp là minh chứng cụ thể cho những khiếm khuyết của hệ thống đào tạo GV hiện nay. Do đó, chú trọng hơn nữa vào việc cung cấp các kiến thức sư phạm tổng quát và didactic về bộ môn, cho người học thấy được mối liên hệ giữa tri thức khoa học và tri thức được giảng dạy tại các trường phổ thông là một bổ sung cần thiết đối với chương trình đào tạo GV tại các trường Sư phạm nói chung và Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh nói riêng.

Bên cạnh đó, các ràng buộc của thể chế, đặc biệt là vấn đề thi cử, đánh giá cũng cho thấy tầm quan trọng của nó đối với thực hành dạy học. Như vậy, những cải cách về mặt đánh giá, thi cử cần được tiến hành đồng thời với các đổi mới của chương trình và SGK.

Phân tích cũng đã cho thấy những chuẩn bị của GV trước khi giảng dạy trên lớp đóng một vai trò then chốt. Tuy nhiên, qua khảo sát nhanh quan điểm của một số GV, chúng tôi nhận thấy việc soạn, điều chỉnh, bổ sung giáo án không được GV đầu tư đúng mực. Thậm chí, có một số ý kiến cho rằng giáo án “chỉ mang tính hình thức” hoặc để “đôi phó” với các đợt thanh, kiểm tra. Nên chăng chúng ta cần có những biện pháp tích cực để việc soạn giáo án trở lại đúng ý nghĩa và tầm quan trọng vốn có của nó?

Ngoài ra, chúng tôi nhận thấy xu hướng tham khảo từ cộng đồng giảng dạy thông qua các tài nguyên được chia sẻ trên mạng internet. Sự phát triển các nền tảng tin học như vậy có thể là một định hướng giúp hỗ trợ GV trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bùi Thị Thanh Mai (2016), *Dạy học khái niệm đạo hàm ở trường phổ thông: một số nhân tố ảnh hưởng tới sự lựa chọn của giáo viên*, Luận văn thạc sĩ giáo dục học trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh.

2. Chaachoua H. (2015), *Quel modèle pour analyser et comprendre les décisions Didactics des enseignants dans leurs pratiques professionnelles?*, DIMAVI 2015, Hue, Viet Nam.

3. Lima I. (2006), *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*, Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

4. Viện ngôn ngữ học, Hoàng Phê (Chủ biên) (2010), *Từ điển tiếng Việt*, Nxb Từ điển bách khoa.

HƯỚNG DẪN SINH VIÊN KHAI THÁC BÀI TẬP TOÁN

Đào Thị Hoa*

Tóm tắt

Một trong những tri thức sinh viên sư phạm Toán cần được trang bị là cách hướng dẫn học sinh khai thác bài tập toán. Việc hướng dẫn học sinh khai thác được bài tập toán sẽ có tác động kép đối với cả giáo viên và học sinh: tạo được niềm vui, hứng thú dạy – học, tạo được niềm tin, niềm đam mê nghiên cứu toán, rèn luyện được tư duy linh hoạt, sáng tạo. Trong thực tế dạy học, khi hướng dẫn học sinh giải một bài tập toán, nhiều giáo viên chỉ dừng lại ở việc hướng dẫn học sinh tìm ra một lời giải của bài toán, chưa chú ý hướng dẫn học sinh tìm cách khai thác bài tập toán. Để chuẩn bị cho sinh viên một trong những hành trang vào nghề, bài viết trình bày các cách khai thác một bài tập toán nói chung từ đó vận dụng vào khai thác 4 bài toán cụ thể: Tìm ra 10 cách giải từ bài toán 1; Phát biểu rất nhiều bài toán tương tự và khái quát từ bài toán 2, bài toán 3; Sáng tạo được 12 bài toán từ bài toán 4.

Từ khóa: Bài toán, khai thác, sinh viên.

Abstract

One of the students' knowledge of Mathematics pedagogical sector which need to be equipped is the way to guide students in researching math exercise. Guiding students in researching math exercise will have dual impact on teachers and students: Making happiness, interest in teaching and learning, making faith, passion in studying Mathematics, training flexible and creative thinking. In practical teaching, while guiding students to solve a math exercise, many teachers only stop at guiding students to find out the answer. They do not pay attention to guide students in finding out the way to research math exercise. In order to prepare for students some skill for their career, this article presents the ways to research a math exercise in general, then use them for researching 4 specific math exercise. Finding out 10 solutions from question 1; Detecting lots of similar problems and generalize from question 2, 3; Creating 12 mathematics exercise from question word 4.

Keywords: Mathematic exercise, research, student.

1. Mở đầu

Trong quá trình học tập chuyên ngành của sinh viên toán Đại học Sư phạm, khai thác bài tập toán là một nội dung thuộc chủ đề “Dạy học giải bài tập toán” bởi khai thác bài tập toán là một trong những năng lực cần thiết đối với mọi giáo viên toán. Tìm ra được một lời giải của bài toán đã thú vị, nhưng sẽ thú vị hơn nếu biết khai thác bài toán ấy. Có thể nói, khai thác bài toán là một “nghệ thuật” vận dụng những kiến thức đã có vào bài toán. Để có thể hướng dẫn học sinh khai thác bài tập toán, giáo viên cần biết cách và chú ý hướng dẫn, khuyến khích, tạo điều kiện cho học sinh khai thác bài tập toán. Vậy thế nào là khai thác bài tập toán? Khai thác bài tập toán có vai trò gì trong dạy học? Làm thế nào để khai thác bài tập toán? Vận dụng trong dạy học như thế nào?

2. Nội dung

Trong khuôn khổ bài viết, chúng tôi quan niệm khai thác bài tập toán được hiểu là sau khi tìm ra và trình bày được một lời giải của bài toán, người giải toán tiếp tục suy

* TS, Đại học Sư phạm Hà Nội 2

nghĩ về bài toán để tìm ra những cách giải khác (nếu có) của bài toán hoặc phát biểu các bài toán mới trên cơ sở bài toán ban đầu.

Việc khai thác được một bài toán có vai trò to lớn trong dạy học, có tác động kép đối với cả giáo viên và học sinh: Giúp củng cố, vận dụng và hiểu sâu sắc nhiều kiến thức cơ bản; Giúp kiểm tra lại kết quả của lời giải ban đầu; Giúp tìm ra được con đường ngắn nhất, hoặc độc đáo nhất để giải bài toán; Giúp nhìn nhận vấn đề dưới nhiều khía cạnh khác nhau; Phát triển khả năng phát hiện và giải quyết vấn đề; Thấy được mối liên hệ giữa các kiến thức toán học, các vấn đề toán học; Rèn luyện trí thông minh, tính linh hoạt, độc lập, khả năng sáng tạo; Tăng tính tự giác, tích cực, tạo được niềm vui, hứng thú, sự tự tin trong học tập. Tuy nhiên trong thực tế dạy học, khi hướng dẫn học sinh giải một bài tập toán, nhiều giáo viên chỉ dừng lại ở việc hướng dẫn học sinh tìm ra một lời giải của bài toán, chưa chú ý hướng dẫn học sinh tìm cách khai thác bài tập toán bởi họ chưa thấy rõ vai trò của việc khai thác bài tập toán, chưa biết cách khai thác bài tập toán hoặc họ có quan niệm sai lầm rằng khai thác bài tập toán chỉ áp dụng đối với các bài toán khó, đây là công việc của các chuyên gia, các nhà viết sách.

Những cách thường sử dụng khi khai thác bài tập toán bao gồm [1, 2, 3, 4]:

Tìm nhiều lời giải cho bài toán.

Phát biểu bài toán tương tự.

Phát biểu bài toán ngược.

Phát biểu bài toán đặc biệt.

Phát biểu bài toán khái quát.

Sau khi tìm được một lời giải bài toán, người giải cần tiếp tục suy nghĩ, nhìn bài toán dưới nhiều khía cạnh khác nhau để tìm ra các lời giải khác của bài toán, từ đó so sánh và phát hiện ra cách tối ưu để giải bài toán.

Để có được bài toán tương tự với bài toán ban đầu, ta có thể thay đổi hình thức phát biểu của bài toán, thay đổi số liệu của bài toán, thay đổi đối tượng của bài toán, thay đổi số đối tượng của bài toán, thay đổi dữ kiện đã cho bằng một điều kiện gián tiếp, thay câu hỏi của bài toán bằng một câu hỏi khác, ...

Để có được bài toán ngược, ta có thể thay ít nhất một trong các điều đã cho bởi điều phải tìm, phải chứng minh và ngược lại.

Để có được bài toán khái quát, ta có thể thay số liệu cụ thể trong bài bởi số mang tính khái quát hơn, chẳng hạn thay số cụ thể trong bài toán bởi số n , hoặc thay số đối tượng trong bài toán thành n đối tượng. Ngược lại, ta thay số liệu mang tính khái quát trong bài thành số cụ thể hoặc thay đổi n đối tượng trong bài toán bởi một số đối tượng cụ thể ta sẽ có bài toán đặc biệt.

Tùy từng bài toán cụ thể mà ta có thể có các hướng khai thác khác nhau. Vận dụng điều này trong dạy học, ta có thể khai thác một số bài toán sau:

Bài toán 1: Chứng minh rằng nếu $x + y = 2$ thì $xy \leq 1$.

Bài toán này có thể có ít nhất 10 cách giải sau đây:

Cách 1: Từ $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$.

Thay $x = 2 - y$ vào biểu thức xy , ta có $xy = (2 - y)y = 1 - (y - 1)^2 \leq 1$.

Cách 2: Từ $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$.

Thay $y = 2 - x$ vào biểu thức xy , ta có $xy = x(2 - x) = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$.

Cách 3: Từ $x + y = 2 \Rightarrow x - 1 = 1 - y$. Nên $(x - 1)^2 = (x - 1)(1 - y) \geq 0 \Rightarrow xy \leq 1$.

Cách 4: Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 4 \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq 1$.

Cách 5: Có $(x + y)^2 = 4$ (1) và $-(x - y)^2 \leq 0$ (2). Cộng (1) và (2) ta có $xy \leq 1$.

Cách 6: Giả sử $x \geq y$. Ta có $2 = x + y \geq 2y \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y - 1 \leq 0$ (1)

Và $2x \geq x + y = 2 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $xy \leq 1$.

Cách 7:

Giả sử $xy > 1$. Từ $x + y = 2$ và $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 4 = x^2 + y^2 + 2xy > 4xy > 4$, vô lý. Vậy $xy \leq 1$.

Cách 8: Vì $x + y = 2 > 0$ nên $x \geq 0$ và $y \geq 0$ hoặc x và y trái dấu.

+ Nếu $x \geq 0$ và $y \geq 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số x, y ta có điều phải chứng minh.

+ Nếu x và y trái dấu thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

Cách 9: Giả sử $xy = P$. Mặt khác có $x + y = 2$ nên x và y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 2X + P = 0$. Khi đó $\Delta \geq 0$ hay $xy \leq 1$.

Cách 10: Đặt $x = 1 + m \Rightarrow y = 2 - x = 1 - m$. Khi đó $xy = (1 + m)(1 - m) = 1 - m^2 \leq 1$.

Bài toán 1 không phải là bài toán khó. Cái hay của bài toán 1 không phải là ở nội dung của bài toán mà chính bởi bài toán có thể giải bằng nhiều cách khác nhau. Mỗi cách giải đòi hỏi sử dụng những kiến thức khác nhau. Trong 10 cách giải trên, cách mà học sinh thường sử dụng là cách 1 hoặc 2. Cách giải hay và độc đáo là cách 10. Việc tìm ra nhiều lời giải cho bài toán 1 giúp củng cố các kiến thức về khái niệm bất đẳng thức, các tính chất của bất đẳng thức, các phương pháp chứng minh bất đẳng thức, hằng đẳng thức; giúp cho việc phát triển tư duy; hình thành thói quen tìm nhiều cách khác nhau để giải quyết một vấn đề từ đó lựa chọn cách giải quyết tối ưu.

Bài toán 2: Giải phương trình: $0,2x - 500 = 0$.

Bài toán 2 được phát biểu với giả thiết và kết luận rõ ràng, tường minh, đơn giản, học sinh chỉ cần vận dụng trực tiếp kiến thức về giải phương trình bậc nhất. Nếu phải biến đổi qua một bước trung gian mới đưa được về phương trình trong bài toán 2 (thay đổi dữ kiện đã cho bằng một điều kiện gián tiếp) ta có thể có bài toán 2.1 như sau:

Bài toán 2.1: Giải phương trình: $1,2x + 1500 = 2000 + x$.

Để giải bài toán 2.1, học sinh cần biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình bậc nhất rồi giải. Nếu thay đổi hình thức phát biểu của bài toán 2.1, ta có bài toán sau:

Bài toán 2.2: Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $f(x) = 1,2x + 1500$ và $g(x) = x + 2000$.

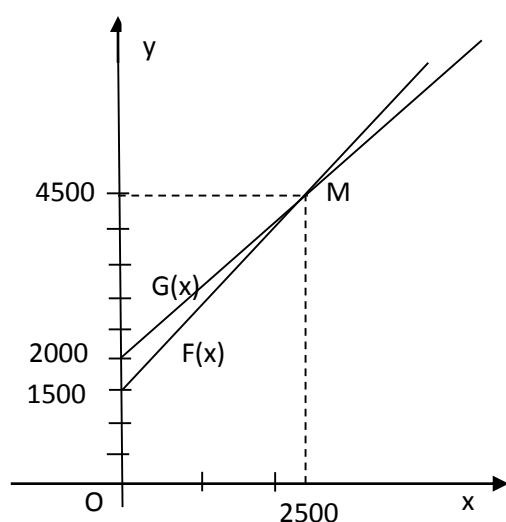
Các kiến thức được sử dụng để giải bài 2.2 không chỉ là giải phương trình mà còn bao gồm cả hàm số, đồ thị hàm số, tọa độ giao điểm hai đồ thị hàm số. Bài toán 2.2 có thể phát biểu thông qua một tình huống thực tế như sau:

Bài toán 2.3: Có hai loại máy bơm với cùng lưu lượng nước bơm được trong một giờ. Loại thứ nhất giá 1.500.000 đồng, loại thứ hai giá 2.000.000 đồng. Nếu dùng loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1200 đồng, nếu dùng máy bơm loại thứ hai thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1000 đồng. Sau bao nhiêu thời gian thì số tiền phải trả cho hai loại máy bơm là như nhau?

Bài toán 2.3 đưa ra một tình huống cụ thể liên quan tới số tiền phải trả là bằng nhau cho hai loại máy bơm - bao gồm cả tiền điện và tiền mua máy bơm, nếu không chú ý học sinh có thể chỉ quan tâm đến số tiền điện phải trả mà không quan tâm đến số tiền mua máy bơm. Ở bài toán này học sinh cần biết toán học hóa tình huống để đưa về được bài toán 2.1 là bài tương đối rõ ràng.

Nếu thay đổi câu hỏi trong bài toán 2.3, ta có bài toán 2.4 như sau:

Bài toán 2.4: Một gia đình muốn mua một chiếc máy bơm nước. Có hai loại máy bơm với cùng lưu lượng nước bơm được trong một giờ. Loại thứ nhất giá 1.500.000 đồng, loại thứ hai giá 2.000.000 đồng. Nếu dùng loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1200 đồng, nếu dùng máy bơm loại thứ hai thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1000 đồng.



a) Viết các biểu thức toán học thể hiện số tiền (tính bằng nghìn đồng) phải trả khi sử dụng máy bơm loại thứ nhất và máy bơm loại thứ hai trong x giờ (bao gồm tiền điện và tiền mua máy bơm).

b) Biểu diễn bằng đồ thị số tiền phải trả theo biểu thức toán học ở phần a khi sử dụng mỗi loại máy bơm trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c) Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị ở phần b. Từ đó hãy phân tích ý nghĩa kinh tế của bài toán.

Bài toán 2.4 đưa ra một tình huống cụ thể, quá trình giải quyết bài toán cần nhiều hơn đến kiến thức và tư duy toán học so với bài 2.3. Bài toán này đòi hỏi học sinh phải biết dựa vào đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục để rút ra được ý nghĩa kinh tế như sau: Nếu dùng 2500 giờ bơm thì số tiền phải trả cho hai máy cùng là 4500 nghìn đồng (4.500.000 đồng). Nếu dùng ít hơn 2500 giờ thì mua máy thứ nhất tiết kiệm hơn. Nếu

dùng nhiều hơn 2500 giờ thì mua máy thứ hai tiết kiệm hơn ($F(x)$ – Số tiền phải trả khi mua máy bơm thứ nhất; $G(x)$ – Số tiền phải trả khi mua máy bơm thứ hai).

Từ phân tích trên gia đình đó sẽ biết cách mua loại máy bơm phù hợp với nhu cầu sử dụng.

Nếu tiếp tục thay đổi câu hỏi trong bài toán 2.4, ta có bài toán 2.5 như sau:

Bài toán 2.5: Gia đình bạn Hưng muốn mua một chiếc máy bơm nước. Có hai loại máy bơm với cùng lưu lượng nước bơm được trong một giờ. Loại thứ nhất giá 1.500.000 đồng, loại thứ hai giá 2.000.000 đồng. Nếu dùng loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1200 đồng, nếu dùng máy bơm loại thứ hai thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1000 đồng. Hãy giúp gia đình Hưng phân tích ý nghĩa kinh tế nếu sử dụng một trong hai máy bơm đó.

Bài toán 2.5 khó hơn bài 2.4. Bài 2.5 không chỉ ra các kiến thức toán học cần sử dụng trong quá trình giải quyết như bài toán 2.4. Bài này đòi hỏi học sinh phải tự suy nghĩ, liên hệ với các kiến thức toán học đã biết để giải quyết tình huống, phải tự xác định các hàm số, phải biết vẽ đồ thị các hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ, biết tìm giao điểm, từ đó phân tích được ý nghĩa kinh tế giúp gia đình Hưng đưa ra quyết định đúng đắn. Sau khi giải quyết được tình huống trên, học sinh có thể rút ra bài học về việc sử dụng kiến thức về phương trình, đồ thị hàm số để giải quyết các bài toán tối ưu tương tự.

Bài toán 2 có thể coi là bài toán dễ đối với học sinh. Cũng như bài toán 1, cái hay của bài toán 2 là ở cách khai thác bài toán. Từ một bài toán đơn giản sau mỗi lần khai thác ta lại có bài toán với mức độ khó tăng dần, từ một bài toán có nội dung thuần túy toán học, ta có thể phát biểu được các bài toán mang tính thực tiễn cao, gần gũi với cuộc sống thường ngày, giúp học sinh biết vận dụng các kiến thức toán học vào giải quyết các tình huống thực tế.

Bài toán 3: Cho $x_1, x_2, x_3 > 0; x_1 + x_2 + x_3 = a, a \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{a}{x_1}\right)\left(1 + \frac{a}{x_2}\right)\left(1 + \frac{a}{x_3}\right) \geq 64$.

Trong bài toán 3, có dữ kiện $x_1 + x_2 + x_3 = a$. Ta có thể thay số a ở vế phải của dữ kiện này bởi một số cụ thể nào đó trong tập số tự nhiên, chẳng hạn thay số a bởi số 1 hoặc 2 hoặc 3 ..., ta sẽ có rất nhiều bài toán đặc biệt của bài toán ban đầu chẳng hạn như:

Bài toán 3.1: Cho $x_1, x_2, x_3 > 0; x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right) \geq 64$.

Bài toán 3.2: Cho $x_1, x_2, x_3 > 0; x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{2}{x_1}\right)\left(1 + \frac{2}{x_2}\right)\left(1 + \frac{2}{x_3}\right) \geq 64$.

Từ dữ kiện $x_1 + x_2 + x_3 = a$ trong bài toán 3, nếu thay số a ở vế phải của dữ kiện này bởi số 1 hoặc 2 hoặc 3, ... và thay 3 đối tượng x_1, x_2, x_3 bởi 2 đối tượng x_1, x_2 ta sẽ có nhiều các bài toán đặc biệt khác như:

Bài toán 3.3: Cho $x_1, x_2 > 0; x_1 + x_2 = 1$. Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \geq 9$.

Bài toán 3.4: Cho $x_1, x_2 > 0; x_1 + x_2 = 3$. Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{3}{x_1}\right)\left(1 + \frac{3}{x_2}\right) \geq 9$.

Ngoài ra, trong bài 3.3 có hai đối tượng là x_1, x_2 . Nếu thay hai đối tượng x_1, x_2 bởi hai đối tượng khác là $a + b$ và $c + d$ ta sẽ bài toán 3.5; hoặc nếu thay hai đối tượng x_1, x_2 bởi hai đối tượng khác là ab và cd ta sẽ có bài toán 3.6 như sau:

Bài toán 3.5: Cho $a, b, c, d > 0; a + b + c + d = 1$.

Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{a+b}\right)\left(1 + \frac{1}{c+d}\right) \geq 9$.

Bài toán 3.6: Cho $a, b, c, d > 0; ab + cd = 1$. Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{ab}\right)\left(1 + \frac{1}{cd}\right) \geq 9$.

Nếu từ dữ kiện $x_1 + x_2 = 1$ trong bài 3.3, ta thay số 1 bởi một số khái quát a , ta sẽ có bài toán khái quát như sau:

Bài toán 3.7: Cho $x_1, x_2 > 0; x_1 + x_2 = a$. Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{a}{x_1}\right)\left(1 + \frac{a}{x_2}\right) \geq 9$.

Nếu ta thay hai đối tượng x_1, x_2 trong bài 3.3 bởi 4 đối tượng hoặc 5 đối tượng ... hoặc n đối tượng, ta sẽ có các bài toán tương tự hoặc bài toán khái quát như sau:

Bài toán 3.8: Cho $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right)\left(1 + \frac{1}{x_4}\right) \geq 625$.

Bài toán 3.9: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Chứng minh rằng $\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geq (n+1)^n$.

Từ ba đối tượng x_1, x_2, x_3 trong bài toán 3, ta khái quát lên cho n đối tượng ta sẽ có bài toán khái quát:

Bài toán 3.10: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0; x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$.

Chứng minh rằng $\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a}{x_i}\right) \geq (n+1)^n$

Cứ tiếp tục như vậy việc khai thác bài toán 3 sẽ cho ta rất nhiều các bài toán đặc biệt, bài toán tương tự và bài toán khái quát khác nhau. Có thể nói, khai thác bài toán 3 ngoài việc củng cố các kiến thức về bất đẳng thức thì các suy luận tương tự, suy luận khái quát hóa, đặc biệt hóa được rèn luyện rất rõ nét.

Bài toán 4: Cho tứ giác BMNC có $BM = CN$. Hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC. Hai đường thẳng IJ và BM cắt nhau tại P, hai đường thẳng IJ và CN cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng $\widehat{BPJ} = \widehat{CQJ}$.

Nếu thay đổi hình thức phát biểu hoặc thay đổi câu hỏi của bài toán ban đầu, ta sẽ có các bài toán tương tự sau:

Bài toán 4.1: Cho tứ giác có một cặp cạnh đối diện bằng nhau. Chứng minh rằng hai cạnh này nghiêng đều trên đường thẳng nối trung điểm hai cạnh còn lại.

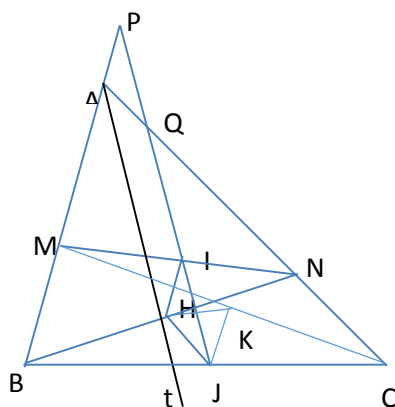
Bài toán 4.2: Cho tứ giác BMNC có $BM = CN$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC. Đường thẳng IJ cắt BM và CN lần lượt tại P và Q. Gọi A là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng A nằm trên đường trung trực của PQ.

Bài toán 4.3: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = CN$. Hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh rằng góc tạo bởi hai đường thẳng IJ và AB bằng góc tạo bởi hai đường thẳng IJ và AC.

Bài toán 4.4: Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, lấy theo thứ tự các điểm M và N trên các đoạn BA và CA sao cho $BM = CN$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC, đường thẳng qua IJ cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $\widehat{BPJ} = \widehat{CQJ}$.

Bài toán 4.5: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = CN$. Hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC. Hai đường thẳng IJ và AB cắt nhau tại P, hai đường thẳng IJ và AC cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng tam giác APQ cân tại A.

Bài toán 4.6: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = CN$. Các điểm I, J, H, K lần lượt là trung điểm của MN, BC, BN và CM. Chứng minh rằng IJ vuông góc với HK.



Hướng dẫn:

+ Ta có HJ song song và bằng một nửa CN, KJ song song và bằng một nửa BM, và BM = CN. Cho nên HJ = KJ; $\widehat{IJH} = \widehat{CQJ}$, $\widehat{IJK} = \widehat{BPJ}$. (1)

+ Mặt khác, theo bài 4 ta có $\widehat{CQJ} = \widehat{BPJ}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác JHK cân tại J và $\widehat{IJH} = \widehat{IJK}$. Nghĩa là, IJ vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác JHK. Vậy $IJ \perp HK$.

Bài toán 4.7: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho BM = CN. Hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh rằng IJ song song với đường phân giác trong của góc A (hoặc chứng minh rằng đường thẳng IJ tạo với BC một góc không đổi, hoặc tính $\widehat{IJB}$ biết góc A và B của tam giác ABC).

Hướng dẫn: Gọi At là phân giác trong của góc A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{BAC} &= \widehat{BPJ} + \widehat{AQP} \text{ (góc ngoài)} \\ &= 2\widehat{BPJ} \text{ (theo bài 4 ta có } \widehat{BPJ} = \widehat{CQJ} = \widehat{AQP}) \end{aligned}$$

Mà $\widehat{BAC} = 2\widehat{BAAt}$ nên $\widehat{BPJ} = \widehat{BAAt}$. Vậy $IJ \parallel At$.

Bài toán 4.8: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho BM = CN. Hai điểm H, K lần lượt là trung điểm của BN và CM. Chứng minh rằng HK vuông góc với đường phân giác trong của góc A.

Hướng dẫn: Suy ra từ bài 4.6 và 4.7.

Bài toán 4.9: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho BM = CN. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Hướng dẫn:

- Phần thuận:

+ Có $\widehat{BAC} = \widehat{BPJ} + \widehat{AQP}$ (góc ngoài) mà $\widehat{BPJ} = \widehat{CQJ} = \widehat{AQP}$ (theo bài 4)

Nên $\widehat{BAC} = 2\widehat{BPJ}$.

+ Gọi J là trung điểm của BC,

Ta có $\widehat{PJB} = 180^\circ - \widehat{PBJ} - \widehat{BPJ} = 180^\circ - \widehat{PBJ} - \frac{\widehat{BPJ}}{2} = \alpha$ - không đổi.

Vậy I thuộc đoạn thẳng JQ đi qua J tạo với BC góc không đổi α và cắt AC tại Q.

- Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn JQ. Phải chứng minh tồn tại 2 điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho I là trung điểm của MN và BM = CN.

Thật vậy:

+ Từ I kẻ đường thẳng song song với AB, từ J kẻ đường thẳng song song với AC, 2 đường thẳng này cắt nhau tại H. Kéo dài BH cắt AC tại N. Kéo dài NI cắt AB tại M.

+ Do $HJ \parallel NC$, mà J là trung điểm của BC nên H là trung điểm của BN . Do $HI \parallel BM$, mà H là trung điểm của BN nên I là trung điểm của MN .

+ Do điểm I bất kỳ thuộc đoạn JQ nên $\widehat{PJB} = 180^\circ - \widehat{PBJ} - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Mà $\widehat{PJB} = 180^\circ - \widehat{PBJ} - \widehat{BPJ}$ nên $\widehat{PBJ} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Ta lại có $\widehat{BAC} = \widehat{BPJ} + \widehat{AQP}$ (góc ngoài) nên $\widehat{BPJ} = \widehat{AQP}$.

Mặt khác $\widehat{BPJ} = \widehat{HIJ}$, $\widehat{AQP} = \widehat{JQC} = \widehat{HJI}$. Do đó $\widehat{HIJ} = \widehat{HJI}$, $HI = HJ$.

Lại có $HI = \frac{1}{2}BM$, $HJ = \frac{1}{2}CN \Rightarrow BM = CN$.

Bài toán 4.10: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua điểm chính giữa cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (hoặc chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua điểm cố định).

Thay một phần của giả thiết bởi kết luận và ngược lại ta có các bài toán ngược sau:

Bài toán 4.11: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC ; I, J lần lượt là trung điểm của MN và BC sao cho góc tạo bởi hai đường thẳng IJ và AB bằng góc tạo bởi hai đường thẳng IJ và AC . Chứng minh rằng $BM = CN$.

Hướng dẫn: Gọi H là trung điểm của BN . Khi đó HI và HJ là các đường trung bình của tam giác BMN và BCN nên HI song song và bằng một nửa BM ; HJ song song và bằng một nửa CN và $\widehat{HJI} = \widehat{CQJ}$; $\widehat{HIJ} = \widehat{BPJ}$. Cho nên $\widehat{HIJ} = \widehat{HJI}$. Ta thu được $HJ = HI \Rightarrow BM = CN$.

Bài toán 4.12: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $BM = CN$. J là trung điểm BC , điểm I thuộc đoạn MN sao cho góc tạo bởi hai đường thẳng IJ và AB bằng góc tạo bởi hai đường thẳng IJ và AC . Chứng minh rằng I là trung điểm của MN .

Hướng dẫn:

+ Gọi I', H, K là trung điểm của MN, BN và CM . Theo bài 4.6 ta có $JI' \perp HK$ (1).

+ Ta có HJ song song và bằng một nửa CN , KJ song song và bằng một nửa BM và $BM = CN$. Cho nên $HJ = KJ$ hay $\triangle JHK$ cân tại J .

+ Có $\widehat{HJI} = \widehat{CQJ}$; $\widehat{KJI} = \widehat{BPJ}$ mà $\widehat{CQJ} = \widehat{BPJ}$ nên thu được $\widehat{HJI} = \widehat{KJI}$. Tam giác JHK cân tại J có $\widehat{HJI} = \widehat{KJI}$ nên IJ vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác JHK . Vậy $JI \perp HK$ (2).

+ Từ (1) và (2) ta có $I \equiv I'$. Vậy I là trung điểm của MN .

Bài toán 4 có thể coi là bài toán hay và khó đối với học sinh. Việc khai thác bài toán này thú vị bởi có thể sáng tạo được nhiều bài toán liên quan đến nhiều kiến thức hình học, nhiều dạng toán hình học như: Các kiến thức về trung điểm đoạn thẳng, đường trung trực, đường trung bình trong tam giác, tam giác cân, tính chất của tam giác cân, tổng các góc trong tam giác, góc ngoài của tam giác, đường thẳng vuông

góc, đường thẳng song song, cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị; Các dạng toán về chứng minh, dạng toán tính toán, dạng toán quỹ tích.

3. Kết luận

Như đã biết, trong các kỳ thi tuyển giáo viên toán phổ thông, có một số dạng câu hỏi được đặt ra là giải bài toán, trình bày cách giải khác của bài toán, phát biểu bài toán tương tự với bài toán đã cho, ... Như vậy, biết cách khai thác bài tập toán để tìm ra nhiều lời giải cho một bài toán và sáng tạo ra các bài toán mới là một trong những tiêu chí đánh giá năng lực của mỗi giáo viên. Việc vận dụng lý luận vào khai thác bốn bài toán cụ thể đã làm rõ nét hơn vai trò của việc khai thác bài toán được trình bày ở trên. Để mỗi sinh viên thấy được vai trò của việc khai thác bài tập toán, khắc phục những hạn chế đã nêu khi khai thác bài tập toán, ngoài việc trang bị cho sinh viên những kiến thức lý luận về khai thác bài tập toán, giảng viên cần khuyến khích, tạo điều kiện để sinh viên được thường xuyên khai thác bài tập toán, được khai thác các bài toán một cách đa dạng từ những bài toán đơn giản đến những bài toán phức tạp, từ những bài toán có nội dung toán học đến những bài toán có nội dung thực tế, ... Bởi khai thác bài toán sẽ giúp cho giáo viên được rèn luyện các thao tác tư duy, bồi dưỡng chuyên môn, nghiệp vụ, giúp cho giáo viên tự tin, sáng tạo khi đứng trên bục giảng. Nội dung bài báo đã cho thấy ý nghĩa của việc khai thác bài toán, các cách thông dụng khai thác bài toán và vận dụng vào khai thác các bài toán cụ thể trong chương trình toán phổ thông. Kết quả của bài báo có thể làm tài liệu tham khảo cho các giáo viên dạy toán phổ thông, sinh viên sư phạm toán, học sinh phổ thông và những người yêu thích toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Hữu Điền (2002), *Sáng tạo trong giải toán phổ thông*, nhà xuất bản Giáo dục.
2. Nguyễn Bá Kim (2015), *Phương pháp dạy học môn Toán*, nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội.
3. G.Polya (1997), *Sáng tạo toán học*, nhà xuất bản Giáo dục.
4. Phạm Đình Thực (1999), *Phương pháp sáng tác đề toán ở tiểu học*, nhà xuất bản Giáo dục.

MỘT NGHIÊN CỨU VỀ VẬN DỤNG QUY TRÌNH NGHIÊN CỨU BÀI HỌC TRONG VIỆC PHÁT TRIỂN NGHIỆP VỤ SƯ PHẠM CHO GIÁO VIÊN

Hoa Ánh Tường, Nguyễn Hữu Hậu***

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày và phân tích về chương trình đào tạo Sư phạm Toán của khoa Toán - Ứng dụng trường Đại học Sài Gòn liên quan đến hoạt động thực hành nghiệp vụ cho sinh viên. Sau đó, chúng tôi trình bày mô hình nghiên cứu bài học tác động đến nghiệp vụ của giáo viên trong dạy học Toán. Tiếp theo, chúng tôi phân tích những thuận lợi và khó khăn khi áp dụng mô hình nghiên cứu bài học trong thực tiễn dạy học ở trường phổ thông. Một ví dụ minh họa về áp dụng mô hình nghiên cứu bài học chủ trọng đến thực hành dạy học của giáo viên trên lớp học được đề cập. Từ đó, chúng tôi nêu lên một số quan điểm để trả lời cho câu hỏi “Cơ sở để giáo viên đưa ra các quyết định trong quá trình dạy học của họ?” qua đó tác động ngược đến quá trình đào tạo nghề cho sinh viên Sư phạm Toán.

Từ khóa: nghiên cứu bài học, nghiệp vụ sư phạm, định lý Pythagore.

Abstract

In this paper, we not only present but also analyze process of training teacher which is paid attention to professional practice and implemented in Faculty of Mathematics - Application of Saigon University. Then, we present lesson study model which impacts on professional activities of teacher. We analyze the advantages and disadvantages when applied this model in realistic context. An example which is illustrated the application of the lesson study model in the classroom will be discussed. Then, we give some proposals to answer the question "Which logical decisions are taken by teacher in their teaching process?" which impact to process of training Mathematics teacher.

Keyword: lesson study, professional activities, Pythagorean Theorem.

1. Mở đầu

Ở trường phổ thông, việc dự giờ trước đây thường chú ý đến hoạt động dạy của giáo viên (GV), tập trung vào đánh giá GV, đôi khi GV dạy trở thành mục tiêu bị phân tích, mổ xẻ các thiếu sót. Còn việc sinh hoạt chuyên môn theo cách nghiên cứu bài học lại là cơ hội để đồng nghiệp được học hỏi lẫn nhau trên cơ sở các giáo viên cùng nhau nghiên cứu và chia sẻ về bài học, trải nghiệm thực sự của những người tham gia dự giờ thông qua quá trình quan sát lớp học. Giảng viên đại học khi tham gia vào quy trình này sẽ phân nào nhận thức được tính hiệu quả của bài học. Kết quả của hoạt động này được lưu lại làm tư liệu để giảng viên sử dụng trong các học phần liên quan đến kiến thức nghiệp vụ sư phạm cho sinh viên.

2. Nội dung

2.1. Học phần liên quan đến nghiệp vụ của sinh viên ở trường Đại học Sài Gòn

Trong phần này, chúng tôi nêu ra các học phần trong chương trình đào tạo cử nhân sư phạm toán trường Đại học Sài Gòn liên quan đến nghiệp vụ của sinh viên.

* TS, Khoa Toán-Ứng dụng, Đại học Sài Gòn

** TS, Đại học Hồng Đức

Các học phần liên quan đến kiến thức chung và kiến thức chuyên sâu: 18 tín chỉ

STT	Học phần	Số tín chỉ
1	Lý luận dạy học môn Toán	3
2	Phương pháp dạy học 1	3
3	Phương pháp dạy học 2	4
4	Đại số sơ cấp và thực hành giải toán (THPT)	3
5	Bài tập Đại số sơ cấp và thực hành giải toán (THPT)	1
6	Hình học sơ cấp và thực hành giải toán (THPT)	3
7	Bài tập Hình học sơ cấp và thực hành giải toán (THPT)	1

Các học phần liên quan đến kiến thức nghiệp vụ sư phạm: 16 tín chỉ

STT	Học phần	Số tín chỉ
1	Tâm lý học (TLH) đại cương	2
2	TLH lứa tuổi THPT và TLH sư phạm	2
3	Giáo dục học đại cương	2
4	Tổ chức HĐ dạy học và giáo dục ở trường THPT	3
5	Phương pháp nghiên cứu khoa học giáo dục	2
6	Thực hành sư phạm 1 (THPT)	1
7	Thực hành sư phạm 2 (THPT)	1
8	Thực hành sư phạm 3 (THPT)	1
9	Thực hành sư phạm 4 (THPT)	1
10	Thực hành sư phạm 5 (THPT)	1

Thực tập chuyên môn, nghiệp vụ, thực tập cuối khóa/thực tập tốt nghiệp: 9 tín chỉ

STT	Học phần	Số tín chỉ
1	Thực tập sư phạm 1	3
2	Thực tập sư phạm 2	6

Khoá luận tốt nghiệp/các học phần thay thế: sinh viên chọn trong các môn học để tích lũy đủ 10 tín chỉ.

STT	Học phần	Số tín chỉ
1	Ứng dụng phép biến hình trong giải toán hình học phẳng	2
2	Các phần mềm toán học	2
3	Đổi mới PPDH môn toán ở trường THPT	2
4	Dạy học sinh THPT tự tiếp cận kiến thức toán	2
5	Lý thuyết trò chơi	2
6	Đo lường đánh giá kết quả học tập	1
7	Lịch sử toán	2
8	Seminar	3

Chương trình đào tạo Cử nhân Đại học Sư phạm Toán được thiết kế với tổng khối lượng là 151 tín chỉ. Tóm lược mục tiêu các học phần: Trang bị cho sinh viên Đại học Sư phạm Toán các kiến thức cơ bản về và rèn kỹ năng giải toán để giảng dạy tốt ở trường THPT. Chuẩn bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản về hệ thống quản lý của

trường trung học phổ thông, các kỹ năng sư phạm trong công tác chủ nhiệm, hoạt động chuyên môn và kỹ năng giao tiếp sư phạm trong trường trung học phổ thông. Giúp sinh viên có tổng quan về chương trình Toán THPT và rèn luyện khả năng giải quyết các bài tập toán liên quan. Trang bị cho sinh viên cơ sở lý luận và các quan điểm cơ bản của Lý luận dạy học môn Toán để ứng dụng vào việc dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông. Cung cấp sinh viên các quan điểm và cơ sở lý luận của một số phương pháp hiện đại dạy học môn Toán trong việc bồi dưỡng phương pháp tự học môn Toán của học sinh phổ thông; kiến thức cơ bản về lịch sử toán học. Sinh viên nắm được một số vấn đề cơ bản về lý luận và dạy học toán ở trường THPT theo hướng sáng tạo; yêu cầu nghề dạy học toán và có ý thức nâng cao nghiệp vụ sư phạm.

Như vậy, tổng số tín chỉ các môn học liên quan đến nghiệp vụ sư phạm của sinh viên trường Đại học Sài Gòn là 53 tín chỉ, chiếm tỉ lệ 35%. Ngoài ra, trong chương trình đào tạo cũng chú trọng cho các em sinh viên được đi thực tế tại trường Trung học Thực hành Sài Gòn để được quan sát lớp học, dự giờ giáo viên để học tập kinh nghiệm, để được trải nghiệm thực tế.

2.2. Nghiên cứu bài học

Nghiên cứu bài học (NCBH): là một hình thức phát triển nghiệp vụ sư phạm lâu dài được định hướng bởi giáo viên (GV) đứng lớp nhằm giúp GV phát triển thói quen về việc tự phản ánh và cải tiến phương pháp dạy học thông qua nỗ lực hợp tác với đồng nghiệp (Nguyễn Thị Duyên, 2013). Các giáo viên hợp tác làm việc với nhau về một số “bài học nghiên cứu” bao gồm: lên kế hoạch bài học, hoạt động dạy học, kiểm tra và thảo luận về những gì họ quan sát được về thể hiện việc học toán của học sinh.

Bài học nghiên cứu: là bài học được nhóm nghiên cứu (gồm các GV tham gia vào quy trình của NCBH) lựa chọn để khám phá chủ đề nghiên cứu.

2.2.1. Các bước trong quy trình nghiên cứu bài học

Quy trình nghiên cứu bài học có nhiều biến thể khác nhau nhưng về cơ bản gồm ba bước chính là (1) xác định chủ đề nghiên cứu, (2) thực hiện một số bài học nhằm khám phá chủ đề nghiên cứu và (3) chia sẻ kết quả và viết báo cáo (Hoa Ánh Tường, 2014, trang 53).

Bước (1): Xác định chủ đề nghiên cứu.

- Được thực hiện khi bắt đầu một quy trình NCBH.
- Chủ đề nghiên cứu liên quan đến những thảo luận ban đầu của nhóm nghiên cứu (NNC) chủ yếu dựa trên những thông tin phản hồi có giá trị về chất lượng học tập của học sinh (HS) và việc dạy học của GV, hoặc những điều mà GV gặp phải từ kinh nghiệm dạy học trước đây, các sai lầm và yếu kém của HS hay một số vấn đề mà GV thấy khó dạy hoặc các em khó tiếp thu.
- Các thành viên trong nhóm sẽ quyết định chọn một chủ đề nghiên cứu nhằm khắc phục những vấn đề đó. Trong thời gian nghiên cứu, các thành viên trong nhóm có các ý tưởng về việc dạy học để đưa ra được những thực hành dạy học có giá trị.

Bước (2): Thực hiện một số bài học nhằm khám phá chủ đề nghiên cứu

– **Lên kế hoạch bài học:** Người chuẩn bị giờ dạy minh họa là giáo viên được phân công hoặc một nhóm GV. Sau khi dự kiến giáo án sẽ được trao đổi với toàn thể đồng nghiệp trong nhóm. Giáo án thể hiện nội dung: đầy đủ, chính xác, khoa học, logic, có tính phân hóa; tiến trình các hoạt động của giáo viên và học sinh rõ ràng, dự kiến sử dụng phương pháp, hình thức tổ chức dạy học, thiết bị dạy học phù hợp với nội dung bài học, điều kiện của địa phương, dự kiến được thời gian cho các hoạt động.

– **Dạy và quan sát bài học:** Người tiến hành giờ dạy minh họa là một GV tự nguyện hoặc người được nhóm thiết kế lựa chọn. Người dạy cần quan tâm đến tất cả các HS, không dạy trước hoặc huấn luyện trước cho HS về nội dung bài học. Người quan sát: ghi lại các hoạt động của HS trong giờ học. Vị trí quan sát: phía trước hoặc hai bên lớp học, không ngồi sau HS vì không quan sát được việc học của HS. Kỹ thuật: kết hợp nghe, nhìn, suy nghĩ, ghi chép, quay phim, chụp ảnh... để nhằm trả lời các câu hỏi: HS học như thế nào? HS gặp những khó khăn gì? Vì sao? Cần phải thay đổi như thế nào để cải thiện kết quả học tập của HS?

– **Thảo luận và phản ánh về giờ dạy minh họa:** Nội dung thảo luận và suy ngẫm:

- + Học sinh có hiểu rõ nhiệm vụ, chủ động trong các hoạt động học tập.
- + Học sinh được tiếp cận các câu hỏi/bài tập có tính phân hóa, kích thích tư duy, tích cực hóa hoạt động học tập.
- + Học sinh tham gia nhận xét đánh giá lẫn nhau trong giờ học về những sai sót về kiến thức, kỹ năng.
- + Học sinh phát huy khả năng tự học.
- + Học sinh vận dụng được kiến thức, kỹ năng vào tình huống cụ thể, biết liên hệ kiến thức đã học vào thực tế.

– **Chỉnh sửa kế hoạch bài học:** Dựa vào nội dung của buổi thảo luận, NNC sẽ tiến hành chỉnh sửa kế hoạch bài học. Các thành viên trong nhóm sẽ cùng nhau trao đổi, tìm cách chỉnh sửa giáo án và chuẩn bị mọi thứ cho lần dạy tiếp theo.

– **Dạy, quan sát và phản ánh về bài học đã được chỉnh sửa.**

Bước (3): Chia sẻ kết quả và viết báo cáo.

Để tổng kết các hoạt động và thành quả của nhóm nghiên cứu đồng thời lưu trữ tư liệu để sử dụng trong tương lai, nhà trường thường biên soạn và xuất bản các kế hoạch bài học cùng với những dữ liệu quan sát và biên bản thảo luận về các bài học nghiên cứu.

2.2.2. Các thuận lợi khi tiến hành “Nghiên cứu bài học”

- Tạo cơ hội cho GV phát triển năng lực chuyên môn, phát huy khả năng sáng tạo của mình, kết nối lý thuyết với thực hành, ...
- Đảm bảo tất cả HS tham gia quá trình học tập.

- Bài dạy minh họa do nhóm GV thiết kế không phụ thuộc một cách máy móc vào quy trình, các bước dạy học trong SGK, SGV. Nhóm có thể điều chỉnh nội dung, thời lượng, phương pháp dạy học, kỹ thuật dạy học, ...cho phù hợp với yêu cầu tiết dạy và đối tượng HS.

- Rút kinh nghiệm cho bản thân sau dự giờ để điều chỉnh nội dung, cách dạy học phù hợp với học sinh của mình.

- Không đánh giá, xếp loại người dạy (nếu kết quả không như mong muốn) thì xem đó là bài học chung để mỗi GV tự rút kinh nghiệm.

2.2.3. Các khó khăn khi tiến hành “Nghiên cứu bài học”

Trong phần này, chúng tôi đề cập đến các khó khăn có được từ kinh nghiệm tiến hành “Nghiên cứu bài học”.

Giáo viên:

- Chưa biết cách quan sát học sinh học, ghi chép, lắng nghe, phản hồi, thảo luận.
- Mất nhiều thời gian cho soạn bài học nghiên cứu (vì phải chỉnh sửa nhiều lần sau mỗi lần thảo luận).
- Không thể quan sát hết thái độ, hành động, sai sót từng HS.
- Một số GV chưa thực sự hợp tác cùng nhau xây dựng bài học.
- Bị nhiều áp lực: Số tiết chuẩn dạy học, chấm bài kiểm tra, công tác kiêm nhiệm (chủ nhiệm, phụ đạo học sinh yếu, bồi dưỡng học sinh giỏi, ...), ...

Học sinh:

- Trình độ không đều.
- Thái độ học tập, việc yêu thích bộ môn, ...

Chương trình: Quá tải với học sinh, nội dung còn mang nặng lý thuyết, chưa gắn kết môn học với thực tế cuộc sống... Thời gian các lớp học gần nhau nên giáo viên không có điều kiện thực hiện bài học trong cùng một năm học mà phải chờ đến năm học sau. Nhưng nếu năm học sau giáo viên không dạy khối lớp đó thì không có cơ hội để dạy và chỉnh sửa bài học nghiên cứu.

Cơ sở vật chất: Lớp học đông, khó bố trí chỗ ngồi cho người dự.

2.3. Ví dụ minh họa

Chúng tôi minh họa ví dụ bài dạy định lý Pythagore (toán lớp 7) thể hiện ở bước (2) của quy trình nghiên cứu bài học thông qua 3 hoạt động: lên kế hoạch bài học; dạy và quan sát bài học; thảo luận và phản ánh. Từ thực tế dạy học, chúng tôi không đề cập hoạt động chỉnh sửa bài học sau khi tiến hành dạy và quan sát lớp học mà chỉ đề cập chỉnh sửa kế hoạch bài học thông qua các buổi thảo luận để hoàn thành bước lên kế hoạch bài học.

Chúng tôi đã tiến hành họp nhóm thảo luận bài dạy. Qua 5 lần thảo luận: lần 1 vào ngày 28/10/2014; lần 2 vào 11/11/2014; lần 3 vào 9/12/2014; lần 4 vào 6/1/2015; lần 5 vào ngày 20/1/2015, sau khi dạy và đóng góp thảo luận ý kiến.

i) Lên kế hoạch bài học

Trong các lần thảo luận, nhóm thảo luận thiết kế tiến trình nội dung bài học, chú trọng đến cách đặt vấn đề bài học, hệ thống câu hỏi, các hoạt động để phát huy năng lực vẽ hình, tính toán, suy luận, giải thích, làm việc theo nhóm nhỏ, trình bày lời giải bài toán bằng ngôn ngữ nói và viết, vận dụng kiến thức vào giải quyết các vấn đề.

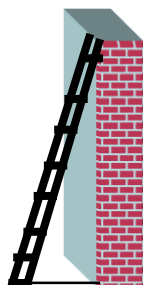
Hoạt động 1: Định lý Pythagore

– Nhằm tạo sự chú ý cho HS về nội dung của bài học để giúp giải quyết tình huống mô phỏng thực tiễn, chúng tôi thiết kế hoạt động đặt vấn đề như sau:

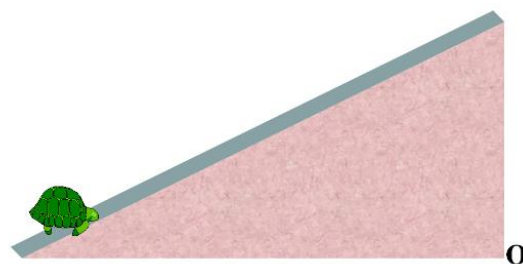
– BT1: Tính chiều cao của bức tường. Biết chiều dài của thang là 4m và chân thang cách tường 1m (xem hình 2a).

– BT2: Rùa sẽ phải bò một quãng đường bao xa để lên được đỉnh dốc. Biết đỉnh dốc cách điểm O là 6 m, chân dốc cách điểm O là 8m (xem hình 2b).

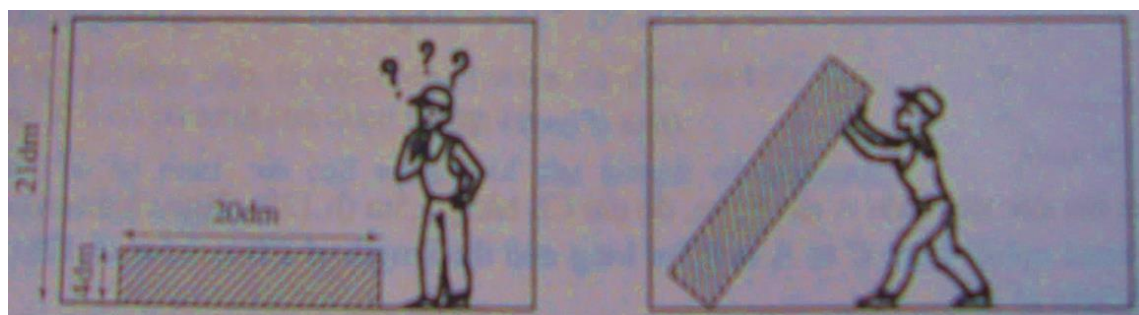
– BT3: Trong lúc anh Nam dựng tủ cho thẳng, tủ có bị vương vào trần nhà không? (xem hình 2c).



Hình 2a



Hình 2b



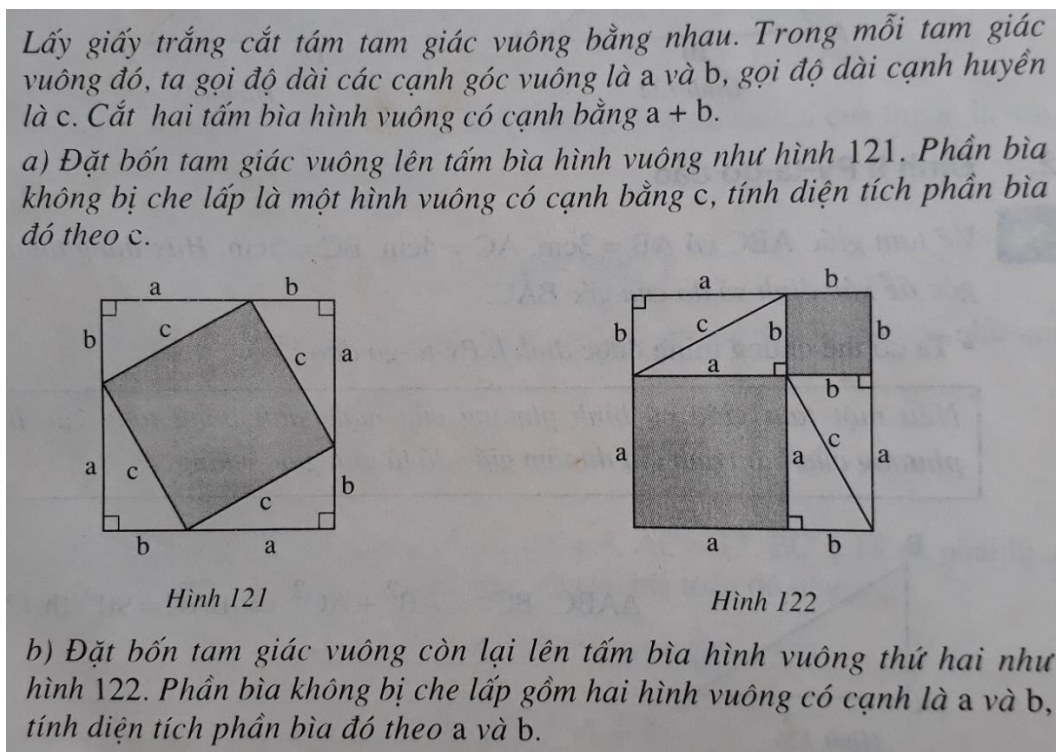
Hình 2c

– Nhằm giúp HS nhớ kiến thức cũ (khi cho trước một tam giác vuông, phải xác định được cạnh góc vuông, cạnh huyền) và tiếp cận được bài học mới (phát hiện mối liên hệ về độ dài các cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông), chúng tôi thiết kế hoạt động kiểm tra bài cũ như sau:

Câu 1: Nêu định nghĩa tam giác vuông? Kể tên các cạnh góc vuông, cạnh huyền trong tam giác vuông sau?

Câu 2: Vẽ một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt là 3cm và 4 cm. Đo độ dài cạnh huyền.

– Nhằm giúp cho HS rút ra nội dung định lý Pythagore, chúng tôi yêu cầu HS trả lời câu hỏi 2 phần kiểm tra bài cũ và hoạt động ghép hình (hoạt động sách giáo khoa toán lớp 7 tập 2 trang 129, xem hình 3) để phát hiện mối liên hệ về độ dài các cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông.



Hình 3. Hoạt động sách giáo khoa toán lớp 7 tập 2 trang 129

– Nhằm củng cố cho HS về định lý Pythagore, chúng tôi yêu cầu HS viết được đẳng thức mối liên hệ về độ dài các cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông khi ΔABC vuông tại A (có hình vẽ), ΔPQR vuông tại Q (không có hình vẽ), HS giải [?] trang 130.

Hoạt động 2: Định lý Pythagore đảo

– Nhằm giúp cho HS rút ra định lý Pythagore đảo, chúng tôi cho HS thực hiện hoạt động “Vẽ ΔABC , $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Dùng thước đo góc xác định số đo của góc BAC . Tính rồi so sánh BC^2 và $AB^2 + AC^2$ ” và sau đó yêu cầu HS trả lời câu hỏi “Tam giác ABC có bình phương độ dài một cạnh bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh kia, khi đó tam giác ABC là tam giác gì?”

– Nhằm củng cố định lý Pythagore đảo: HS dựa vào đẳng thức mối liên hệ về độ dài các cạnh để khẳng định một tam giác đã cho có là tam giác vuông không như sau:

1) ΔRST có $SR^2 + ST^2 = RT^2$, áp dụng định lý

Pythagore đảo suy ra ΔRST là ...

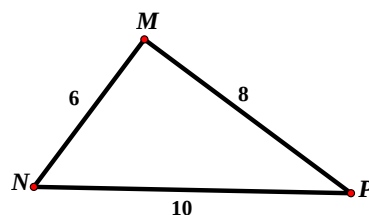
2) Xét tam giác MNP có (xem hình 4):

$$NP^2 = \dots$$

$$MN^2 + MP^2 = \dots$$

Vậy $NP^2 \dots MN^2 + MP^2$, áp dụng định lý

Pythagore đảo suy ra ΔMNP là ...



Hình 4

3) ΔRST có $SR^2 + ST^2 = RT^2$, áp dụng định lý Pythagore đảo suy ra ΔRST là ...

4) Xét tam giác MNP có (xem hình 4):

$$NP^2 = \dots$$

$$MN^2 + MP^2 = \dots$$

Vậy $NP^2 \dots MN^2 + MP^2$, áp dụng định lý Pythagore đảo suy ra ΔMNP là ...

5) HS giải bài tập 57 trang 131 theo nhóm nhỏ.

“Cho bài toán: “Tam giác ABC có $AB = 8$, $AC = 17$, $BC = 15$ có phải là tam giác vuông hay không?”. Bạn Tâm đã giải bài toán như sau:

$$AB^2 + AC^2 = 8^2 + 17^2 = 64 + 289 = 353; BC^2 = 15^2 = 225.$$

Do $353 \neq 225$ nên $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$.

Vậy tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

Lời giải trên đúng hay sai? Nếu sai, hãy sửa lại cho đúng.”

Hoạt động 3: Củng cố

1) HS điền vào chỗ ...

Định lý Pythagore: ΔABC vuông tại $A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

Định lý Pythagore đảo: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

2) HS nêu ứng dụng của bài học (vận dụng định lý Pythagore để tính độ dài một cạnh của tam giác vuông khi biết độ dài của hai cạnh kia. Vận dụng định lý Pythagore đảo để nhận biết một tam giác là tam giác vuông).

3) HS giải quyết các bài toán thực tế GV đặt vấn đề đầu giờ.

ii) Dạy và quan sát bài học

Có 6 giáo viên cùng nhau làm việc. Trong đó cô Nguyễn Ngọc Thùy Trinh thay mặt nhóm dạy tại lớp 7A6 vào sáng thứ ba, ngày 20/1/2015. Cũng trong ngày đó, có 40 giáo viên toán trong quận 5 đến dự giờ.

iii) Thảo luận và phản ánh

*** Hiệu quả của giờ dạy**

Từ quan sát, ghi chép, quay phim lớp học, đánh giá của tập thể giáo viên dự giờ trong quận, chúng tôi có một số thảo luận như sau:

- Tiết học đảm bảo mục tiêu của giáo án do nhóm đề ra.
- HS hiểu rõ nhiệm vụ và chủ động trong các hoạt động học tập, cụ thể:
 - + Kỹ năng vẽ hình của HS trở nên thành thạo hơn;
 - + HS biết sử dụng máy tính bỏ túi để tính toán;
 - + HS cẩn thận khi làm toán, chẳng hạn trước tiên HS phải xác định cạnh huyền (đối diện góc vuông hoặc cạnh dài nhất) từ đó viết đúng biểu thức về mối liên hệ

giữa cạnh huyền và hai cạnh góc vuông (bình phương độ dài của cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài của hai cạnh góc vuông) rồi giải toán;

+ HS có khả năng diễn đạt, suy luận (chẳng hạn, khi giải bài tập 57 trang 131, HS nêu lên được quan điểm “Phải so sánh bình phương độ dài của cạnh lớn nhất với tổng các bình phương của hai cạnh kia”), giải thích và vận dụng (chẳng hạn, HS biết giải thích vận dụng định lý Pythagore đảo để nhận biết một tam giác là tam giác vuông);

+ Hoạt động tương tác giữa GV và HS hợp lý. Tuy nhiên, trong hoạt động ghép hình, HS lúng túng và còn mất khá nhiều thời gian do HS không quen thao tác trên các giấy bìa cứng và giấy decal.

– HS trả lời được các câu hỏi có tính phân hóa, kích thích tư duy (chẳng hạn, nếu biết một tam giác vuông, HS không cần vẽ hình mà vẫn đọc và viết đúng được biểu thức về mối liên hệ độ dài giữa cạnh huyền và hai cạnh góc vuông).

– HS có tích cực tương tác với nhau, hỗ trợ nhau trong quá trình học tập để hoàn thành các nhiệm vụ được giao.

– HS vận dụng được kiến thức, kỹ năng vào giải tình huống mô phỏng thực tế.

*** Vấn đề góp ý bổ sung**

Các GV chú ý kỹ đến các thiếu sót hoặc những chi tiết nhỏ, từ đó góp ý bổ sung:

– GV A: Định lý Pythagore: ứng dụng công nghệ thông tin vào bài dạy, chẳng hạn: khi nói đến cạnh huyền (cạnh huyền tô màu đậm) để HS chú ý và phân biệt (cạnh huyền dài nhất trong các cạnh của tam giác vuông) mà từ đó HS khi viết đẳng thức không bị sai (trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền tức là bình phương độ dài cạnh dài nhất bằng tổng các bình phương độ dài của hai cạnh góc vuông).

– GV B: Thiết kế lại phần ghi bảng (không cần ghi bảng quá nhiều), chẳng hạn: định lý Pythagore chỉ cần ghi SGK/130 là được. Nên cho các tam giác có tên gọi khác nhau.

– GV C: Phần tóm tắt kiến thức: chỉ đánh máy một phần, phần còn lại để HS tự viết bổ sung để HS nhớ lý thuyết.

– GV D: Phần thực hành hoạt động ghép hình của HS có thể chọn chất liệu khác (chẳng hạn: nam châm lá) để HS tiến hành nhanh và thuận tiện hơn giấy hoặc decal.

– GV E: Chú ý đến tính xác thuật ngữ, chẳng hạn: bình phương độ dài cạnh huyền thì chính xác hơn là bình phương cạnh huyền.

*** Tác động của tiết dạy minh họa đối với giáo viên**

– GV tham gia thảo luận, góp ý, trao đổi, dự giờ tiết dạy, lắng nghe quan điểm của GV khác, thấy được bối cảnh thực sự của lớp học, tình hình học tập, thái độ, tư duy, năng lực diễn đạt, trình bày của HS...

– GV tự rút kinh nghiệm cho bản thân sau dự giờ để điều chỉnh nội dung, cách dạy học, thiết kế nội dung bài giảng phù hợp với học sinh của mình.

*** Phản hồi cho sinh viên**

Các em có cơ hội tiếp cận tiết dạy học từ tư liệu quay hình của nhóm nghiên cứu. Ngoài ra, khi học các học phần liên quan đến nghiệp vụ sư phạm dưới sự hướng dẫn và phân tích của giảng viên liên quan đến bài học nghiên cứu, các em rút kinh nghiệm cho bản thân sau này ra trường, chẳng hạn:

- Lên kế hoạch bài học phù hợp với tình hình thực tiễn: đối tượng học sinh, cơ sở vật chất, tiến trình dạy học, thiết kế hệ thống hoạt động, tình huống dạy học, sự tương tác giữa GV-HS,...
- Cách tổ chức lớp học để phát huy tính tích cực học tập, năng lực học toán cho học sinh.
- Nhận thức được những sai lầm của học sinh mà có hướng điều chỉnh.

3. Một số đề xuất nhằm nâng cao hiệu quả dạy và học

- Trong mỗi bài học nghiên cứu, các giáo viên cần tập trung chú ý và phân tích các vấn đề liên quan đến người học, phải quan sát học sinh học như thế nào, học sinh đang gặp khó khăn gì, giờ học có ý nghĩa với các em không? Nội dung và phương pháp giảng dạy của giáo viên có phù hợp và gây hứng thú cho học sinh không?
- Chọn lựa bài học nghiên cứu của GV: Tình huống học tập được thiết kế như thế nào? Cố gắng có liên hệ thực tế, liên môn. Nội dung bài học không quá khó, phát huy năng lực học tập học sinh. Thiết kế hệ thống hoạt động cần quan tâm đến những khó khăn của HS, đặc biệt là HS yếu, kém.
- Đội ngũ quản lý cần nhận thức được tầm quan trọng của sinh hoạt chuyên môn theo nghiên cứu bài học tạo điều kiện để giáo viên tham gia nhiều hơn dẫn đến có nhiều sản phẩm về các bài học nghiên cứu, điều này có tác động đến giáo viên, giảng viên, sinh viên: phát triển được nghiệp vụ cho giáo viên; nguồn tài nguyên cho giảng viên trong việc phân tích, giới thiệu bài giảng đến sinh viên; bài học nghiên cứu phản hồi tích cực đến sinh viên trong nghề nghiệp tương lai sau này.
- Giảng viên đại học dạy học các học phần liên quan đến phương pháp dạy học và thực hành sư phạm có thể tham gia vào quy trình nghiên cứu bài học với giáo viên ở trường phổ thông nhằm tích lũy kinh nghiệm thực tế, thấy được bối cảnh thực tế của lớp học từ đó có cơ sở để trao đổi, thảo luận với sinh viên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ giáo dục và đào tạo (2014), *Sách giáo khoa Toán 7, tập 2*, Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam.
2. Nguyễn Thị Duyên (2013), *Nghiên cứu bài học – Một mô hình phát triển năng lực dạy học của giáo viên Toán*, Journal of Science of HNUE, Educational Science - Mathematics, Vol.54, pp 74-84.
3. Hoa Ánh Tường (2014), *Sử dụng nghiên cứu bài học để phát triển năng lực giao tiếp toán học cho học sinh trung học cơ sở*, Luận án Tiến sĩ khoa học Giáo dục, Đại học Sư phạm Tp.HCM.

4. Hoa Ánh Tường (2015), *Một nghiên cứu về hoạt động thực hành nghiệp vụ của giáo viên Toán*, Tạp chí khoa học trường Đại học Sài Gòn, Tập 9, số 34, Trang 45 -54.
5. ISODA Masami, Max Stephens, Yutaka Ohara, Takeshi Miyakawa (2005), *Japanese Lesson Study in Mathematics, Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement*, World Scientific.
6. Lynn C.Hart, Alice Alston, Aki Murata (2011), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics education*, Springer.
7. Makoto Yoshida (2003), “Overview of Lesson Study in Japan”, www.lessonstudy.com

VỀ “THIẾT KẾ CÁC HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC” QUA SÁCH GIÁO KHOA TOÁN LỚP 10 Ở VIỆT NAM VÀ Ở PHÁP

Nguyễn Thành Long*

Tóm tắt

Quan điểm chung về phương pháp dạy học là tổ chức cho học sinh được **học tập trong hoạt động và bằng hoạt động**. Do đó “thiết kế các hoạt động dạy học” là một kỹ năng quan trọng mà người giáo viên toán phổ thông cần phải thuần thục. Trong bài viết này, chúng tôi tóm tắt lại những nội dung liên quan đến lý luận và thực hành về “thiết kế các hoạt động dạy học” trong các giáo trình đào tạo giáo viên toán và trong Didactic Toán. Từ đó chúng tôi phân tích, đánh giá các hoạt động dạy học đã được thiết kế trong của sách giáo khoa toán hiện hành (lớp 10) ở Việt Nam và so sánh, đối chiếu với sách giáo khoa toán tương ứng ở Pháp. Dựa trên cơ sở đó, chúng tôi nêu những tác động đến việc thực hành dạy học toán ở trường phổ thông đồng thời mạnh dạn có những đề xuất.

Abstract

The general perspective on teaching methods is to help students **learn in activities and through activities**. Therefore, “designing teaching activities” is an important skill that a high school math teacher needs to master. In this article, we systematize theorical and practical ideas about “designing teaching activities” in the coursebooks of training math teachers and in Didactic of Mathematics. From that, we analyze and evaluate teaching activities designed in current math textbooks (10th grade) in Vietnam and make a comparison to equivalent math textbooks in France. Based on that foundation, we state some factors that have an effect on the practice of teaching Maths at high schools, and also, make some suggestions.

1. Tóm tắt những lý thuyết về hoạt động dạy học

1.1. Theo giáo trình Phương pháp dạy học môn toán

Quan điểm hoạt động trong dạy học môn toán đã được giới thiệu từ nhiều năm qua trong các giáo trình đào tạo giáo viên toán. Trong bài này chúng tôi trình bày theo tác giả Nguyễn Bá Kim [4].

1.1.1. Quan điểm hoạt động trong dạy học môn toán

Mỗi nội dung dạy học đều liên hệ mật thiết với những hoạt động nhất định. Đó là những hoạt động đã được tiến hành trong quá trình hình thành và vận dụng nội dung đó. Phát hiện được những hoạt động tiềm tàng trong một nội dung là vạch được một con đường để truyền thụ nội dung đó và thực hiện những mục đích dạy học khác, cũng đồng thời là cụ thể hóa được mục đích dạy học nội dung đó và chỉ ra được cách kiểm tra việc thực hiện những mục đích này.

Cho nên điều cơ bản của phương pháp dạy học là khai thác được những hoạt động tiềm tàng trong nội dung để đạt được mục đích dạy học. Khi đó giúp người học con đường chiếm lĩnh nội dung đó và đạt được những mục đích dạy học khác, tức là kết hợp truyền thụ tri thức toán học với truyền đạt tri thức phương pháp.

* ThS, Đại học Thủ Dầu Một

NHỮNG THÀNH PHẦN TÂM LÝ CƠ BẢN CỦA HOẠT ĐỘNG

Động cơ	Lý do thực hiện một hoạt động nào đó.
Hoạt động	Một hoạt động được cấu thành bởi nhiều hoạt động thành phần (hành động, thao tác).
Nội dung	Tri thức cần thiết cho việc tiến hành một hoạt động.
Kết quả	Tri thức đọng lại trong chủ thể sau hoạt động.

Bảng 1.

1.1.2. Nội dung môn toán và hoạt động của học sinh

Nội dung dạy học có mối liên hệ mật thiết với hoạt động của con người. Đó là một biểu hiện của mối liên hệ giữa mục tiêu, nội dung và phương pháp dạy học.

Nội dung môn toán ở trường phổ thông liên hệ mật thiết trước hết là với những dạng hoạt động sau đây :

- nhận dạng và thể hiện (với một định nghĩa, một định lý hay một phương pháp).
- những hoạt động toán học phức hợp (như chứng minh, định nghĩa, giải toán).
- những hoạt động trí tuệ phổ biến trong toán học (như lật ngược vấn đề, phân chia trường hợp, xét sự khả hữu...).
- những hoạt động trí tuệ chung (như phân tích, tổng hợp, so sánh, xét tương tự, trừu tượng hóa, khái quát hóa...).
- những hoạt động ngôn ngữ (bằng ngôn ngữ tự nhiên, ký hiệu toán học...).

1.1.3. Hoạt động và hoạt động thành phần

Người giáo viên cần phát hiện những hoạt động tương thích với nội dung dạy học. Sau đó phân tích hoạt động thành những hoạt động thành phần và lựa chọn hoạt động phù hợp với mục tiêu dạy học. Ta cần hướng tập trung vào những hoạt động toán học, tức là những hoạt động nhận dạng và thể hiện những khái niệm, định lý và phương pháp toán học; những hoạt động toán học phức hợp như định nghĩa, chứng minh...

1.2. Theo Didactic Toán (*Didactique des Mathématiques*)

Từ những năm 1990, Didactic Toán (có thể hiểu là Lý luận dạy học Toán thuộc trường phái Pháp) đã bắt đầu thâm nhập vào Việt Nam. Phần này chúng tôi trình bày theo các tác giả Annie Bessot - Claude Comiti - Lê Thị Hoài Châu - Lê Văn Tiến[1].

Từ cách tiếp cận việc học tập theo những học thuyết về hành vi và sự phát triển của ngành tâm lý học dựa trên năng lực nhận thức cũng như quan niệm học tập là kiến tạo, Didactic Toán đề xuất những giả thuyết về phương thức xây dựng và hoạt động của kiến thức.

1.2.1. Giả thuyết tâm lý

Chủ thể học bằng cách tự thích nghi (đồng hóa và điều ứng) với một môi trường gây ra những mâu thuẫn, khó khăn, sự mất cân bằng.

Như vậy:

- học là một quá trình năng động trong đó người học đóng vai trò chủ động.
- kiến thức được xây dựng do tương tác giữa chủ thể là người học với môi trường vật chất và xã hội của chủ thể đó.

1.2.2. Giả thuyết dạy học

Một môi trường không có chủ ý dạy học (không được cố ý tổ chức để dạy một tri thức) không đủ để tạo ra cho chủ thể mọi kiến thức mà xã hội muốn chủ thể đó lĩnh hội được.

Như vậy:

Thầy giáo phải làm phát sinh ở học sinh những sự thích nghi mong muốn bằng cách tổ chức ra môi trường xác đáng.

1.2.3. Giả thuyết về xây dựng kiến thức

Kiến thức được xây dựng trên cơ sở (hoặc đôi khi phản bác lại) những kiến thức đã có trước đó – còn mang tính nguyên sơ, địa phương, phiên diện – cùng tồn tại ở một thời điểm nào đó ở học sinh.

Như vậy:

Đối với học sinh, nghĩa của một kiến thức đến chủ yếu từ các tình huống trong đó kiến thức đang hay đã can dự như những thích nghi thỏa đáng.

2. Những hoạt động dạy học tiêu biểu trong các sách giáo khoa toán lớp 10 ở Việt Nam và ở Pháp

Sách giáo khoa là chỗ dựa đầu tiên cho người giáo viên nghiên cứu, tham khảo để thiết kế các hoạt động dạy học cho học sinh. Chúng tôi xin giới thiệu tóm lược về các sách giáo khoa ở hai nước Việt Nam và Pháp để từ đó lựa chọn vài hoạt động dạy học tiêu biểu nhằm đối chiếu, so sánh và đánh giá.

2.1. Giới thiệu các sách giáo khoa toán lớp 10

Hiện thời ở Việt Nam, cũng như ở Pháp, cấp trung học phổ thông thực hiện trong 3 năm học: lớp 10,11,12 (tương ứng ở Pháp là Seconde, Premier, Terminale). Dù vậy chương trình toán của hai nước không hoàn toàn tương đồng nhau theo mỗi lớp tương ứng: có nhiều nội dung tương đương nhau và cũng có những nội dung khác biệt nhau.

Từ đây chúng tôi dùng cụm từ “toán 10” để chỉ chung “toán lớp 10 ở Việt Nam” và “toán lớp Seconde ở Pháp”.

Về sách giáo khoa toán 10, ở Pháp có nhiều bộ sách khác nhau và riêng chúng tôi sẽ dựa vào bộ sách của Collection Terracher; ở Việt Nam có 2 bộ sách (cùng do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức biên soạn) và chúng tôi chọn bộ sách “nâng cao”.

2.1.1. Tóm lược về cách biên soạn 2 sách giáo khoa toán 10

**TÓM TẮT CÁCH BIÊN SOẠN SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 10
CỦA VIỆT NAM VÀ CỦA PHÁP**

	VIỆT	PHÁP
TÊN SÁCH GIÁO KHOA - TÁC GIẢ	- ĐẠI SỐ 10 Nguyễn Huy Doan (cb) - HÌNH HỌC 10 Văn Như Cương (cb)	MATH Seconde Collection Terracher : - P.H. Terracher - R. Ferachoglou
SỐ CHƯƠNG	9 chương (6 chương ĐS và 3 chương HH)	6 chương
SỐ MỤC CỦA MỖI CHƯƠNG	Từ 3 đến 8 mục	Từ 1 đến 4 mục
PHẦN LÝ THUYẾT CỦA MỖI MỤC	Trình bày kiến thức toán học có xen kẽ : - các ví dụ hay các câu hỏi/bài toán. - các hoạt động của học sinh.	Bài học gồm 3 phần : - Dẫn nhập. - Bài học. - Thực hành. * Phần “Dẫn nhập” gồm có : - Mục đích yêu cầu. - Kiến thức cần biết. - Các hoạt động chuẩn bị.
PHẦN BÀI TẬP CỦA MỖI MỤC	gồm có : - Câu hỏi và bài tập - Luyện tập Ngoài ra còn có : - Bài tập ôn tập chương.	Bài tập gồm 3 phần : - Bài tập áp dụng. - Bài tập. - Bài tập thực tế.

Bảng 2.

Sau đây là những chương “tương đồng” giữa 2 sách giáo khoa toán 10 ở Việt Nam và ở Pháp (xem bảng 3).

NHỮNG CHƯƠNG “TƯƠNG ĐỒNG” GIỮA 2 SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 10

VIỆT	PHÁP
ĐS Chương II. Hàm số bậc nhất và bậc hai.	6. Đại cương về hàm số. 7. Những hàm số thường gặp.
ĐS Chương III. Phương trình và hệ phương trình.	2. Biến đổi biểu thức. Phương trình. 4. Hệ phương trình tuyến tính.
ĐS Chương IV. Bất đẳng thức và bất phương trình.	3. Thứ tự và giá trị tuyệt đối.
ĐS V. Thống kê.	5. Thống kê.
ĐS Chương VI. Góc lượng giác và công thức lượng giác.	8. Lượng giác và hàm số lượng giác.
HH Chương I. Vector.	11. Vector.
HH Chương III. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.	12. Hình học giải tích.

Bảng 3.

2.1.2. Lựa chọn những hoạt động dạy học trong một số nội dung tiêu biểu trong 2 sách giáo khoa

Theo bảng 3, những chương “tương đồng” giữa 2 sách giáo khoa thật ra chỉ là theo tên gọi tương tự. Về nội dung thì chỉ có 4 chương có kiến thức toán học là tương

đương hoặc “gần nhau nhất”. Những hoạt động dạy học trong một số nội dung tiêu biểu sẽ được chọn trong những chương này (*xem bảng 4.*)

**GIỚI THIỆU NHỮNG HOẠT ĐỘNG ĐƯỢC CHỌN ĐỂ BÁO CÁO
TỪ CÁC SÁCH GIÁO KHOA CỦA VIỆT NAM VÀ CỦA PHÁP**

VIỆT	PHÁP
Chương II. #3. Hàm số bậc hai. Có 1 ví dụ, 3 hoạt động (H). (chọn H3)	Chương III. #7. Các hàm số thông dụng. Có 4 hoạt động (Activité) (A). (Chọn A1)
Chương III. #4. Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn. Có 2 ví dụ, 4 hoạt động. (Chọn H4)	Chương I. #4. Hệ phương trình tuyến tính. Có 4 hoạt động. (Chọn A3)
Chương IV. #2. Đại cương về bất phương trình. #3. Bất phương trình bậc nhất. Có 2 ví dụ, 5 hoạt động. (Chọn H1) Có 2 ví dụ, 2 hoạt động. (Chọn H2)	Chương I. #3. Thứ tự và giá trị tuyệt đối. Có 4 hoạt động. (Chọn A1)
Chương I. #2. Tổng 2 vectơ. Có 3 câu hỏi, 3 bài toán, 5 hoạt động. (Chọn H2, bài toán 2)	ChươngV. #11. Vectơ. Có 3 hoạt động. (Chọn A2)

Bảng 4.

2.2. Nội dung các cặp hoạt động tiêu biểu - Nhận xét

Những hoạt động dạy học được chọn sẽ được trình bày tương ứng theo từng cặp, sau số thứ tự của “hoạt động” nếu có chữ “V” là của sách giáo khoa ở Việt Nam, nếu có chữ “F” là của sách giáo khoa ở Pháp.

2.2.1. Cặp hoạt động 1 : “Hàm số bậc 2”

Hoạt động 1V. ([7], tr58)

Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P).

a) Tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và hướng bề lõm của (P). Từ đó suy ra sự biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

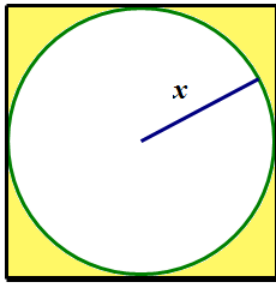
b) Vẽ parabol (P).

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$.

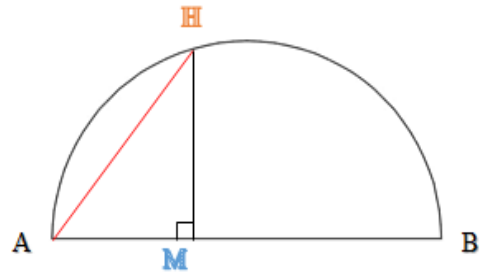
Hoạt động 1F. (dịch sang tiếng Việt từ [9],tr161)

Có quan hệ dưới dạng $y = ax^2$ trong những ví dụ dưới đây :

1) y là diện tích một tam giác vuông cân có cạnh bên là x.



Hình 1



Hình 2

2) Trong hình 1 : x là bán kính hình tròn nội tiếp trong một hình vuông ; y là diện tích phần hình vuông ở ngoài hình tròn.

3) y là diện tích một tam giác đều có cạnh là x .

4) Trong hình 2 : đường kính $AB = 5$.

Biểu diễn $y = AH$ theo $x = AM$.

Nhận xét 1 :

Tuy cùng dạy học về hàm số bậc hai nhưng hai sách giáo khoa toán 10 có sự khác biệt rất lớn về xây dựng kiến thức : trong khi sách giáo khoa ở Việt Nam thiên về luyện tập về hàm số $y = ax^2 + bx + c$ thì sách giáo khoa ở Pháp thiên về tiếp cận hàm số $y = ax^2$ mà thôi.

– Hoạt động 1V yêu cầu học sinh thực hiện lại kiểu nhiệm vụ “khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị” hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (tương tự với ví dụ và nhận xét ngay trước đó).

– Hoạt động 1F là một dãy gồm 4 hoạt động riêng biệt, từ những kiến thức hình học đã biết về công thức tính diện tích tam giác, hình vuông, hình tròn... giúp cho học sinh hình thành được kiến thức mới : tương quan hàm $y = ax^2$.

2.2.2. Cặp hoạt động 2 : “Giải hệ phương trình bậc 1”

Hoạt động 2V. ([7], tr91)

Bằng định thức, giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 7x + 4y = 2 \end{cases}$$

Hoạt động 2F. (dịch sang tiếng Việt từ [9], tr90)

1) Cách giải hệ phương trình bằng đồ thị :

Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

a) Vẽ các đường thẳng $D : 2x - y = 1$ và $D' : -x + 2y = 4$.

b) Xác định tọa độ giao điểm của D và D' .

c) Suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho (kiểm chứng)

2) Giải hệ phương trình sau bằng đồ thị :
$$\begin{cases} y - 7x = 4 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$$

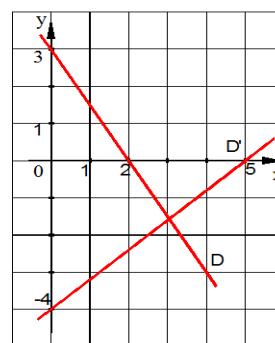
3) Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} 4x + 6y = 1 \\ 0,5x + 0,75y = 1 \end{cases}$$

a) Kiểm chứng rằng 2 đường thẳng (có phương trình tương ứng) song song.

b) Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

4) Xem hình 3.

Xác định tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng bằng cách giải hệ phương trình.



Hình 3

Nhận xét 2 :

Lại có thêm có sự khác biệt nữa giữa hai sách giáo khoa toán 10 trong quan niệm dạy học “giải hệ phương trình bậc nhất”: trong khi sách giáo khoa ở Việt Nam lướt qua các phương pháp giải đã biết để tập trung đưa thêm phương pháp Cramer thì sách giáo khoa ở Pháp chỉ tập trung khai thác kỹ các phương pháp giải đã biết, nhất là phương pháp đồ thị.

– Hoạt động 2V chỉ là bài tập áp dụng cách giải hệ phương trình bằng định thức (tương tự với ví dụ 1 ngay trước đó).

– Hoạt động 2F gồm 4 hoạt động thành phần, nhằm thể hiện phương pháp giải hệ phương trình (khi có nghiệm nguyên) bằng đồ thị và ngược lại, tìm tọa độ giao điểm (không là cặp số nguyên) của 2 đường thẳng bằng cách giải hệ phương trình.

2.2.3. Cặp hoạt động 3 : “Bất phương trình bậc 1”

Hoạt động 3V. ([7], tr113 và tr118)

* Biểu diễn tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau bởi các ký hiệu khoảng hoặc đoạn:

a) $-0,5x > 2$.

b) $|x| \leq 1$.

* (sau ví dụ 1: đã có kết quả tập nghiệm của bất phương trình $mx + 1 > x + m^2$)

Từ kết quả trên, hãy suy ra tập nghiệm của bất phương trình $mx + 1 \geq x + m^2$

Hoạt động 3F. (dịch sang tiếng Việt từ [9], tr59)

1) Trong 100 bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào đúng?

$$\frac{1+1}{3} < \frac{25+1}{4}, \frac{1+2}{3} < \frac{25+2}{4}, \dots, \frac{1+100}{3} < \frac{25+100}{4}.$$

2) Trong các số :

3,14; 3,15; 3,1415; 3,1416 π ; 22/7; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 355/113

Số nào là nghiệm của bất phương trình $7x - 22 < 0$?

3) Giải các bất phương trình :

$$2x \geq 16.$$

$$-2x \geq 1,6.$$

$$1 - \frac{4}{5}x < 0.$$

$$\frac{2}{3}x < 1 - \frac{5}{3}x.$$

$$-2x + 11 < 5x + 31.$$

$$0,2(0,2 - 0,1x) - 0,03 < 0,07.$$

4) Một xe (với bình xăng có sức chứa 55 lít, tốn từ 7 lít đến 9 lít khi chạy 100km) đang chạy trên quãng đường 22km. Hỏi xe có thể chạy được bao nhiêu chuyến với bình xăng đầy?

Nhận xét 3 :

Trong phần này, kiến thức dạy học về “bất phương trình bậc nhất” là hoàn toàn tương đồng giữa hai sách giáo khoa.

– Hoạt động 3V, gồm hai hoạt động riêng biệt, yêu cầu học sinh thể hiện tập nghiệm của bất phương trình bằng khoảng, đoạn và giải và biện luận bất phương trình bằng cách suy ra từ kết quả của ví dụ 1 (vừa mới giải).

– Hoạt động 3F gồm dãy 4 hoạt động nối kết mạch lạc với nhau để học sinh tuần tự hình thành khái niệm bất phương trình, nghiệm của bất phương trình, cách giải bất phương trình bậc 1 (không biện luận) và vận dụng giải bất phương trình vào bài toán thực tế.

2.2.4. Cặp hoạt động 4 : “Tổng của hai vector”

Hoạt động 4V. ([8], tr11 và tr12)

* Hãy vẽ hình bình hành ABCD với tâm O. Hãy viết vector $\overrightarrow{AB}$ dưới dạng tổng của 2 vector được tạo từ năm điểm đó.

* Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Hoạt động 4F. (dịch sang tiếng Việt từ [9], tr279)

1) Trong hình 4, hãy vẽ các vector :

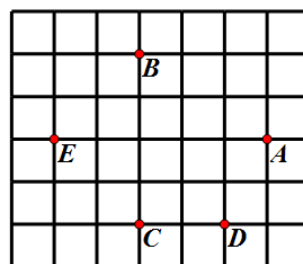
a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EC}$



Hình 4

2) Nếu $\overrightarrow{ET} + \overrightarrow{RE} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{UT}$ thì TOUR có phải là hình bình hành ?

3) Cho hình bình hành ABCD có tâm O.

a- Dựng điểm M để $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b- Chứng minh đẳng thức $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO}$

Có thể suy ra điều gì ?

Nhận xét 4 :

Trong phần này, kiến thức dạy học về “vector” cũng hoàn toàn tương đồng.

– Hoạt động 4V, gồm hai hoạt động riêng biệt (tác giả đã mặc nhiên xem “hoạt động” với “bài tập” là như nhau), nhằm thể hiện lần lượt 2 qui tắc “cộng vector” rồi tính độ dài vector (bằng cách áp dụng công thức hình học).

– Hoạt động 4F: Khởi đầu là nhận dạng và thể hiện “chung” 2 qui tắc cộng vector. Tiếp theo là các hoạt động có phối hợp giữa “tổng của hai vector” với “hai vector bằng nhau”, có tính gợi mở để học sinh tìm tòi, khám phá, nêu nhận xét.

2.2.5. Nhận xét chung về “thiết kế hoạt động dạy học toán”

Qua 4 cặp hoạt động nêu trên, chúng tôi xin đưa ra những nhận xét chung (xem bảng 5).

Căn cứ để nhận xét		Các hoạt động 1V – 2V – 3V - 4V	Các hoạt động 1F – 2F – 3F – 4F
Phương pháp giảng dạy toán	Quan điểm hoạt động	Chưa chú trọng đến phát hiện hoạt động tiềm tàng trong nội dung dạy học.	Phát hiện được nhiều hoạt động tiềm tàng trong nội dung dạy học.
	Hoạt động của học sinh	Chỉ tập trung vào hoạt động nhận dạng và thể hiện ; hoạt động toán học phức hợp.	Đầy đủ các dạng hoạt động
	Hoạt động thành phần	Chỉ là những bài tập đơn lẻ.	Một hoạt động luôn gồm những hoạt động thành phần.
Didactic Toán	Giả thuyết tâm lý	Học sinh làm theo khuôn khổ đã định một cách đơn điệu.	Học sinh phải động não để có thể tự thích nghi với hoạt động và tìm cách giải quyết vấn đề.
	Giả thuyết dạy học	Không có được môi trường dạy học tích cực.	Môi trường có chủ ý dạy học tích cực.
	Giả thuyết về xây dựng kiến thức	Ít chú ý đi từ kiến thức đã biết của học sinh đến kiến thức mới.	Khai thác nhuần nhuyễn các kiến thức đã có và sắp có ở học sinh.

Bảng 5.

Chúng tôi nhận thấy, các hoạt động dạy học của sách giáo khoa toán 10 ở Pháp đã đáp ứng gần như đầy đủ các điều kiện của hoạt động dạy học. Từ đó người giáo viên có căn cứ thuận lợi cho việc thiết kế hoạt động dạy học và biên soạn giáo án của mình, tạo được môi trường học tập tích cực cho học sinh. Trong khi đó, sách giáo khoa toán 10 của Việt Nam còn nhiều khoảng cách, cần phải nhanh chóng rút ngắn.

3. Những đề xuất

Nhằm có thể giúp người dạy thực hiện được mục tiêu “hoạt động hóa người học” , chúng tôi xin mạn phép có vài đề xuất như sau :

– Đối với sách giáo khoa, cần phải định kỳ (chẳng hạn 2 năm/1 lần) cập nhật, bổ sung các hoạt động dạy học; có tham khảo các sách giáo khoa của các nước. Về phía giáo viên, khi thiết kế hoạt động dạy học ngoài nội dung kiến thức toán học cần

truyền đạt cho học sinh thông qua các tình huống trong dạy học môn toán, cần chú trọng đến:

- Phối hợp kiến thức đó với các kiến thức trong từng phân môn toán, trong các phân môn toán với nhau, trong liên môn (toán với lý, hóa, ...)
- Tra cứu hoặc tự soạn ra những bài toán trong thực tế có thể giải bằng cách vận dụng kiến thức toán học liên quan.
- Nghiên cứu những tác phẩm về phân tích tri thức luận, lịch sử toán học, ... của kiến thức đang cần dạy học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bessot, Annie – Comiti, Claude – Lê thị Hoài Châu – Lê văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán (Éléments fondamentaux de didactique des mathématiques)*. NXB Đại học quốc gia tp Hồ Chí Minh.
2. Lê văn Tiến. (2005). *Phương pháp dạy học môn toán ở trường phổ thông*. NXB Đại học sư phạm tp Hồ Chí Minh.
3. Lê thị Hoài Châu. (2008). *Phương pháp dạy-học hình học ở trường trung học phổ thông*. NXB Đại học sư phạm tp Hồ Chí Minh.
4. Nguyễn Bá Kim (CB) – Bùi Huy Ngọc. (2006). *Phương pháp dạy học đại cương môn toán*. NXB Đại học sư phạm.
5. Phạm Gia Đức (CB) – Bùi Huy Ngọc – Phạm Đức Quang. (2007). *Phương pháp dạy học các nội dung môn toán*. NXB Đại học sư phạm.
6. IREM Grenoble. (1997). *Một số kinh nghiệm giảng dạy Toán ở Pháp*. NXB Giáo dục.
7. Đoàn Quỳnh (TCB) – Nguyễn Huy Doan (CB) – Nguyễn Xuân Liêm – Đặng Hùng Thắng. (2007). *Đại số 10 nâng cao*. NXB Giáo dục.
8. Đoàn Quỳnh (TCB) – Văn Như Cương (CB) – Phạm Vũ Khuê – Bùi văn Nghị. (2006). *Hình học 10 nâng cao*. NXB Giáo dục.
9. Collection Terracher. (1994). *MATH Seconde*. NXB Hachette Éducation.
10. Trần Vui. (2014). *Giải quyết vấn đề thực tế trong dạy học toán*. NXB Đại học Huế.

SỐ PHỨC TRONG MỐI LIÊN HỆ LIÊN MÔN TOÁN - VẬT LÝ: PHÂN TÍCH THỰC HÀNH DẠY HỌC CỦA GIÁO VIÊN TOÁN VÀ VẬT LÝ Ở TRƯỜNG THPT

Nguyễn Thị Nga*

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ làm rõ sự tương ứng giữa số phức và dao động điều hòa cũng như kỹ thuật sử dụng số phức để giải quyết các bài toán về dao động điều hòa trong trong các giáo trình Vật lý và Kỹ thuật điện ở bậc đại học. Tiếp đó, chúng tôi sẽ trình bày những ghi nhận khi quan sát thực hành dạy học của giáo viên Toán trong các bài dạy về số phức và giáo viên Vật lý trong các bài dạy về dao động điều hòa cũng như phân tích kết quả thu được từ một bộ câu hỏi điều tra dành cho giáo viên Vật lý để làm rõ sự hiện diện của mối liên hệ liên môn Toán – Vật lý liên quan đến số phức trong thực tế dạy học của giáo viên.

Từ khoá: số phức, dao động điều hoà, dạy học liên môn.

Résumé

Dans cet article, nous clarifierons la correspondance entre nombres complexes et oscillation harmonique ainsi que des techniques utilisant des nombres complexes pour résoudre les problèmes de synthèse des oscillations harmoniques dans les ouvrages de physique et de génie électrique à l'université. Ensuite, nous présenterons des constats de l'observation des pratiques enseignantes mathématiques et physiques dans les leçons sur le nombre complexe et sur l'oscillation harmonique, ainsi que d'analyser les résultats d'un questionnaire pour les enseignants de physique afin de clarifier la présence de l'interdisciplinarité des Mathématiques - Physique liée aux nombres complexes dans la pratique des enseignants.

Mot-clé: nombre complexe, oscillation harmonique, enseignement interdisciplinaire.

1. Đặt vấn đề

Xét bài toán sau:

Dao động tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số có phương trình li độ $x = 3\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm). Biết dao động thứ nhất có phương trình li độ $x_1 = 5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm). Dao động thứ hai có phương trình li độ là:

A. $x_2 = 8\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm)

B. $x_2 = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm)

C. $x_2 = 2\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm)

D. $x_2 = 8\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm)

[Câu 24 - Đề thi đại học khối A năm 2010 - Mã đề 48]

Để giải bài toán này có thể sử dụng một trong hai kỹ thuật sau:

Kỹ thuật 1: Dùng giản đồ Fre-nen (giản đồ vectơ quay)

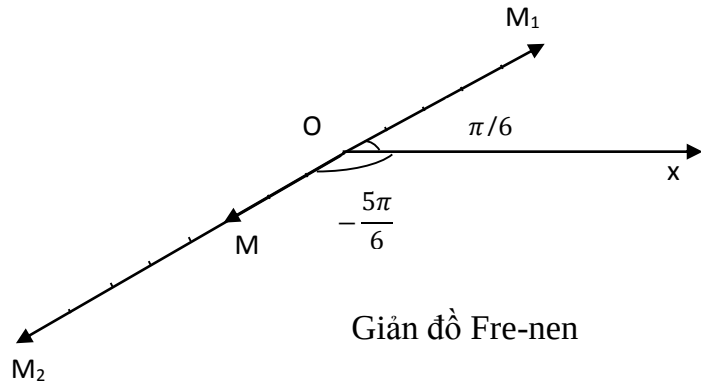
Gọi các vectơ quay $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ lần lượt biểu diễn các dao động x , x_1 , x_2 tại thời điểm ban đầu và phương trình li độ của dao động thứ hai là $x_2 = A_2\cos(\pi t + \varphi_2)$.

* TS, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.

Ta có: $x_2 = x - x_1 \Rightarrow$
 $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1M}$.

Dựa vào hình vẽ, suy ra
 $|\overrightarrow{OM_2}| = A_2 = 8$ và $\varphi_2 = -\frac{5\pi}{6}$.

Vậy phương trình li độ của
 dao động thứ hai là: $x_2 =$
 $8\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$.



Kỹ thuật 2: Dùng số phức

Mỗi dao động điều hòa x , x_1 , x_2 tương ứng với mỗi số phức dạng cực $\tilde{x}$, $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$.

Tính $\tilde{x}_2 = \tilde{x} - \tilde{x}_1 = A\angle\varphi - A_1\angle\varphi_1 = 3\angle -\frac{5\pi}{6} - 5\angle\frac{\pi}{6} = -4\sqrt{3} - 4i = 8\angle -\frac{5\pi}{6}$ (*)

Vậy phương trình li độ của dao động thứ hai là: $x_2 = 8\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$.

Biểu thức (*) được tính rất nhanh với sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi (MTBT) Fx-570MS theo trình tự:

Bấm chọn **[MODE]** **[2]** trên màn hình xuất hiện chữ: **CMPLX**

Chọn đơn vị đo góc là **radian(R)**: **[SHIFT]** **[MODE]** **[4]**

Nhập vào máy: **3** **[SHIFT]** **[(-)]** **[$\angle$]** **[(-5)]** **[π]** **[/]** **6** **[$\angle$]** **5** **[SHIFT]** **[(-)]** **[$\angle$]** **[π]** **[/]** **6** **[=]** **[SHIFT]** **[2]** **[3]** **[=]**

Hiện thị: $8\angle -\frac{5\pi}{6}$

Như vậy, với đề thi dạng trắc nghiệm và có sự hỗ trợ của MTBT, kỹ thuật thứ hai dẫn đến kết quả nhanh và chính xác hơn. Câu hỏi đặt ra là kỹ thuật nào được trình bày trong sách giáo khoa (SGK) và trong thực tế dạy học của giáo viên (GV) Vật lý? Yêu tố công nghệ - lý thuyết của kỹ thuật này là gì? Chúng có được đưa vào trong SGK và trong thực hành dạy học của GV Toán và Vật lý hay không?

2. Số phức trong mối liên hệ liên môn Toán và Vật lý ở bậc đại học

Nghiên cứu của Võ Như Ý (2016) về các giáo trình Toán [9], Vật lý [1], Kỹ thuật điện [5] ở bậc đại học cho thấy tồn tại sự tương ứng 1 - 1 giữa số phức và dao động điều hòa. Sự tương ứng này được tác giả thể hiện bằng sơ đồ sau (các dấu tương đương đều thể hiện sự tương ứng 1 - 1):

$$\begin{array}{ccc} \text{Số phức} & \overset{(1)}{\longleftrightarrow} & \text{vector } \overrightarrow{OM} \\ \uparrow (4) & & \uparrow (3) \\ & \overset{(2)}{\longleftrightarrow} & \text{vector quay } \vec{a} \\ \text{Dao động điều hòa} & & \end{array}$$

Trong đó, giáo trình Toán trình bày số phức dưới dạng cặp số thực (a, b) thay vì dạng $a + bi$ nhằm dễ dàng cho thấy sự tương ứng 1 - 1 giữa các đối tượng số phức - điểm - vector. Vector biểu diễn số phức $z(a, b)$ có đặc điểm: Môđun $|\overrightarrow{OM}| = |z| = r$ và

acgumen $\theta = (\overrightarrow{OM}, Ox)$. Giáo trình Vật lý trình bày tường minh dấu tương đương (2) khi một dao động điều hòa $x = \cos(\omega t + \varphi)$ (với tần số góc ω cho sẵn) được biểu diễn bởi một vector quay $\vec{a}$ có đặc điểm: Độ lớn bằng $a > 0$ và góc $(Ox, \vec{a}) = \varphi$ tại thời điểm $t = 0$. Tương tự, một dao động điều hoà luôn có thể biểu diễn bởi một số phức như sau (dấu tương đương (4)):

Trong khi tính toán các dao động người ta còn dùng số phức để biểu diễn các dao động. Ta biết rằng một dao động hình sin: $x = \cos(\omega t + \varphi)$ được hoàn toàn xác định khi đã biết biên độ a và pha $\alpha = \omega t + \varphi$ của nó (còn trong biểu thức của x có thể viết $\cos$ hay $\sin$ cũng không quan trọng lắm). Vì vậy, ta có thể biểu diễn dao động điều hòa x bằng số phức sau đây, kí hiệu là $\tilde{x}$: $\tilde{x} = ae^{i(\omega t + \varphi)}$.

Ta nói số phức $\tilde{x}$ biểu diễn dao động điều hòa x và viết $x \leftrightarrow \tilde{x}$

Rõ ràng là: $a = \text{môđun của } \tilde{x} = |\tilde{x}|$,

$$\alpha = \omega t + \varphi = \text{acgumen của } \tilde{x} = \arg \tilde{x}.$$

[Vật lý đại cương, tr.292 - 293]

Trong giáo trình Kỹ thuật điện, các dấu tương đương trên được trình bày một cách rõ ràng. Cụ thể, giáo trình nêu rõ:

– Có một sự tương ứng một - giống - một giữa tập hợp các hàm sin và tập hợp các vector gốc O.

– Có một sự tương ứng một - giống - một giữa các đối tượng số phức $\mathbf{A} \leftrightarrow$ Điểm $\mathbf{A} \leftrightarrow$ Vector $\overrightarrow{OA}$.

– Có một sự tương ứng một - giống - một giữa số phức và dao động điều hòa: “Biểu diễn điện áp hình sin $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta)$ bởi vector $\vec{U}$ chiều dài U và tạo với trục hoành góc θ . Vector $\vec{U}$ lại tương ứng với một số phức duy nhất, ký hiệu $\mathbf{U}$, có biên độ bằng U và góc bằng θ : $\mathbf{U} = U\angle\theta = Ue^{j\theta} = U(\cos\theta + j\sin\theta)$ ” [Kỹ thuật điện, tr. 48].

Như vậy, khi cho một dao động điều hòa thì suy ra được một số phức tương ứng với sự bằng nhau theo thứ tự giữa môđun, acgumen của số phức và biên độ, pha của dao động. Và ngược lại, cho một số phức ta có thể suy ra được dao động điều hòa tương ứng. Đây chính là yếu tố giúp liên môn giữa Toán và Vật lý. Sự liên môn này luôn luôn tồn tại bởi chính đặc trưng của hai khái niệm số phức và dao động điều hòa.

Ở đây, chúng tôi muốn làm rõ các kỹ thuật có thể sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ “Tổng hợp hai dao động điều hòa (cùng phương cùng tần số)” được trình bày trong giáo trình Vật lý đại cương (2001).

Giả sử hai dao động điều hòa này có dạng:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ta phải thiết lập biểu thức của dao động tổng hợp $x = x_1 + x_2$.

a. Kỹ thuật giản đồ Fre-nen:

Kỹ thuật này dựa trên cơ sở cộng hai dao động điều hòa là cộng hai vector quay tương ứng theo quy tắc hình bình hành.

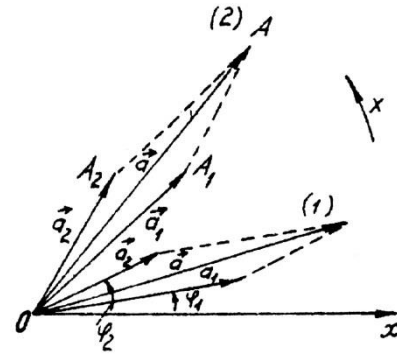
Trước hết ta lấy trục Ox làm gốc và biểu diễn:

+ Dao động x_1 bằng vector $\vec{a}_1$ có:

- Chiều dài bằng a_1 ,
- Góc $(Ox, \vec{a}_1) = \varphi_1$, tại $t = 0$,
- Quay theo chiều dương với vận tốc góc bằng ω .

+ Dao động x_2 bằng vector $\vec{a}_2$ có:

- Chiều dài bằng a_2 ,
- Góc $(Ox, \vec{a}_2) = \varphi_2$, tại $t = 0$,
- Quay theo chiều dương với vận tốc góc bằng ω .



Hình 1.4. Tổng hợp hai dao động điều hòa bằng vector quay

Sau đây, theo quy tắc hình bình hành, ta vẽ:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Từ hình vẽ trên, ta có thể rút ra công thức tính biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp như sau:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2} \quad (1.2).$$

[Vật lý đại cương, tr.279 - 283]

Kỹ thuật số phức:

$$x_1 \leftrightarrow \widetilde{x}_1 = a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}; \quad x_2 \leftrightarrow \widetilde{x}_2 = a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

$$x = x_1 + x_2 \leftrightarrow \widetilde{x} = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2$$

$$\widetilde{x} = a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = (a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t} \quad (3)$$

Mặt khác nếu $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ thì

$$x \leftrightarrow \widetilde{x} = a e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (4)$$

So sánh (3) và (4) ta suy ra

$$a e^{i\varphi} = a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2}$$

Từ đây dễ dàng suy ra

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{và} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}$$

[Vật lý đại cương, tr.293]

3. Số phức và dao động điều hòa trong SGK phổ thông

3.1. Số phức trong SGK Giải tích lớp 12

Sự tương ứng 1 - 1 giữa các đối tượng số phức - điểm - vector tồn tại tường minh trong SGK Giải tích lớp 12.

Trong mặt phẳng phức, ta đã coi điểm M có tọa độ (a, b) biểu diễn số phức $z = a + bi$. Ta cũng coi mỗi vectơ $\vec{u}$ có tọa độ (a, b) biểu diễn số phức $z = a + bi$. Khi đó ta nói điểm M biểu diễn số phức z cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

[Giải tích 12, tr.184]

Tuy nhiên, sự gắn kết giữa số phức và vectơ biểu diễn của nó không được khắc sâu bằng hệ thống bài tập vì chỉ có một số ít bài toán liên quan mang tính chất giới thiệu, bổ sung cho bài học thêm sinh động. Như vậy, SGK Toán không khai thác các yếu tố giúp liên môn với Vật lý như trong các giáo trình đại học đã trình bày ở trên.

Các dạng số phức được đề cập tường minh trong SGK Toán là dạng đại số, dạng lượng giác và dạng mũ. Trong đó, dạng mũ chỉ mang tính chất giới thiệu vì nó chỉ xuất hiện trong SGK. Dạng cực không được đề cập do chương trình toán phổ thông chỉ giới thiệu hệ tọa độ Đề-các, do đó khoảng cách và góc chỉ được biểu diễn dưới dạng lượng giác mà không viết rõ dạng cực $z = r\angle\varphi$.

SGK Toán có đề cập đến vai trò công cụ của số phức trong các lĩnh vực hình học, đại số, lượng giác (như giải phương trình, chứng minh công thức lượng giác, chứng minh hằng đẳng thức...). Tuy nhiên, ứng dụng của số phức không được nhấn mạnh vì số lượng các bài tập thể hiện điều này rất ít. Đặc biệt, vấn đề dạy học liên môn với Vật lý không được tính đến. Không hề có dấu hiệu nào cho thấy có sự ứng dụng của số phức trong Vật lý.

3.2. Khái niệm dao động điều hòa và dòng điện xoay chiều trong SGK Vật lý lớp 12

SGK Vật lý lớp 12 trình bày khái niệm dao động điều hòa được biểu diễn bởi vectơ quay hoàn toàn giống với giáo trình Vật lý đại cương ở bậc đại học.

Tuy nhiên, kỹ thuật số phức không xuất hiện trong SGK Vật lý. Kỹ thuật giải các bài toán về tổng hợp dao động điều hòa là sử dụng giản đồ Fre-nen và công thức tính biên độ, pha ban đầu của dao động tổng hợp. Dấu vết của số phức hoàn toàn không hiện diện trong SGK Vật lý. Lý do có thể là do sự chênh lệch về thời gian của phân phối chương trình hai môn Toán và Vật lý (số phức được dạy trong bộ môn Toán ở cuối học kì 2 lớp 12 trong khi dao động điều hòa lại được dạy trong Vật lý từ đầu học kì 1).

4. Số phức trong thực hành dạy học của giáo viên Toán và Vật lý ở trường phổ thông

Để tìm hiểu thực tế dạy học của GV Toán và Vật lý liên quan đến mối quan hệ liên môn Toán – Vật lý về chủ đề số phức, chúng tôi đã tiến hành các nghiên cứu sau:

- Quan sát thực hành dạy học của GV Toán trong 2 tiết: tiết 1 (Số phức), tiết 2 (Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng).

- Quan sát thực hành dạy học của GV Vật lý trong 2 tiết: tiết 1 (Dao động điều hòa), tiết 2 (Tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số. Phương pháp giản đồ Fre-nen).

- Xây dựng bộ câu hỏi điều tra đối với GV Vật lý.

Sau đây là một số kết quả thu thập được:

4.1. Số phức trong thực tế dạy học của GV Toán

Ở hai tiết dạy mà chúng tôi quan sát, GV triển khai các nội dung dạy học tương tự như trong SGK trình bày. Cụ thể, sự tương ứng 1 - 1 giữa các đối tượng số phức - điểm - vector được giáo viên làm rõ. Tuy vậy, ở phần bài tập, không có kiểu nhiệm vụ nào được GV đề cập đến mà liên quan đến nội dung này.

Việc chuyển đổi số phức dạng đại số sang dạng lượng giác được GV trình bày tường minh và có hướng dẫn cho HS sử dụng MTBT để chuyển đổi. Đây cũng là kiểu nhiệm vụ được GV chú trọng triển khai trong giờ bài tập.

Ứng dụng của số phức trong Vật lý hoàn toàn không được nhắc đến trong 2 tiết học mà chúng tôi quan sát. Khi chúng tôi phỏng vấn GV lý do vì sao không đề cập đến vấn đề này thì GV giải thích do SGK không nhắc đến. Hơn nữa, do thời gian không cho phép nên GV không muốn tìm hiểu và không thấy cần thiết tìm hiểu vấn đề này.

Như vậy, trong thực tế dạy học Toán, số phức được đưa vào dường như chỉ nhằm mở rộng tập hợp số thực để mọi phương trình bậc n đều có nghiệm (Giải tích 12, tr.130). Các ứng dụng của số phức trong nội bộ môn Toán cũng thể hiện rất mờ nhạt (giải phương trình bậc hai trong Đại số, chứng minh công thức nhân ba trong Lượng giác). Đặc biệt, kết quả quan sát giờ dạy của GV cho thấy số phức không mang một ý nghĩa gì trong Vật lý.

4.2. Số phức trong thực tế dạy học của GV Vật lý

Tương tự như SGK, GV Vật lý mà chúng tôi quan sát cũng trình bày kỹ thuật giải các bài toán về tổng hợp dao động điều hòa là sử dụng giản đồ Fre-nen và công thức tính biên độ, pha ban đầu của dao động tổng hợp. Sự liên hệ giữa số phức và dao động điều hòa hoàn toàn không được đề cập tới dù là ngầm ẩn. Nghĩa là kỹ thuật sử dụng MTBT để tìm dao động tổng hợp không được nhắc tới.

Kết quả này chúng ta có thể lường trước được bởi vì như trên đã nói, kiến thức số phức chưa được dạy trong toán học nên khó có khả năng GV đề cập đến ở đây. Vậy liệu sau khi HS đã học số phức trong bộ môn toán, GV Vật lý có đưa vào kỹ thuật tổng hợp hai dao động điều hòa bằng số phức hay không? GV có giải thích cho HS về cơ sở của kỹ thuật đó hay không?

Để trả lời các câu hỏi này chúng tôi đã thiết kế một bộ câu hỏi và tiến hành điều tra trên 20 GV Vật lý đang giảng dạy lớp 12 tại các trường THPT trên địa bàn TPHCM và Bà Rịa – Vũng Tàu. Cụ thể như sau:

Trong câu 1, chúng tôi đưa ra bài toán dưới dạng tự luận sau đây:

Dao động tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số có phương trình li độ $x = 3\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm). Biết dao động thứ nhất có phương trình li độ $x_1 = 5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm). Tìm phương trình li độ của dao động thứ hai.

Với bài toán này, chúng tôi trình bày 2 lời giải giả định của 2 HS: 1 HS giải bằng kỹ thuật giản đồ Fre-nen, 1 HS giải bằng kỹ thuật số phức. Sau đó, chúng tôi đề nghị GV chấm điểm cho 2 lời giải trên.

Ở đây, chúng tôi muốn tìm hiểu mối quan hệ cá nhân của giáo viên với kỹ thuật số phức. Cụ thể, họ có chấp nhận kỹ thuật số phức hay không? Mức độ chấp nhận kỹ thuật này như thế nào? Vì sao như vậy?

Kết quả trả lời của GV cho thấy cả hai lời giải theo hai kỹ thuật Fre-nen và kỹ thuật số phức đều được GV chấp nhận. Lời giải theo kỹ thuật số phức được GV đánh giá là nhanh hơn, phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm.

- “Giải bằng phương pháp số phức nhanh phù hợp với thi trắc nghiệm”.
- “HS giải theo tọa độ cực, phù hợp với trắc nghiệm, phương pháp này không dùng cho tự luận”.
- “Khi đã nhuần nhuyễn các cách giải truyền thống thì đây là cách tốt nhất để làm trắc nghiệm”.

Chỉ có 5 GV cho lời giải theo kỹ thuật số phức điểm dưới 10 (3 GV cho điểm 9 và 2 GV cho điểm 8). Lý do mà GV không cho điểm tối đa là do lời giải theo kỹ thuật này không có bài giải chi tiết, đây là bài toán tự luận, vì vậy không nên giải theo cách này.

- “Chỉ dùng cho phương pháp trắc nghiệm. Một số bài toán cực trị không giải được”.
- “Không có tiến trình làm bài, chỉ có đáp số”.
- “Đây là câu hỏi tự luận không nên giải theo cách này”.

Trong câu 2, chúng tôi đưa ra bài toán dạng trắc nghiệm và đề nghị GV ghi chi tiết việc hướng dẫn HS giải bài toán. Nội dung hai bài toán ở câu 1 và câu 2 hoàn toàn giống nhau. Điểm khác biệt cơ bản giữa chúng là hình thức câu hỏi, từ hình thức tự luận ban đầu chuyển sang hình thức trắc nghiệm.

Câu 2: Xét bài toán sau (Trích đề thi đại học - khối A - năm 2010)

Dao động tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số có phương trình li độ $x = 3\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm). Biết dao động thứ nhất có phương trình li độ $x_1 = 5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm). Dao động thứ hai có phương trình li độ là:

A. $x_2 = 8\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm)

B. $x_2 = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm)

C. $x_2 = 2\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm)

D. $x_2 = 8\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (cm)

Để giải bài toán này, quý thầy (cô) hướng dẫn học sinh của mình làm như thế nào?

Kết quả thu được cho thấy kỹ thuật số phức chiếm tỉ lệ rất cao (gần 90%). Như vậy, với hình thức thi trắc nghiệm, GV ưu tiên lựa chọn kỹ thuật số phức để đạt kết quả nhanh và chính xác. Rõ ràng, trong thể chế dạy học ở Việt Nam, vấn đề thi cử ảnh hưởng rất lớn đến cách dạy của GV.

Trả lời: Ta có! $x = x_1 + x_2$
 $\Rightarrow x_2 = x - x_1$
 Với bài toán này vì giá trị đo không có lời bằng việc bấm máy nên không hướng dẫn học sinh bấm máy.
 $\rightarrow$ Mode 2
 $\rightarrow$ Shift mode 4 (đơn vị là rad), để đo cũng được những đáp án là "rad".
 $\rightarrow$ Nhập máy: $3 \angle (-5\pi/6) - 5 \angle (\pi/6)$ Shift 23 =
 Kết quả: $8 \angle (-5\pi/6)$
 $A_2 = 8$
 $\phi_2 = -5\pi/6$ } $\Rightarrow x = 8 \cos(\pi - 5\pi/6) \text{ cm}$

Câu trả của câu hỏi 2 của GV3

Trong câu 3, chúng tôi đưa ra bài toán và câu hỏi như sau (Trích từ đề thi đại học - khối A - năm 2009):

Đặt điện áp xoay chiều vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp. Biết $R = 10\Omega$, cuộn cảm thuần có $L = \frac{1}{10\pi} \text{ (H)}$, tụ điện có $C = \frac{10^{-3}}{2\pi} \text{ (F)}$ và điện áp giữa hai đầu cuộn cảm thuần là $u_L = 20\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (V)}$. Biểu thức điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là:

- A. $u = 40\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) \text{ (V)}$ B. $u = 40\cos(100\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ (V)}$
 C. $u = 40\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) \text{ (V)}$ D. $u = 40\sqrt{2}\cos(100\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ (V)}$

Để giải bài toán này, một số học sinh đã bấm MTBT Casio Fx-570ES theo trình tự sau:

- Bấm chọn **MODE** **2** màn hình xuất hiện chữ: **CMPLX**
 - Chọn đơn vị đo góc là **radian(R)**: **SHIFT** **MODE** **4**
 - Nhập máy: $\frac{\blacksquare}{\square} 20\sqrt{2} \triangleright$ **SHIFT** **(-)** $\frac{\pi}{2} \triangleright$ **10** **ENG** $\triangleright$ **x** **(** **10** **+** **(**
 $10 \square - 20 \square$ **ENG** **)** **SHIFT** **2** **3** **=**
 Hiện thị: $40\angle -\frac{\pi}{4}$

Từ đó chọn đáp án đúng là câu B.

Quý thầy (cô) có hướng dẫn học sinh của mình bấm máy tính theo cách này để đưa ra đáp án không?

- A. Có B. Không

Nếu Có, quý thầy (cô) có giải thích cho học sinh tại sao lại có thể làm như vậy hay không? Quý thầy (cô) vui lòng ghi chi tiết việc giải thích đó.

Ở bài toán này, chúng tôi muốn tìm hiểu kỹ thuật số phức có được GV Vật lý sử dụng thông qua cách bấm máy tính trong bài toán dòng điện xoay chiều hay không? GV có giải thích cho học sinh cơ sở của việc bấm máy tính hay không?

Kết quả thực nghiệm trên 20 GV cho thấy có 16 GV chọn đáp án *Có*, nghĩa là GV có chỉ cho HS cách bấm máy tính để đưa ra kết quả. Tuy nhiên, chỉ có 1 GV giải thích rõ ràng cho HS bằng cách “*đưa ra chuyên đề số phức và mối liên hệ vật lý trong biểu diễn vector*”. Các GV còn lại không giải thích chi tiết kiến thức số phức ẩn sau cách bấm máy tính. Như vậy, yếu tố giúp dạy học liên môn giữa Toán và Vật lý đối với tri thức số phức được GV chấp nhận tồn tại ngầm ẩn qua cách bấm máy tính nhưng không được các GV Vật lý làm rõ. Có một số GV viết lý do họ không giải thích là do cách phân phối chương trình giữa hai phân môn dẫn đến chương *dao động cơ* và *điện xoay chiều* học trước chương số phức, khi đó HS không có kiến thức số phức. Vấn đề này giống như trong thực tế dạy học của GV mà chúng tôi đã đề cập ở trên. Sau đây là câu trả lời của GV mã hóa GV4:

A. Có

B. Không

Nếu *Có*, quý Thầy (cô) có giải thích cho học sinh tại sao lại có thể làm như vậy hay không? Quý thầy (cô) vui lòng ghi chi tiết việc giải thích đó.

Giải thích:

* Tôi có hướng dẫn học sinh của mình bấm máy tính theo cách này để đưa ra đáp án, nhưng không giải thích cho học sinh biết tại sao làm như vậy vì: Đối với HS K12 khi học hàm điều hòa ở HK1 thì kiến thức về số phức số ảo bên môn Toán tôi quên HK2 cái em mới học. Cho nên cái em chỉ biết cách bấm và đưa ra đáp số chứ không biết tại sao phải làm như vậy !!!

Trích câu trả lời của câu hỏi 3 của GV4

Như vậy, trong thực tế dạy học, đa số GV dạy môn Vật lý có hướng dẫn HS bấm máy tính ở chế độ CMPLX để tổng hợp hai dao động điều hòa nhưng không giải thích cho HS biết cơ sở của việc bấm máy tính đó.

Trong số GV điều tra có 4 GV không chỉ cho HS cách bấm máy tính để giải bài toán. Vậy sự chênh lệch trong cách dạy học của các GV khác nhau ảnh hưởng như thế nào đến việc học của HS? Việc GV không giải thích chi tiết cho HS cơ sở của việc bấm máy tính để giải các bài toán vật lý sẽ dẫn đến hệ quả gì? HS gặp khó khăn gì trong việc giải quyết các bài toán về tổng hợp hai dao động điều hòa? Đó là những câu hỏi mà chúng ta cần quan tâm và tìm ra câu trả lời thỏa đáng.

5. Kết luận

Việc phân tích thực hành dạy học của GV Toán về khái niệm số phức và thực hành dạy học của GV Vật lý về dao động điều hòa cho thấy việc trình bày các kiến thức này trong SGK chưa tạo điều kiện thuận lợi cho dạy học liên môn giữa Toán và Vật lý. GV cũng chưa quan tâm đến mối liên hệ liên môn này. Mặc dù GV Vật lý có sử dụng kiến thức số phức một cách ngầm ẩn khi hướng dẫn HS bấm máy tính để giải các bài toán tổng hợp hai dao động điều hòa, tuy nhiên, họ không quan tâm đến cơ sở của phương pháp cũng như kiến thức ẩn sau phương pháp đó. Việc giải thích cho HS không được GV tính đến.

Kết quả phân tích thực hành dạy học của GV cho phép chúng tôi đưa ra một số đề xuất sau:

– Việc tổ chức các kiến thức trong chương trình và SGK các môn học cần tạo thành một khối thống nhất, có tính đến tính liên môn giữa các môn học để tạo điều kiện cho GV có thể dạy học liên môn. Chính điều này sẽ giúp HS thấy được ý nghĩa của việc học toán, tạo cơ hội cho họ phát triển các năng lực mô hình hóa toán học và năng lực giải quyết vấn đề.

– Trong việc đào tạo GV ở các trường sư phạm, cần quan tâm đến việc tổ chức các chuyên đề về dạy học liên môn, cung cấp cho họ cái nhìn tổng thể về chương trình giáo dục phổ thông của môn toán và các môn học khác. Cần cung cấp cho sinh viên những tình huống, ví dụ cụ thể về dạy học liên môn để từ đó họ có thể sáng tạo ra những tình huống khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lương Duyên Bình, Dư Trí Công, Nguyễn Hữu Hô (2001), *Vật lý đại cương*, tập hai, Điện - Dao động - Sóng, Nxb Giáo dục.
2. Lương Duyên Bình (2008), *Vật lý 12 cơ bản*, Nxb Giáo dục.
3. Lương Duyên Bình (2008), *Vật lý 12 cơ bản*, Sách giáo viên, Nxb Giáo dục.
4. Lương Duyên Bình (2008), *Bài tập vật lý 12 cơ bản*, Nxb Giáo dục.
5. Nguyễn Kim Đính (2014), *Kỹ thuật điện (dùng cho sinh viên Bách khoa)*, Nxb Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.
6. Đoàn Quỳnh (2008), *Giải tích 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
7. Đoàn Quỳnh (2008), *Giải tích 12 nâng cao*, Sách giáo viên, Nxb Giáo dục.
8. Đoàn Quỳnh (2008), *Bài tập giải tích 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
9. Nguyễn Đình Trí (2006), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập một, Nxb Giáo dục.
10. Võ Như Ý (2016), *Khái niệm số phức trong dạy học Toán và Vật lý ở trường phổ thông*, Trường Đại học Sư phạm TPHCM, Luận văn Thạc sỹ Khoa học giáo dục.

CÁC YẾU TỐ VÀ KỸ NĂNG ĐỂ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

*Phạm Sỹ Nam**, *Phan Anh Tài***, *Nguyễn Văn Thuận****, *Phạm Thị Thanh Tú*****

Tóm tắt

Giải quyết vấn đề được xác định là một trong những năng lực cần thiết của người học trong thế kỉ 21, đặc biệt là năng lực giải quyết bài toán liên quan đến thực tiễn. Việc kết nối toán học với thực tiễn là yêu cầu trong dạy học Toán, tuy nhiên việc thực hiện ở Việt Nam vẫn còn hạn chế. Bài viết chỉ ra những khó khăn của học sinh trong việc giải bài toán liên quan đến thực tiễn và đề xuất các yếu tố và kỹ năng cần thiết cho việc giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Từ khóa: *Giải quyết vấn đề, bài toán liên quan đến thực tiễn, kỹ năng giải quyết vấn đề.*

Abstract

Problem solving is identified as one of the necessary capacities for learners in the 21st Century, especially their capacity to solve problems related to real life. Linking mathematics with real life is a requirement in mathematics teaching, however, opportunities for this kind of practical problem solving are still limited in Vietnam. The article points to difficulties experienced by students in solving problems related to real life and proposes some necessary factors and skills that might better connect mathematics to solving real-life problems.

Keywords: *Problem solving, mathematical problem relate to real life, problem solving skill.*

1. Mở đầu

Theo Stephen Krulik và Jesse Rudnick (1980): Giải quyết vấn đề (GQVĐ) chỉ quá trình mà một cá nhân sử dụng kiến thức, kỹ năng và hiểu biết đã học trước đó để đáp ứng đòi hỏi của những tình huống không quen thuộc đang gặp phải. Như vậy, GQVĐ hiểu theo nghĩa thông thường là tìm kiếm những giải pháp thích ứng để giải quyết các khó khăn, trở ngại.

Theo Nguyễn Thị Lan Phương (2014): “Năng lực GQVĐ là khả năng cá nhân sử dụng hiệu quả các quá trình nhận thức, hành động và thái độ, động cơ, cảm xúc để giải quyết những tình huống vấn đề mà ở đó không có sẵn quy trình, thủ tục, giải pháp thông thường“. Năng lực GQVĐ chiếm vị trí quan trọng hàng đầu trong hoạt động giảng dạy ở nhiều quốc gia trên thế giới, điều này được thể hiện trong chương trình phổ thông của nhiều nước như Mỹ, Australia... Giải quyết vấn đề luôn đóng vai trò quan trọng trong việc học toán. Vì ý nghĩa, tầm quan trọng của nó mà Hội đồng Quốc gia giáo viên Toán của Hoa Kỳ (NCTM, 1980) đã nhấn mạnh “GQVĐ nên là trọng tâm của toán học phổ thông”. Gần đây hơn, GQVĐ một lần nữa được nhấn mạnh trong tuyên bố về “Tâm nhìn cho TH nhà trường” của Hội đồng GV toán Quốc gia Hoa Kỳ **Error! Reference source not found.**, theo đó HS sẽ trở lên linh hoạt và tháo vát trong GQVĐ,

* TS, Đại học Sài Gòn

** TS, Đại học Sài Gòn

*** TS, Đại học Vinh

**** TS, Đại học Sài Gòn

GQVĐ vừa được coi là một mục tiêu của giáo dục TH, vừa được coi như một công cụ cho việc học môn Toán. Trong thập kỷ qua, nhiều nhà toán học cũng đã kêu gọi việc dạy học toán học gắn với thực tiễn, dựa trên quan niệm kiến thức, kỹ năng phải được đặt vào ngữ cảnh ở thế giới thực, từ đó, xuất hiện xu thế là gắn GQVĐ với tình huống có liên quan đến thực tiễn. Việc dạy học toán học kết nối với thực tiễn sẽ tạo cơ hội cho học sinh thấy được ý nghĩa của kiến thức toán học, tạo được động lực trong học tập toán và có ý thức vận dụng toán học vào đời sống. Tuy nhiên, thực tế giảng dạy toán ở phổ thông cho thấy các bài toán có liên quan đến thực tiễn chưa thực sự được chú trọng, điều này được thể hiện ở số bài tập có liên quan đến thực tiễn trong các bài tập của sách giáo khoa không nhiều và ít xuất hiện trong các đề thi.

Trong bài viết này chúng tôi tập trung vào trả lời các câu hỏi nghiên cứu sau đây:

Câu hỏi số 1: Những yếu tố và kỹ năng nào là cần thiết cho việc giải bài toán có liên quan đến thực tiễn?

Câu hỏi số 2: Vận dụng các yếu tố và kỹ năng đó như thế nào trong giải bài toán có liên quan đến thực tiễn?

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Những yếu tố và kỹ năng cần thiết cho việc giải bài toán có liên quan đến thực tiễn

2.1.1. Giải quyết vấn đề

Theo Trần Vui (2017, tr.14) “vấn đề là một tình huống đặt ra cho cá nhân hoặc một nhóm để giải quyết, mà khi đối mặt với tình huống này họ không thấy được ngay các phương án hoặc con đường để thu được lời giải”. Trong định nghĩa này, cốt lõi của định nghĩa này là cụm từ “*không thấy được ngay các phương án hoặc con đường để thu được lời giải*”. Theo Trần Vui (2017, tr.18): “Giải quyết vấn đề liên quan đến việc đối mặt với một bài toán mà lời giải của nó chưa biết được trước. Những người giải quyết vấn đề giỏi có một “tư chất toán học”, họ phân các tình huống một cách cẩn thận bằng các thuật ngữ toán học và đặt ra các bài toán một cách tự nhiên dựa trên những điều họ thấy được”. Giáo viên đóng một vai trò quan trọng trong việc phát triển kỹ năng giải quyết vấn đề của học sinh. Giáo viên phải chọn được những vấn đề lôi cuốn được học sinh, phải tạo ra được một môi trường nhằm động viên học sinh khám phá, dám mạo hiểm, chia sẻ thất bại cũng như thành công và luôn đặt câu hỏi với nhau. Trong những môi trường có tính động viên như vậy, học sinh sẽ phát triển được tính tự tin khám phá các vấn đề và khả năng đưa ra những điều chỉnh trong phương án cụ thể nhằm giải quyết vấn đề của mình.

Theo Nguyễn Thị Lan Phương (2014), năng lực GQVĐ bao gồm 4 thành tố. Mỗi thành tố bao gồm một số hành vi cá nhân khi làm việc độc lập hoặc khi làm việc nhóm trong quá trình GQVĐ. Bốn thành tố đó là:

– *Tìm hiểu vấn đề*: Nhận biết tình huống có vấn đề; xác định, giải thích thông tin; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác.

– *Thiết lập không gian vấn đề*: Thu thập, sắp xếp và đánh giá độ tin cậy của thông tin; kết nối thông tin với kiến thức đã học (lĩnh vực/ môn học/ chủ đề); xác định

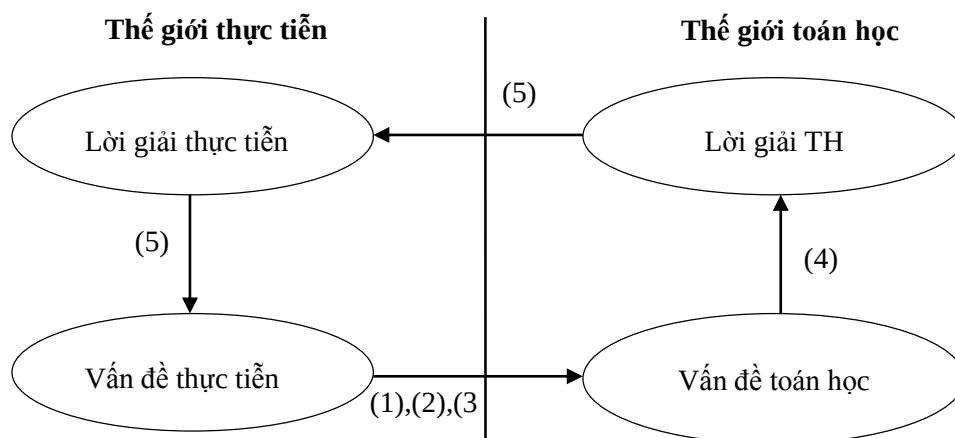
cách thức, quy trình, chiến lược giải quyết; thống nhất cách hành động để thiết lập không gian vấn đề.

– *Lập kế hoạch và thực hiện giải pháp*: Thiết lập tiến trình thực hiện cho giải pháp đã lựa chọn (thu thập dữ liệu, thảo luận, xin ý kiến, giải quyết các mục tiêu, xem xét lại giải pháp,... và thời điểm giải quyết từng mục tiêu); phân bổ và xác định cách sử dụng nguồn lực (tài nguyên, nhân lực, kinh phí, phương tiện,...); thực hiện và trình bày giải pháp cho vấn đề; Tổ chức và duy trì hoạt động nhóm khi thực hiện giải pháp (điều chỉnh, giám sát để phù hợp với không gian vấn đề khi có sự thay đổi).

– *Đánh giá và phản ánh giải pháp*: Đánh giá giải pháp đã thực hiện; phản ánh giá trị của giải pháp; xác nhận kiến thức và khái quát hóa cho vấn đề tương tự; đánh giá vai trò của cá nhân với hoạt động nhóm.

2.1.2. Các bước giải bài toán có liên quan đến thực tiễn

Quá trình giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn về cơ bản là một quá trình mô hình hóa toán học (TH) theo PISA, được thể hiện theo sơ đồ sau:



Sơ đồ 1.3. Quy trình mô hình hóa toán học của OECD/PISA
(dẫn theo Trần Vui (2014)[tr.81])

Ở Sơ đồ 1.3: (1) Bắt đầu từ một vấn đề được đặt ra trong thế giới thực; (2) Nhận ra các kiến thức toán phù hợp với vấn đề, tổ chức lại vấn đề theo các khái niệm TH; chọn lọc các yếu tố thực tiễn để chuyển vấn đề thành một bài toán thể hiện cho tình huống; (3) Chuyển đổi từ vấn đề thực tiễn (vấn đề chứa tình huống có liên quan đến thực tiễn) sang vấn đề TH (vấn đề chỉ trong nội bộ môn Toán, không chứa các tình huống có liên quan đến thực tiễn), xác định các thông tin TH cần thiết, nhận ra các khái niệm TH, đưa ra các cấu trúc, biểu diễn, đặc trưng TH liên quan để đưa bài toán thực tiễn đã xây dựng về một mô hình TH cụ thể; (4) Lựa chọn, sử dụng phương pháp và công cụ TH phù hợp để giải quyết một vấn đề đã được thiết lập dưới dạng mô hình TH. Sản phẩm cuối cùng ở bước này là một kết quả TH; (5) Xem xét kết quả TH trong ngữ cảnh của tình huống liên quan đến thực tiễn ban đầu, điều chỉnh các kết quả cho phù hợp và làm cho kết quả đó có ý nghĩa đối với tình huống trong thực tiễn, xác định những hạn chế của lời giải.

Từ quá trình trên có thể tóm lược 5 bước chính để giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn, đó là:

Bước 1: Hiểu được bài toán, thu nhận được thông tin từ bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Bước 2: Chuyển đổi thông tin từ tình huống thực tiễn về mô hình toán học (bài toán trong nội bộ môn Toán).

Bước 3: Tìm kiếm định hướng để giải quyết mô hình toán học.

Bước 4: Thực hiện các phương pháp giải hợp lí để tìm ra kết quả.

Bước 5: Chuyển từ kết quả được giải quyết trong mô hình toán học sang lời giải của bài toán có nội dung thực tiễn.

Như vậy, để giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn phải trải qua nhiều bước. Các bước được trình bày như là “bản đồ chỉ đường đi” và khác với một thuật toán ở chỗ là nó không đảm bảo cho việc thành công. Việc giải quyết vấn đề thành công đòi hỏi ở người học không chỉ kiến thức mà còn biết “sử dụng hiệu quả quá trình nhận thức, hành động và thái độ, động cơ, cảm xúc” (Nguyễn Thị Lan Phương (2014). Vậy những yếu tố và kỹ năng nào ảnh hưởng đến việc giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn thành công?

2.1.3. Các yếu tố và kỹ năng để giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn

Từ các bước giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn có thể thấy rằng: Việc nắm vững các kiến thức toán học là quan trọng nhưng không đủ để giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn. Học sinh cần có cơ hội học cách sử dụng những kiến thức toán học này để phát triển kỹ năng tư duy và giải quyết vấn đề. Các nhà giáo dục toán học đã chấp nhận ý tưởng rằng sự phát triển của khả năng giải quyết vấn đề đáng được chú ý đặc biệt. Alan Schoenfeld (1985) cho rằng sự hiểu biết và giảng dạy toán học nên được tiếp cận như là một lĩnh vực giải quyết vấn đề. Theo Schoenfeld, bốn loại kiến thức / kỹ năng cần thiết để thành công trong toán học:

- Kiến thức về các định đề và thuật giải của toán học;
- Các chiến lược và kỹ thuật để giải quyết vấn đề;
- Sự điều khiển: Quyết định về khi nào, kiến thức toán học cơ bản và chiến lược gì được sử dụng;
- Một quan niệm về thế giới toán học xác định làm thế nào để một người tiếp cận vấn đề.

Từ quan điểm của Schoenfeld cho thấy, việc giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn là một quá trình phụ thuộc vào nhiều kỹ năng và các yếu tố. Dựa trên quan điểm đó có thể thấy rằng những yếu tố và kỹ năng cần thiết cho việc giải quyết vấn đề là: Các khái niệm và tình huống thực tiễn; Kỹ năng giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn; Tư duy và suy luận; Siêu nhận thức và Thái độ học tập.

Các khái niệm và tình huống thực tiễn là cần thiết cho việc hiểu nội dung của bài toán có liên quan đến thực tiễn và cũng là cơ sở cho việc giải quyết bài toán. Kỹ năng giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn; Tư duy và suy luận; Siêu nhận thức cần thiết cho việc đưa ra chiến lược và định hướng, thuật giải cũng như việc thực hiện giải quyết bài toán. Thái độ học tập cần thiết cho việc tạo động cơ, động lực và sự bền bỉ

khi giải quyết vấn đề. Làm việc nhóm cần thiết cho việc hỗ trợ, hợp tác để giải quyết bài toán thành công.

i) Các khái niệm và tình huống liên quan đến thực tiễn

Các bài toán có liên quan đến thực tiễn bên cạnh chứa nội dung toán học còn có những nội dung liên quan các tình huống trong thực tiễn. Vì vậy, người học cần một sự hiểu biết sâu sắc về kiến thức toán học và các tình huống thực tiễn liên quan trong bài toán cần giải quyết. Chẳng hạn, khi giải quyết bài toán về chuyển động người học cần có sự hiểu biết các khái niệm quãng đường, thời gian, vận tốc và mối liên hệ giữa chúng, hiểu khái niệm chuyển động chậm dần đều, hiểu được các yếu tố thay đổi như thế nào khi xe dừng hẳn... Khi giải quyết bài toán về lãi suất người học cũng cần phải hiểu các khái niệm tiền vốn, tiền lãi, lãi suất, cấp số nhân, cách tính tiền lãi...

ii) Kỹ năng giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn

Để giải bài toán có liên quan đến thực tiễn cần có hai giai đoạn chính: Chuyển từ bài toán có liên quan thực tiễn về bài toán trong nội bộ Toán học và giải quyết bài toán đó. Chính vì vậy, hai kỹ năng chính cần có, đó là: Kỹ năng toán học cơ bản và kỹ năng mô hình hóa. Kỹ năng toán học cơ bản như giải phương trình và bất phương trình là cần thiết cho việc giải quyết bài toán. Kỹ năng mô hình hóa cần thiết để thu nhận được thông tin từ tình huống thực tiễn và chuyển đổi thông tin từ tình huống thực tiễn về bài toán chỉ trong nội bộ môn Toán.

iii) Tư duy và suy luận

Tư duy phê phán và suy luận là cần thiết trong tất cả các bước giải quyết vấn đề. Học sinh thường không nhìn lại và nhận xét về giải pháp của bài toán khi nó được giải. Họ thường chấp nhận bất cứ câu trả lời mà họ có được. Tư duy phê phán là cần thiết khi trích ra thông tin từ các văn bản của bài toán, xây dựng và giải quyết bài toán và phân tích các giải pháp thu được, chẳng hạn học sinh cần dựa trên những dữ kiện của bài toán để có sự phân tích về định hướng lời giải, nên lựa chọn hướng giải nào để thành công và có được lời giải tối ưu; khi giải được mô hình toán học để trả lời kết quả cho bài toán thực tiễn cũng cần đến việc xem xét kết quả nào là phù hợp và kết quả nào không phù hợp với bài toán có liên quan đến thực tiễn ban đầu.

iv) Siêu nhận thức

“Siêu nhận thức” (metacognition) là thuật ngữ lần đầu tiên được Flavell (1979) sử dụng để nói đến khái niệm suy nghĩ về những suy nghĩ, nhận thức về nhận thức. Nói một cách khác, đó là tư duy của từng cá nhân về suy nghĩ của họ. Thuật ngữ siêu nhận thức đề cập đến kiến thức của người học về quá trình nhận thức của người đó và khả năng kiểm soát và giám sát các quá trình đó. Người học phải kiểm soát và suy ngẫm về các quá trình nhận thức của mình để giải quyết những vấn đề có tính thách thức. Người ta nghĩ rằng cách tốt nhất để giúp học sinh nhận thức về tư duy là tạo ra cơ hội để họ giải thích rõ ràng về quá trình suy nghĩ của họ.

Theo J. Wilson (1998), Siêu nhận thức có ba chức năng cơ bản: Chức năng nhận biết (awareness function), chức năng đánh giá (evaluation function) và chức năng điều chỉnh (regulation function) [10]:

– Chức năng nhận biết đề cập đến khả năng hiểu biết của mỗi người về các quá trình nhận thức, những chiến lược học tập và những kiến thức vốn có; ý thức của bản thân về khả năng nhận thức của chính mình. Chức năng nhận biết của Siêu nhận thức bao gồm: Ý thức được mình biết những gì; xác định mục tiêu học tập; xem xét các nguồn lực, các điều kiện học tập; tư duy về những gì nhiệm vụ đặt ra; tìm ra cách thức để đánh giá việc thực hiện; nhận thấy những thuận lợi và khó khăn trong quá trình học.

– Chức năng đánh giá của Siêu nhận thức đề cập đến sự theo dõi các quá trình tư duy và đánh giá điểm mạnh, điểm yếu trong quá trình tư duy của một người ở những tình huống cụ thể. Trong đó mỗi người có thể đưa ra nhận xét của mình về hiệu quả tư duy và việc lựa chọn các chiến lược. Qua các tiêu chí đánh giá, người học nhìn lại quá trình học tập của mình và biết mức độ hoàn thành nhiệm vụ nhận thức đã được đặt ra. Chức năng này có nhiệm vụ theo dõi, kiểm tra tính hiệu quả của kế hoạch và những chiến lược đã sử dụng.

– Chức năng điều chỉnh của Siêu nhận thức diễn ra khi các cá nhân điều chỉnh quá trình tư duy của mình. Họ sử dụng các kỹ năng Siêu nhận thức để điều khiển kiến thức và tư duy. Đồng thời họ suy ngẫm về quá trình tư duy và vốn kiến thức của bản thân và đưa ra những thay đổi cần thiết.

v) *Thái độ học tập*

Người học có nguy cơ thất bại trong việc giải quyết một vấn đề nhất định hoặc việc giải quyết vấn đề cũng mất nhiều thời gian vì vậy cần ở người học sự bền bỉ, tích cực hợp tác (trong hoạt động nhóm). Họ cũng phải hiểu rằng học tập diễn ra ngay cả khi họ không thể giải quyết vấn đề. Học sinh không học hỏi nhiều từ các vấn đề mà họ có thể dễ dàng giải quyết, họ học hỏi nhiều hơn từ những thách thức khó khăn mà họ phải kiên trì. Tuy nhiên, với những bài toán có tính thách thức mà không thể giải quyết được nếu không có sự hỗ trợ thì học sinh có thể nản lòng và phát sinh một thái độ tiêu cực đối với giải quyết vấn đề toán học. Nhiệm vụ của người giáo viên khi hướng dẫn không phải là dễ dàng, giáo viên không được cung cấp quá nhiều thông tin để học sinh không có gì để suy nghĩ nhưng cũng nên để học sinh không bị nản chí.

vi) *Làm việc nhóm*

Thực tế cho thấy rằng, học tập hợp tác và các hoạt động nhận thức có ảnh hưởng tích cực đến khả năng của học sinh trong việc giải quyết các vấn đề. Kỹ năng làm việc nhóm cần thiết cho công việc sau này. Vì vậy, trong dạy học cần tạo cơ hội để học sinh được làm việc nhóm, được trao đổi, thảo luận, phản biện. Đây cũng là một trong những yếu tố có ảnh hưởng đến giải quyết vấn đề bởi mỗi cá nhân có thể giải quyết được một khía cạnh của bài toán và chưa giải quyết được trọn vẹn bài toán nhưng với sự kết hợp với cá nhân khác có thể hoàn thành được.

Các bài toán đơn giản có thể không cần tất cả các kỹ năng được liệt kê ở trên, tuy nhiên các bài toán có tính thách thức (bài toán mà phương pháp giải không phải ngay lập tức nhìn thấy rõ ràng) cần có một chiến lược liên quan đến hầu hết các kỹ năng và yếu tố. Sự thể hiện của các yếu tố “thái độ học tập”, “làm việc nhóm” không thực sự rõ ràng dưới các kết quả cụ thể, nên trong phần sau này chúng tôi chủ yếu mô tả việc vận dụng các yếu tố còn lại.

2.2. Vận dụng các yếu tố và kỹ năng đó như thế nào trong giải bài toán có liên quan đến thực tiễn

Trong phần này, chúng tôi thiết kế các hoạt động học tập giải bài toán có liên quan đến thực tiễn nhằm vận dụng các yếu tố và kỹ năng giải quyết vấn đề đã được xác định ở trên. Các hoạt động được thiết kế nhằm tạo cơ hội để học sinh vận dụng kiến thức đã học để giải quyết các bài toán có liên quan đến thực tiễn. Việc vận dụng các yếu tố và kỹ năng được thể hiện trong việc xây dựng hệ thống câu hỏi để giải bài toán có liên quan đến thực tiễn theo từng bước đã được trình bày ở trên:

Các câu hỏi trong bước 1 thường tạo cơ hội để HS vận dụng việc hiểu các khái niệm và tình huống liên quan đến thực tiễn. Chẳng hạn, trong hoạt động được trình bày dưới đây, HS cần hiểu mối liên hệ giữa các khái niệm vận tốc, quãng đường và mối liên hệ giữa chúng với khái niệm toán học là đạo hàm, tích phân, hiểu quá trình chuyển động chậm dần đều, biết được với điều kiện nào thì xe dừng hẳn?

Hệ thống câu hỏi trong các bước 2,3,4,5 nhằm tạo cơ hội để HS vận dụng các yếu tố, kỹ năng: Kỹ năng giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn, Tư duy và suy luận, Siêu nhận thức nhằm giúp HS chuyển đổi bài toán thực tiễn về bài toán chỉ trong nội bộ môn Toán, xác định các định hướng giải và thực hiện được lời giải để tìm ra kết quả. Hệ thống câu hỏi hỗ trợ HS trong những tình huống khó khăn có một số tác dụng: Thứ nhất, tạo điều kiện cho các em vận dụng các kỹ năng giải toán, suy luận và thực hiện các chức năng của siêu nhận thức, đó là: kiểm soát và suy ngẫm về các quá trình nhận thức, nhận biết dấu hiệu của bài toán để sử dụng công cụ thích hợp, điều chỉnh quá trình nhận thức. Thứ hai, nhằm giúp HS không nản chí, giữ được thái độ tích cực khi giải quyết, hệ thống câu hỏi cũng tạo cơ hội để HS xác định rõ vấn đề từ đó giúp cho hoạt động nhóm được hiệu quả.

Trong dạy học toán bên cạnh việc dạy những kỹ năng giải toán cơ bản thì việc dạy cho học sinh hiểu khái niệm và vận dụng chúng trong thực tiễn cuộc sống là điều cần thiết. Nhằm thực hiện ý tưởng này, chúng tôi xây dựng bài tập theo hướng; Tạo cơ hội để học sinh được vận dụng kiến thức toán học vào giải quyết tình huống có liên quan đến thực tiễn, chú trọng hơn việc tạo cơ hội để HS vận dụng ý nghĩa của khái niệm toán học. Cụ thể, hoạt động được thiết kế nhằm tạo cơ hội để HS vận dụng ý nghĩa Vật lý của các khái niệm đạo hàm, tích phân để giải quyết bài toán trong cuộc sống.

Tương ứng với định hướng trên, chúng tôi thiết kế hoạt động học tập được thực hiện cho học sinh lớp 12. Hoạt động này được tiến hành sau khi học sinh học xong nội dung tích phân.

Hoạt động.

Một ô tô đang chạy đều với vận tốc a (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc thay đổi theo hàm số $v = -5t + a$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi vận tốc ban đầu a của ô tô là bao nhiêu, biết từ lúc đạp phanh cho đến khi dừng hẳn ô tô di chuyển được 40 mét.

Sau đây, chúng tôi xây dựng các câu hỏi nhằm hỗ trợ học sinh trong việc giải quyết vấn đề. Các câu hỏi nhằm mục đích hỗ trợ học sinh giải quyết các khó khăn nhưng đồng thời thông qua hệ thống câu hỏi cũng cho học sinh cách thức để hình thành

và phát triển cho học sinh các kỹ năng và yếu tố trong giải quyết vấn đề. Các khó khăn của học sinh thường gặp cũng tương ứng với 5 bước giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn. Cần lưu ý rằng các câu hỏi chỉ được hỗ trợ theo từng bước khi học sinh không giải quyết được.

Bước 1. Hiểu được bài toán, thu nhận được thông tin từ bài toán có liên quan đến thực tiễn.

H: Giả thiết của bài toán là gì?

- Biết vận tốc của ô tô theo hàm số $v = -5t + a$.
- Biết quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 40 m.

H: Bài toán yêu cầu tìm cái gì? (Tìm vận tốc ban đầu a).

Bước 2. Chuyển đổi thông tin từ tình huống TT về mô hình TH.

H: Khi biết vận tốc của ô tô theo hàm số $v = -5t + a$ thì làm thế nào để tính được quãng đường từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn?

Gợi ý: Khi xét trên khoảng thời gian Δt rất nhỏ thì quãng đường được xác định như thế nào?

Quãng đường cần tính có quan hệ gì với các quãng đường khi xét trên các khoảng thời gian Δt rất nhỏ nêu trên?

Có thể sử dụng kiến thức toán học gì để tính tổng các quãng đường trên các khoảng thời gian Δt rất nhỏ?

Trong Vật lý chúng ta biết rằng, đối với mỗi chuyển động thẳng, xét trên một khoảng thời gian rất nhỏ Δt thì chuyển động đó có thể xem là chuyển động đều, khi đó quãng đường vật di chuyển được xác định bởi công thức $\Delta S = v \cdot \Delta t$. Nếu chia thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn thành các khoảng thời gian rất nhỏ Δt thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn chính là tổng các quãng đường mà xe di chuyển trên khoảng thời gian rất nhỏ Δt đó. Hơn nữa, với việc hiểu ý nghĩa của tích phân chính là “phép lấy tổng” thì quãng đường cần tính là tích phân của hàm vận tốc theo thời gian, với thời gian được xét từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn. Như vậy, để đạt được kết quả trên đòi hỏi HS phải vận dụng đến kiến thức được học về tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian rất nhỏ Δt . HS cần có chiến lược để tính quãng đường từ lúc đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn bằng cách chia nhỏ quãng đường cần tính thành các quãng đường trên các khoảng thời gian Δt rất nhỏ. Để tính được tổng các quãng đường đó đòi hỏi HS phải điều chỉnh nhận thức và kinh nghiệm, việc tính toán không đơn thuần chỉ là cộng thông thường mà cần sử dụng “công cụ” tích phân.

H: Làm thế nào để xác định được cận của tích phân?

Gợi ý: Khi ô tô dừng hẳn thì đại lượng nào bằng 0? (vận tốc)

Xác định thời gian lúc xe dừng hẳn theo a ? (Khi xe dừng hẳn vận tốc bằng 0 nên $-5t + a = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{5}$.)

H: Tính quãng đường từ lúc đạp phanh cho đến khi dừng hẳn theo a .

Khi học về ứng dụng Vật lí của đạo hàm HS đã biết được mối liên hệ $S'(t) = v(t)$ và tính chất của nguyên hàm $\int S'(t)dt = S(t) + C$. Từ hai kiến thức này HS có thể xác định được $S = \int_0^{\frac{a}{5}} v(t)dt = \int_0^{\frac{a}{5}} (-5t + a)dt = \frac{1}{10}a^2$. Khi đó, bài toán được chuyển về mô hình toán học là: Tìm a để $\frac{a^2}{10} = 40$.

Bước 3. Tìm kiếm định hướng để giải quyết mô hình toán học.

H: Giải phương trình $\frac{a^2}{10} = 40$?

Bước 4. Thực hiện các phương pháp giải hợp lí để tìm ra kết quả.

$$\frac{1}{10}a^2 = 40 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ a = -20 \end{cases}.$$

Bước 5. Chuyển từ kết quả được giải quyết trong mô hình toán học sang lời giải của bài toán có nội dung thực tiễn. (Do a là số dương nên $a = 20$. Vậy vận tốc ban đầu của ô tô là 20 m/s).

3. Kết luận

Việc xác định các yếu tố và kỹ năng giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn là cần thiết. Bởi, thông qua đó làm rõ những yếu tố ảnh hưởng đến việc giải quyết vấn đề có liên quan đến thực tiễn, xác định được những kỹ năng cần thiết để từ đó rèn luyện nhằm giúp cho việc giải quyết bài toán thành công. Bằng việc xác định các khó khăn trong giải quyết bài toán có liên quan đến thực tiễn, hệ thống câu hỏi hỗ trợ đã giúp học sinh từng bước giải quyết khó khăn và thông qua hệ thống câu hỏi đó hình thành và phát triển cho học sinh năng lực giải quyết vấn đề có liên quan đến thực tiễn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Flavell J. H. (1976). *Metacognitive aspects of problem solving*. The Nature of Intelligence, USA.
2. Judit N. Moschkovich (2002). *An Introduction of Examining Everyday and Academic Mathematical Practice*. Chapter 8 in *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom*, edited by Mary E. Brenner and Judit N. Moschkovich, A Monograph Series of the National Council of Teachers of Mathematic. Journal for Research in Mathematics Education.
3. Krulik, S., Rudnick, J.A. (1980). *Problem solving: A handbook for teachers* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.
4. National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.
5. Nguyễn Thị Lan Phương (2014). *Đề xuất cấu trúc và chuẩn đánh giá NL GQVĐ trong CT GDPT mới*. Tạp chí khoa học giáo dục, số 111, tháng 12/2014.

6. Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
7. Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Assoc.
8. Trần Vui (2014). *Giải quyết vấn đề thực tế trong dạy học toán*. NXB Đại học Huế.
9. Trần Vui (2017). *Từ các lý thuyết học đến thực hành trong giáo dục Toán*. NXB Đại học Huế.
10. Wilson J. (1998). *The Nature of Metacognition: What do primary school problem solvers do?*. National AREA conference, Melbourne University, Australia.

POSTER

Trần Lương Công Khanh

Trần Văn Hoan

Vương Vĩnh Phát

Nguyễn Văn Hồng

CẢI THIÊN VIỆC DẠY VÀ HỌC KHÁI NIỆM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẰNG PHẦN MỀM GRAPH

Trần Lương Công Khanh*

Tóm tắt

Trong các ví dụ và bài tập của sách Giải tích 12 và sách Giải tích 12 nâng cao, đường tiệm cận không có điểm chung với đồ thị hàm số. Điều này đặt ra hai câu hỏi:

- Các ví dụ và bài tập này có làm cho học sinh hình thành quan niệm sai lầm là tiệm cận không có điểm chung với đồ thị hàm số hay không?

- Nếu có, làm thế nào giúp học sinh sửa chữa quan niệm sai lầm này?

Để trả lời hai câu hỏi đã đặt, chúng tôi khảo sát thực trạng quan niệm của học sinh về đường tiệm cận của đồ thị hàm số và hướng dẫn học sinh dùng phần mềm Graph để điều chỉnh những quan niệm sai lầm (nếu có).

Résumé

Dans les exemples et les exercices des manuels Analyse 12 et Analyse 12 avancée, l'asymptote n'a aucun point d'intersection avec la courbe représentative de fonction. Cela pose deux questions suivantes :

- Ces exemples et exercices amènent-ils l'élève à une conception erronée que l'asymptote n'a aucun point d'intersection avec la courbe représentative de fonction ?

- Si oui, comment faire pour aider l'élève à remédier cette conception erronée ?

Pour y répondre, nous enquêtons les conceptions des élèves sur l'asymptote à la courbe représentative de fonction et guidons les élèves dans l'utilisation du logiciel Graph pour remédier éventuellement les conceptions erronées.

Trong bài Đường tiệm cận (sách Giải tích 12) và Đường tiệm cận của đồ thị hàm số (sách Giải tích 12 nâng cao), hai quyển sách giáo khoa đều cho ví dụ đường tiệm cận không có điểm chung với đồ thị hàm số. Trong các bài tập áp dụng hoặc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số, các tiệm cận tìm được cũng không có điểm chung với đồ thị hàm số. Điều này đặt ra hai câu hỏi:

– Cách trình bày của sách giáo khoa có làm cho học sinh hình thành quan niệm sai lầm là tiệm cận của đồ thị hàm số không có điểm chung với đồ thị hàm số hay không?

– Nếu có, làm thế nào giúp học sinh sửa chữa quan niệm sai lầm này?

Bài viết này trả lời hai câu hỏi nói trên bằng việc khảo sát thực trạng quan niệm của học sinh về đường tiệm cận của đồ thị hàm số qua phiếu thăm dò ý kiến và xây dựng các giải pháp giúp học sinh điều chỉnh các quan niệm chưa chính xác với sự trợ giúp của phần mềm GRAPH, từ đó, giúp học sinh hiểu rõ hơn tri thức toán này.

Khảo sát quan niệm của học sinh về tiệm cận của đồ thị hàm số

Chúng tôi tiến hành khảo sát 51 học sinh chọn ngẫu nhiên từ 10 lớp 12 năm học 2015-2016 của trường trung học phổ thông chuyên Trần Hưng Đạo (Phan Thiết, Bình

* TS, Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận

Thuận). Học sinh được khảo sát phải trả lời phiếu thăm dò ý kiến trong thời gian 15 phút và không được trao đổi hay sử dụng tài liệu. Phiếu thăm dò ý kiến gồm các câu hỏi sau:

– Theo em, giữa đường tiệm cận và đồ thị hàm số có thể có điểm chung không? Vì sao (em có thể giải thích bằng lời hoặc đồ thị)?

– Nếu cần giải thích dễ hiểu và ngắn gọn cho bạn về đường tiệm cận của đồ thị hàm số, em sẽ nói thế nào?

Câu trả lời mà chúng tôi mong đợi từ học sinh là:

– Đường tiệm cận và đồ thị hàm số có thể có điểm chung hoặc không có điểm chung vì định nghĩa của đường tiệm cận chỉ đề cập đến các giới hạn mà không đề cập đến điểm chung giữa đường tiệm cận và đồ thị hàm số.

– Đường tiệm cận của đồ thị hàm số là đường thẳng rất “gần” với đồ thị hàm số khi $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \pm\infty$). Hoặc đường tiệm cận của đồ thị hàm số là đường thẳng xấp xỉ với đồ thị hàm số khi $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \pm\infty$).

Dưới đây là kết quả thống kê các câu trả lời của học sinh:

– Về điểm chung giữa đường tiệm cận và đồ thị hàm số: 50/51 học sinh cho rằng giữa đường tiệm cận và đồ thị hàm số không thể có điểm chung. 50 học sinh này đều giải thích bằng lời rằng “đường tiệm cận ngày càng gần với đồ thị hàm số nhưng không bao giờ cắt đồ thị hàm số”. Chỉ có 01/51 học sinh (chuyên toán) nghĩ rằng giữa đường tiệm cận và đồ thị hàm số có thể có điểm chung nhưng chỉ xảy ra với hàm số không sơ cấp.

– Về giải thích khái niệm đường tiệm cận của đồ thị hàm số : 51/51 học sinh đều tập trung vào ý “tiệm cận là đường thẳng ngày càng gần với đồ thị hàm số nhưng không bao giờ cắt đồ thị hàm số”. Riêng em học sinh chuyên toán đã nói ở trên có ghi thêm “tiệm cận của đồ thị hàm số không sơ cấp có thể cắt đồ thị”. Không học sinh nào giải thích đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng quan điểm “xấp xỉ”.

Tóm lại, phần lớn học sinh đều nghĩ rằng tiệm cận của đồ thị hàm số không có điểm chung với đồ thị. Ý nghĩa “xấp xỉ” của đường tiệm cận của đồ thị hàm số không được đề cập.

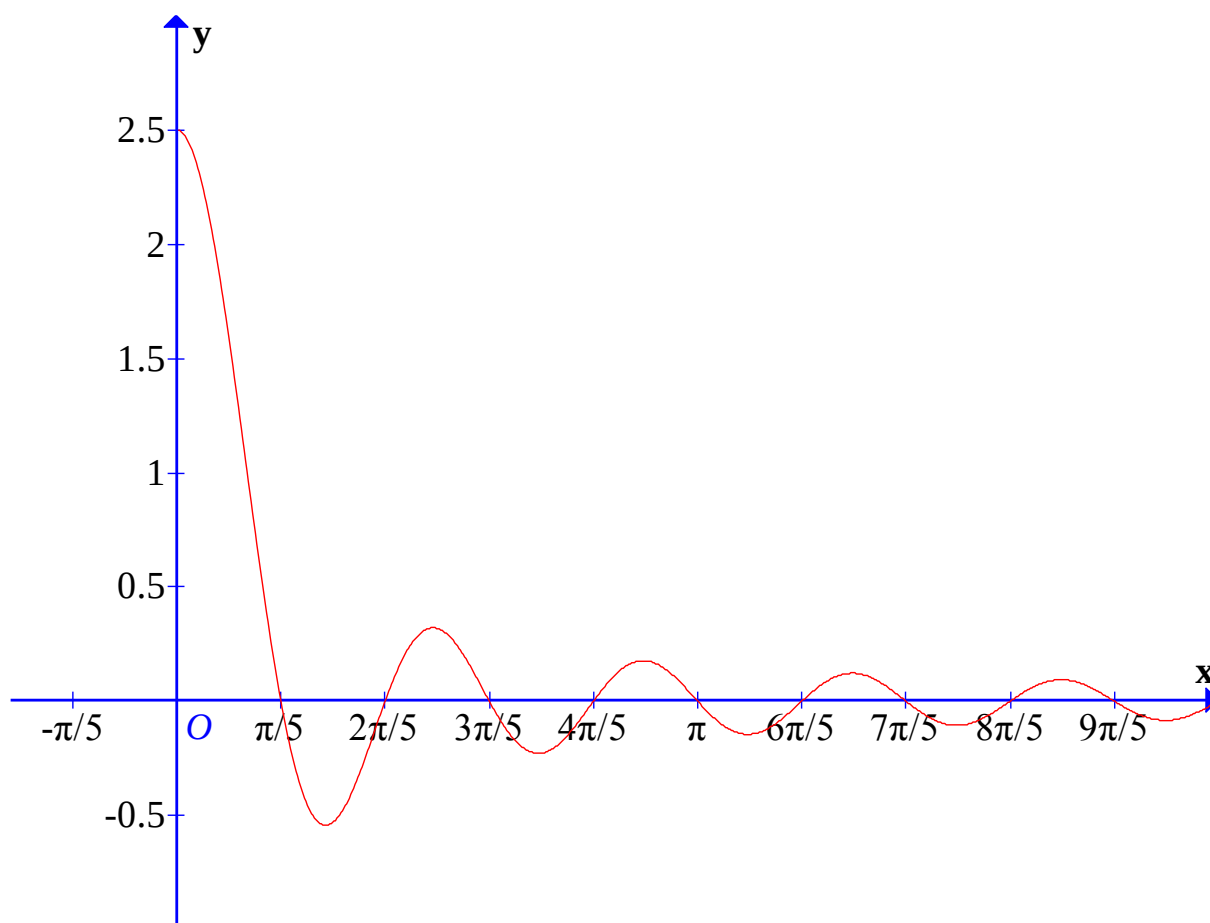
Từ kết quả khảo sát trên, chúng tôi tổ chức lần lượt ba hoạt động với sự hỗ trợ của một phần mềm tin học để giúp học sinh sửa chữa những sai lầm nói trên.

Hoạt động 1: Đường tiệm cận có thể cắt đồ thị của hàm số

Chúng tôi giới thiệu cho học sinh phần mềm *Graph*. Đây là một phần mềm mã nguồn mở có giao diện bằng nhiều thứ tiếng (trong đó có tiếng Việt), có thể tải về miễn phí tại trang web <http://www.padowan.dk>. Phần mềm *Graph* giúp người dùng vẽ đồ thị của hàm số trong hệ tọa độ Oxy và hệ tọa độ cực. Trong hệ tọa độ Oxy, phần mềm *Graph* có thể xử lý phương trình $y = f(x)$ lẫn phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Sau khi hướng dẫn học sinh cách sử dụng, chúng tôi yêu cầu các em dùng phần mềm *Graph* để vẽ đồ thị hàm số $y = (\sin 5x)/(2x)$ với $x > 0$ và nhận xét về vị trí tương đối giữa đồ thị hàm số và trục hoành. 51/51 học sinh đều thu được đồ thị hàm số như

hình 1 và đều nhận xét: đồ thị hàm số cắt phần dương của trục hoành tại vô hạn điểm. Ngoài ra, khi x tiến ra $+\infty$, khoảng cách giữa trục hoành và đồ thị ngày càng nhỏ.



Hình 1. Đồ thị hàm số $y = (\sin 5x)/(2x)$

Sau đó, chúng tôi yêu cầu học sinh dùng kiến thức đã học để chứng minh rằng đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số và tiệm cận ngang này cắt đồ thị tại vô hạn điểm.

Tất cả học sinh đều thành công trong việc chứng minh $(\sin 5x)/(2x)$ tiến về 0 khi x tiến về $+\infty$ và phương trình $y = 0$ có vô số nghiệm $x = k\pi/5$ với k nguyên dương.

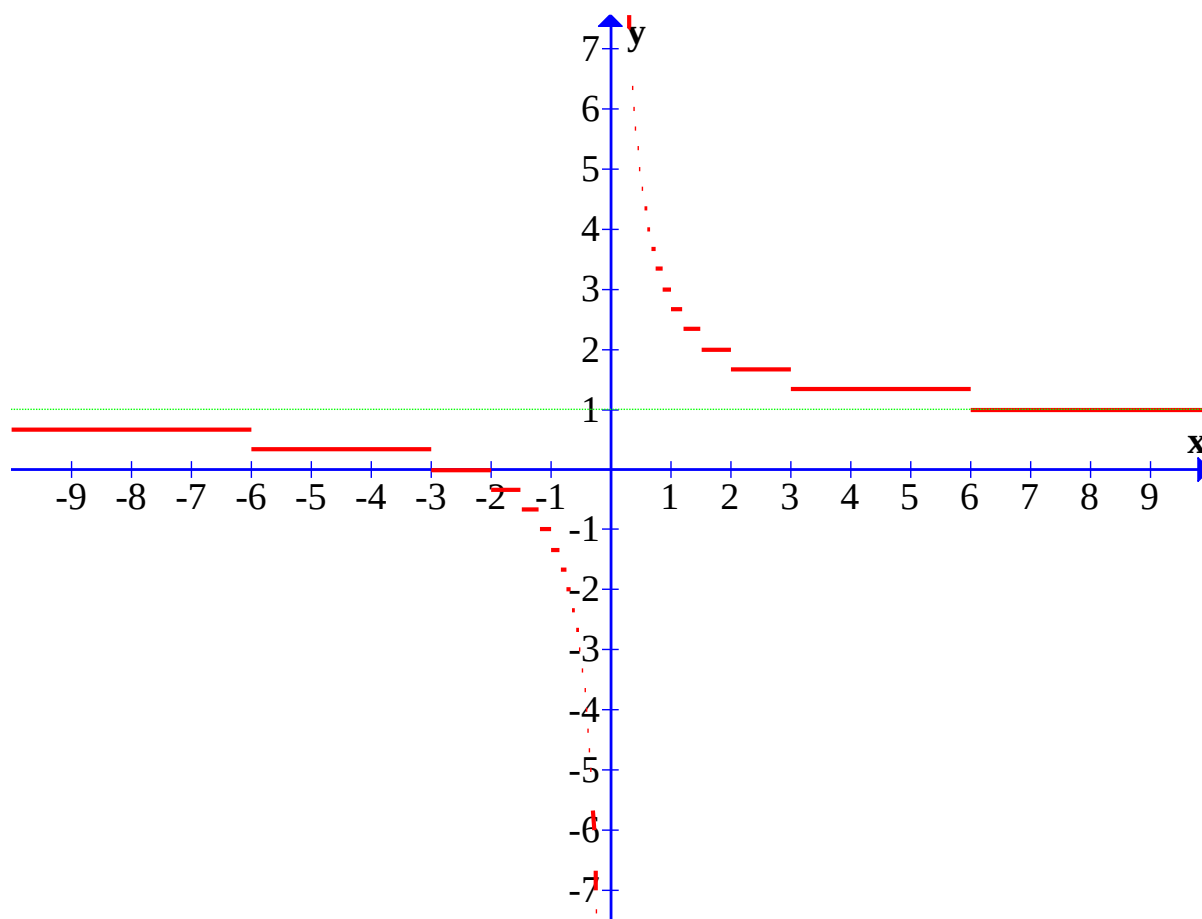
Ví dụ này cho thấy đồ thị hàm số không những cắt tiệm cận mà còn có thể cắt tại vô hạn điểm. Hơn nữa, hàm số đang xét lại là một hàm sơ cấp, trái với quan niệm cho rằng chỉ một số hàm không sơ cấp mới có tính chất này.

Hoạt động 2: Đồ thị "thẳng" cũng có tiệm cận

Một số học sinh cho rằng chỉ đồ thị “cong” mới có tiệm cận còn đồ thị “thẳng” không có tiệm cận. Đây cũng là một quan niệm sai lầm cần khắc phục. Chúng tôi đã yêu cầu học sinh tiến hành hoạt động 2 sau đây.

Dùng phần mềm *Graph* để vẽ đồ thị của hàm số f xác định trên $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ bởi $f(x) = 1 + (E(6/x))/3$ với $E(x)$ là phần nguyên của x . Đối với phần mềm *Graph*, cú pháp để xác định hàm này là $f(x) = 1 + \text{floor}(6/x)/3$.

Học sinh thu được đồ thị dưới đây (hình 2):



Hình 2. Đồ thị hàm số $y = 1 + (E(6/x))/3$

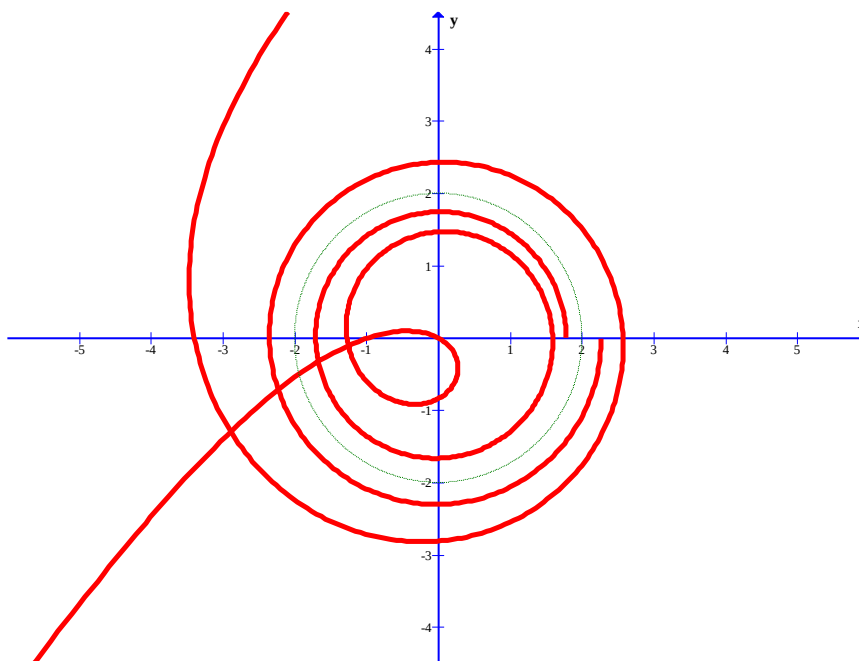
Trên hình 2, học sinh nhận thấy đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang và trùng với tiệm cận ngang này trên khoảng $(6; +\infty)$. Hoạt động này giúp học sinh nhận ra không chỉ đồ thị “cong” mới có tiệm cận mà đồ thị “thẳng” cũng có tiệm cận. Hơn nữa, đồ thị và tiệm cận còn trùng nhau trên một khoảng không bị chặn.

Hoạt động 3: Bản chất của đường tiệm cận - Đường tiệm cận cong

Từ các hoạt động 2 và 3, chúng tôi dẫn dắt học sinh đi đến bản chất của khái niệm tiệm cận: một đường thẳng là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu đường thẳng đó là một xấp xỉ của hàm số với độ chính xác tùy ý khi $x \rightarrow x_0$ hoặc $x \rightarrow \pm\infty$. Bản chất này giúp chúng ta có thể mở rộng tiệm cận thẳng thành tiệm cận cong - một khái niệm không được trình bày trong chương trình phổ thông.

Để giúp học sinh làm quen với khái niệm tiệm cận cong mà không phải đưa vào định nghĩa hình thức, chúng tôi hướng dẫn các em dùng phần mềm *Graph* để vẽ trong hệ tọa độ cực đường cong có phương trình $r = (2\varphi + 1)/(\varphi - 1)$ (đường liền nét) và đường tròn $(O; 2)$ có phương trình $r = 2$ (đường không liền nét).

Sau đó, chúng tôi hướng dẫn học sinh nhận xét về khoảng cách giữa đường cong và đường tròn để hình thành ý tưởng đường tròn là tiệm cận cong của đường cong (hình 3).



Hình 3. Tiệm cận cong

Thay lời kết luận

Cách trình bày của sách giáo khoa và giới hạn nội dung chương trình có thể khiến học sinh nghĩ rằng đường tiệm cận không có điểm chung với đồ thị hàm số. Quan niệm sai lầm này càng ăn sâu vào học sinh bởi thuật ngữ *tiệm cận* có nghĩa Hán Việt là *dần dần gần nhau*. Khảo sát của chúng tôi cho thấy sự tồn tại của quan niệm sai lầm này ở học sinh lớp 12.

Trong hoạt động 1 và 2 với sự trợ giúp của phần mềm *Graph*, chúng tôi đã giúp học sinh nhận ra đường tiệm cận có thể cắt đồ thị của hàm số, thậm chí cắt tại vô hạn điểm đối với hàm sơ cấp. Hơn nữa, không chỉ đồ thị “cong” mới có tiệm cận mà đồ thị “thẳng” cũng có tiệm cận và chúng có thể trùng nhau trên một khoảng không bị chặn.

Trong hoạt động 3, chúng tôi đã cố gắng gợi mở bản chất của tiệm cận theo quan điểm xấp xỉ và giới thiệu cho học sinh một ví dụ về đường tiệm cận cong.

Các hoạt động mà chúng tôi đã thực hiện đều có thể tổ chức cho mọi trường trung học phổ thông để giúp học sinh hiểu đúng và sâu về khái niệm tiệm cận.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Artigue. (2007). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques : contenus et pratiques. *Actes du séminaire national*, 5-6/02/2007, Paris.
2. Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2016). *Giải tích 12*. NXB Giáo dục Việt Nam.
3. Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2016). *Giải tích 12 nâng cao*. NXB Giáo dục Việt Nam.

TIẾP CẬN CDIO TRONG DẠY HỌC XÁC SUẤT – THỐNG KÊ THEO HƯỚNG RÈN LUYỆN KỸ NĂNG NGHỀ NGHIỆP CHO SINH VIÊN KINH TẾ Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC LẠC HỒNG

Trần Văn Hoan*

Tóm tắt

Xây dựng chuẩn đầu ra với yêu cầu cao theo tiếp cận CDIO là một nội dung đổi mới quan trọng trong công tác giáo dục đào tạo ở trường Đại học Lạc Hồng. Trong bài báo này, dựa trên cơ sở phân tích thực trạng dạy học môn học Xác suất – Thống kê ở trường, tác giả trình bày cách thức áp dụng các tiêu chuẩn CDIO để xây dựng chuẩn đầu ra cho môn Xác suất – Thống kê, đồng thời đề xuất một số biện pháp sư phạm giúp việc dạy học Xác suất – Thống kê hướng đến rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp cho sinh viên khối ngành kinh tế nhằm đáp ứng chuẩn đầu ra đã xây dựng.

Từ khóa: Chuẩn đầu ra, kỹ năng nghề nghiệp, kinh tế, Xác suất, Thống kê, CDIO.

Abstract

Constructing standard learning outcomes with high demands according to the approaching CDIO is an important innovative content in the education and training at Lac Hong university. In this article, based on analysis of the current status of teaching Probability - Statistics subjects at Lac Hong University, the author presents how to apply the CDIO standards to build the standard learning outcomes for Probability - Statistics subjects, and propose some pedagogical measures to help teaching Probability - Statistics towards training the career skills for students' economic sectors to respond standard learning outcomes has been set.

Keywords: Graduation requirements, career skills, economics, Probability, Statistics, CDIO.

1. Mở đầu

Nâng cao chất lượng, đổi mới trong giáo dục đào tạo là tiêu chí sống còn đối với một trường đại học trong thời đại khoa học công nghệ hiện nay. Việc đổi mới giáo dục đào tạo là xu thế tất yếu của thời đại và theo chiến lược phát triển giáo dục được báo cáo tại Đại hội Đảng lần thứ XI “Phát triển giáo dục là quốc sách hàng đầu. Đổi mới căn bản, toàn diện nền giáo dục Việt Nam theo hướng chuẩn hóa, hiện đại hóa, xã hội hóa, dân chủ hóa và hội nhập quốc tế” [3].

Một trong những nội dung đổi mới quan trọng ở Trường Đại học Lạc Hồng thực hiện trong thời gian qua là xây dựng chuẩn đầu ra (CĐR) với yêu cầu cao theo tiếp cận CDIO (Conceive – Design – Implement – Operater) [9]. CĐR thể hiện sự khẳng định về những điều mà một sinh viên cần phải biết, hiểu và có khả năng làm được khi kết thúc chương trình học. Tuy nhiên, một câu hỏi lớn được đặt ra “Dạy cái gì? Và dạy như thế nào? Đối với các môn học thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản và kiến thức đại cương để đảm bảo CĐR?”.

* NCS, Đại học Lạc Hồng

CDIO là cách thức tiếp cận về đào tạo theo định hướng năng lực đầu ra trong các trường đại học. Mô hình này cung cấp cơ sở khoa học và một hệ thống các tiêu chuẩn chất lượng đảm bảo cho các cơ sở giáo dục đại học nhằm giải quyết được 2 vấn đề trọng tâm là: dạy sinh viên điều gì (Dạy cái gì?) và làm thế nào để sinh viên lĩnh hội được tri thức (Dạy như thế nào?). Như vậy các câu hỏi này cũng là mục đích mà chúng ta đã đặt ra ở trên, đó là những vấn đề cần giải quyết đối với giáo dục đại học trên toàn thế giới trong bối cảnh bùng nổ tri thức, công nghiệp hóa, quốc tế hóa và những vấn đề toàn cầu khác.

Hướng vào giải quyết những vấn đề đó, mô hình “CDIO” đã đề cập đến 12 tiêu chuẩn phản ánh toàn diện quá trình đào tạo và quản lý chất lượng đào tạo. Nhưng quan trọng hơn cả, theo tiếp cận CDIO thì CĐR được thiết kế cho các nhóm ngành đào tạo với 4 cấp độ với đủ chi tiết để phát triển chương trình giảng dạy, thiết kế dạy học và đánh giá [4]. Các nhà lý luận CDIO đã xây dựng được một danh sách chi tiết kiến thức và kỹ năng (đề cương “CDIO”) dưới dạng cấu trúc 4 cấp độ bao gồm: Kiến thức và lập luận ngành; kỹ năng và phẩm chất cá nhân và nghề nghiệp; kỹ năng giao tiếp; hình thành ý tưởng, thiết kế, thực hiện và vận hành trong bối cảnh doanh nghiệp, xã hội và môi trường. Cấp độ 2 của đề cương CDIO một lần nữa khẳng định vai trò của các môn học thuộc khối kiến thức cơ bản đối với CĐR của chương trình đào tạo. Qua phân tích có thể thấy rằng, những nghiên cứu theo tiếp cận CDIO cũng nhằm mục đích hướng đến việc dạy học như thế nào để SV khi ra trường đạt được CĐR đã xây dựng. Việc nghiên cứu này phải được thực hiện đối với từng môn học cụ thể trong chương trình đào tạo.

Xác suất - Thống kê (XSTK) là môn học thuộc khối kiến thức cơ bản và ngày nay các kiến thức của môn học này đã thâm nhập vào hầu hết các lĩnh vực và các ngành khoa học khác nhau. Các tri thức về khoa học Xác suất cũng như Thống kê đã được ứng dụng một cách rộng rãi. Hơn nữa, với đặc thù là môn Toán ứng dụng nên bên cạnh việc rèn luyện các kỹ năng cơ bản mang tính toán học như: mô hình hóa, phát hiện và giải quyết vấn đề... thì việc học XSTK còn góp phần rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp gắn với SV ngành kinh tế, như: thu thập, xử lý số liệu thống kê; phân tích, ra quyết định thông qua các bài toán ước lượng, kiểm định; làm việc nhóm... Những kỹ năng này chiếm một phần không nhỏ trong yêu cầu về kỹ năng nghề nghiệp đối với SV khối ngành kinh tế mà CĐR của nhà trường đặt ra. Nhưng hiện nay, cần dạy XSTK như thế nào để có thể đáp ứng CĐR của Trường Đại học Lạc Hồng vẫn còn là câu hỏi chưa có câu trả lời?

Dạy học XSTK luôn là một chủ đề được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Trên thế giới, đối với bậc đại học, Artigue M. (1990) nhấn mạnh việc thiết lập quan hệ giữa XS với TK trong đào tạo ngành kinh tế [2], còn Artaud M. (1993) đã thực hiện một phân tích lịch sử của toán học và kinh tế học để chỉ ra rằng việc tạo ra các tri thức kinh tế thường gắn liền với những cuộc điều tra toán học và cho thấy mối quan hệ mật thiết giữa kinh tế học với toán học, đặc biệt là với lý thuyết XSTK [1]. Ở Việt Nam đã có một số công trình nghiên cứu về dạy học XSTK ở bậc cao đẳng và đại học. Tuy nhiên, đối tượng mà các tác giả quan tâm chủ yếu là vấn đề đào tạo giáo viên toán về mảng XSTK và việc nâng cao hiệu quả dạy học XSTK cho SV theo hướng tăng cường ứng dụng thực tiễn mà chưa đề cập nghiên cứu sâu, cụ thể về dạy học XSTK nhằm đáp ứng CĐR cho SV khối ngành kinh tế ở nước ta.

XSTK là môn học bắt buộc đối với SV khối ngành kinh tế ở trường Đại học Lạc Hồng. XSTK không chỉ là môn học cơ sở của nhiều chuyên ngành mà còn có nhiều ứng dụng trong ngành kinh tế. Tuy nhiên, việc dạy học theo hướng rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp cho SV kinh tế ở Đại học Lạc Hồng chưa được chú trọng. Vì những lý do trên chúng tôi đã thực hiện nghiên cứu “Tiếp cận CDIO trong dạy học XSTK cho SV khối ngành kinh tế ở Trường Đại học Lạc Hồng theo hướng rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp”.

2. Thực trạng dạy học môn học XSTK đối với yêu cầu của CĐR ở trường Đại học Lạc Hồng

Trong [6] tác giả đã chỉ ra rằng, việc dạy học XSTK ở trường còn những hạn chế chủ yếu sau đây:

- Việc rèn luyện các kỹ năng giải quyết vấn đề chưa được thể hiện nhiều trong bài giảng.
- Chưa gắn việc kiểm tra, đánh giá kết quả học tập với nội dung thực tiễn, với yêu cầu nghề nghiệp.
- Chưa ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học một cách có hiệu quả.
- Chưa phát huy khả năng tự học, khả năng làm việc theo nhóm của sinh viên thông qua giải quyết các bài tập nhóm hay dự án.

Như vậy việc dạy học XSTK theo tìm hiểu là chưa đạt yêu cầu đặt ra trong CĐR của nhà trường, cụ thể ở các tiêu chí như:

- Nội dung môn XSTK còn mang tính chung chung, nặng về lý thuyết, chưa áp dụng trực tiếp vào chuyên ngành kinh tế.
- Chưa tổ chức dạy học hướng đến rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp cho SV được quy định trong CĐR.

Cách tiếp cận CDIO đề xuất hai thành phần chính: Các CĐR của chương trình đào tạo và các đề cương để đạt được các CĐR đã nêu. Từ CĐR của CTĐT chúng ta sẽ phải xây dựng một chương trình học tích hợp để bảo đảm đạt được các CĐR đã nêu. Như vậy, để khắc phục các vấn đề trên cần thực hiện các định hướng sau theo tiếp cận CDIO cho môn học XSTK:

- Xây dựng CĐR cho môn XSTK thông qua đề cương môn học theo hướng tích hợp với CĐR của quá trình đào tạo. (trả lời cho câu hỏi “dạy cái gì?” trong nội dung môn XSTK trên cơ sở CĐR của nhà trường đã công bố)
- Cách triển khai và vận hành trong quá trình giảng dạy môn XSTK để đáp ứng được một số CĐR của môn học đã đề xuất. (trả lời cho câu hỏi “dạy như thế nào?”)
- Biên soạn giáo trình môn XSTK cho chuyên ngành kinh tế và hướng đến rèn luyện kỹ năng.

Từ thực trạng trên, chúng tôi nhận thấy rằng việc nghiên cứu “Tiếp cận CDIO trong dạy học XSTK cho SV kinh tế ở Trường Đại học Lạc Hồng theo hướng rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp” là yêu cầu cấp thiết.

3. Xây dựng đề cương môn học XSTK theo tiếp cận CDIO hướng đến đáp ứng CĐR

Theo yếu tố thứ hai của quy trình CDIO về xây dựng khung chương trình và đi đến đề cương môn học chi tiết của một môn học trong chương trình tổng thể, đồng thời tham khảo “Tích hợp chuẩn đầu ra theo cách tiếp cận CDIO vào đề cương môn học trong khung chương trình đào tạo” của Vũ Anh Dũng và Phùng Xuân Nhạ (2011) và “Một số kinh nghiệm xây dựng đề cương môn học theo CDIO” của Hồ Bảo Quốc và Lê Hoài Bắc (2010) về cách thức xây dựng đề cương môn học, chúng tôi đề xuất quy trình xây dựng đề cương môn học XSTK ở trường Đại học Lạc Hồng như sau:

Các bước xây dựng đề cương môn học XSTK theo tiếp cận CDIO

Bước 1: Xác định mục tiêu môn học XSTK.

Bước 2: Lập hộp đen các môn học Input và Output của môn học XSTK.

Môn tiên quyết: Toán Cao Cấp C.

Môn kế thừa: Quy hoạch tuyến tính, Kinh tế lượng, Kinh tế vi mô, Kinh tế vĩ mô, Nguyên lý thống kê kinh tế.

Bước 3: Xác định CĐR môn học XSTK theo 3 phần: G1: Kiến thức khoa học, kỹ thuật; G2: Kỹ năng cá nhân và kỹ năng giao tiếp; G3: Thái độ.

Bước 4: Xác định sự tương quan giữa CĐR của môn học và CĐR của chương trình đào tạo theo 3 tiêu chí: Sử dụng (Utilize), dạy (Teach), giới thiệu (Introduction).

Bước 5: Xác định phương pháp giảng dạy cho học phần XSTK.

Sử dụng kết hợp các phương pháp: thuyết giảng, trình chiếu, dạy học dựa trên vấn đề, động não, chia sẻ theo cặp, làm việc theo nhóm...

4. Một số biện pháp dạy học XSTK cho SV khối ngành kinh tế hướng đến rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp theo tiếp cận CDIO

Biện pháp 1. Dạy học các nội dung kiến thức mới thông qua xây dựng các bài toán mở đầu liên quan đến kinh tế.

Biện pháp 2. Tăng cường các ví dụ và bài tập theo hướng vận dụng XSTK giải quyết các vấn đề cụ thể đặt ra trong kinh tế.

Biện pháp 3. Rèn luyện cho sinh viên khả năng biểu diễn, xử lý số liệu và hình thành các biểu tượng thống kê.

Biện pháp 4. Hướng dẫn sinh viên sử dụng phần mềm Excel giải các bài toán thống kê.

Biện pháp 5. Rèn luyện kỹ năng làm việc nhóm, kỹ năng thuyết trình cho SV thông qua hệ thống bài tập lớn, bài tập về nhà.

5. Kết luận

Như vậy việc nghiên cứu tiếp cận CDIO trong dạy học môn XSTK đã bước đầu định hướng giảng dạy môn học cho SV khối ngành kinh tế ở trường Đại học Lạc Hồng.

Những kết quả bước đầu cho thấy SV học XSTK một cách tích cực hơn, đặc biệt khả năng ứng dụng XSTK vào giải quyết các vấn đề thực tế nghề nghiệp được nâng lên rõ rệt. Điều đó giúp chúng tôi có căn cứ hoàn thiện, đồng bộ hóa mục tiêu, nội dung và phương pháp giảng dạy môn học gắn với mục tiêu đào tạo nghề hướng đến đáp ứng CĐR đã xây dựng theo phương pháp tiếp cận CDIO.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique -Une étude exploratoire*. Thèse pour l'obtention du grade de docteur de l'Université d'Aix-Marseille II. Marseille: IREM d'Aix-Marseille.
2. Artigue, M. (1990). *Ingénierie didactique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 9, n^o3, pp. 281-308, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
3. Chính phủ (2012). *Chiến lược phát triển giáo dục 2011 – 2020*, Quyết định số 711/QĐ – TTg ngày 16 – 06 – 2012, Hà Nội.
4. Đoàn Thị Minh Trinh, Nguyễn Quốc Chính, Nguyễn Hữu Lộc, Phạm Công Bằng, Peter J. Ray, Hồ Tấn Nhựt (2012). *Thiết kế và phát triển chương trình đào tạo đáp ứng chuẩn đầu ra*, NXB ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh.
5. Hồ Bảo Quốc, Lê Hoài Bắc (2010). *Một số kinh nghiệm xây dựng đề cương môn học theo CDIO*, Hội thảo CDIO, Đại học Quốc Gia TP HCM.
6. Trần Văn Hoan (2014). Thực trạng dạy học Xác suất – Thống kê so với chuẩn đầu ra ở trường Đại học Lạc Hồng, *Tạp chí khoa học trường Đại học Sư Phạm TP HCM*, số 59(93), 165-169.
7. Hoan Van Tran, Hang Thuy Nguyen (2016). Teaching Probability – Statistics towards Training Occupational Skills for Economic Majored Students – Case Study at Lac Hong University Viet Nam, *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, Vol 15, No. 12, 130-144, November.
8. Hoan Van Tran, Hang Thuy Nguyen (2017). Building integrated situations in the teaching of Probability and Statistics oriented to professional skills for economic majored students – case study at Lac Hong university Viet Nam, *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, Vol 16, No. 4, 16-30, April.
9. Trường Đại học Lạc Hồng (2015). *Báo cáo thực hiện quy chế công khai của Trường Đại học Lạc Hồng năm học 2015 – 2016*.
10. Vũ Anh Dũng, Phùng Xuân Nhạ (2011). *Tích hợp chuẩn đầu ra theo cách tiếp cận CDIO vào đề cương môn học trong khung chương trình đào tạo*, Chuyên san Kinh tế và Kinh doanh, Tập 27, Số 4.

SỰ PHỐI HỢP GIỮA SUY LUẬN QUY NẠP VÀ SUY DIỄN TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ

Vương Vĩnh Phát*

Tóm tắt

Trong logic học, chúng ta thường nói đến hai phương pháp suy luận là suy luận quy nạp và suy luận diễn dịch (suy diễn). Suy luận quy nạp thường có kết thúc mở và có tính chất khám phá, đặc biệt là khi bắt đầu. Còn suy diễn liên quan đến việc kiểm tra hoặc xác nhận giả thuyết. Bài báo này trình bày một số khái niệm bao gồm quy nạp, suy luận quy nạp, suy diễn và sự phối hợp giữa suy luận quy nạp và suy diễn trong dạy học hình học ở trường Trung học cơ sở.

Từ khóa: hình học, suy diễn, suy luận quy nạp.

Abstract

In logic, we often refer to the two broad methods of reasoning as the deductive and inductive approaches. Inductive reasoning is more open-ended and exploratory, especially at the beginning. Deductive reasoning is concerned with testing or confirming hypotheses. This article presents some concepts including induction, inductive reasoning, deductive reasoning and the combination of the deductive and inductive approaches to the teaching Geometry at the secondary school.

Key words: geometry, deductive reasoning, inductive reasoning.

1. Đặt vấn đề nghiên cứu

Toán học có thể được xem xét theo hai phương diện: khi trình bày thì đó là một khoa học suy luận, khi hình thành thì đó là khoa học thực nghiệm, quy nạp và dự đoán. Giáo dục toán học ở trường phổ thông cần phải thể hiện cả hai phương diện đó. Nhà toán học đồng thời là nhà sư phạm Polya (1995) đã viết: “Nếu việc dạy toán phản ánh mức độ nào đó việc hình thành toán học như thế nào, thì trong việc giảng dạy đó phải dành chỗ cho dự đoán, suy luận có lí”. (p.6)

Tuy suy diễn đóng vai trò chủ yếu trong suy luận toán học, nhưng vai trò của quy nạp cũng không phải là không quan trọng. Vai trò của quy nạp thể hiện trong khi xây dựng khái niệm mới, chọn lọc các tiên đề trước khi chứng minh một định lí, có thể nói rằng những lúc các nhà toán học dùng phương pháp quy nạp là những lúc quan trọng trong sự phát triển toán học. (Phạm Văn Hoàn, 1981, p.22)

Tuy nhiên trong thực tiễn dạy học, hai phương diện trình bày và hình thành chưa được chú ý ngang nhau. Phương diện hình thành tri thức toán học dễ bị lãng quên. Cách dạy - học toán hiện nay ở nhà trường phổ thông (và thậm chí cả ở đại học nữa) giống như việc thầy giáo dẫn học sinh (HS) đi tham quan một lâu đài đã xây dựng xong từ lâu (lâu đài toán học). Ta sẽ gọi cách dạy - học đó là cách dạy - học “tĩnh”. Có thể chẳng hình dung ra cách dạy - học mà ta sẽ gọi là “động”, trong đó thầy giáo hướng dẫn HS tham gia thiết kế rồi thi công lâu đài được không? (Nguyễn Cảnh Toàn, 2003, p.5-6)

* NCS, Đại học An Giang

Mặc dù vậy trên thực tế dạy học, chúng ta chỉ mới chú trọng đến suy diễn, suy luận chứng minh, chứng minh mà chưa chú ý đến quy nạp, đến khả năng tư duy độc lập sáng tạo, phát hiện ra cái mới của học sinh. Bài báo này đề cập đến một số khái niệm bao gồm: quy nạp, suy luận quy nạp, suy diễn và sự phối hợp giữa quy nạp và suy diễn trong dạy học hình học ở trường Trung học Cơ sở (THCS) nhằm giúp học sinh tìm tòi, khám phá kiến thức mới.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

a) Quy nạp: Mọi lập luận chuyển từ các khẳng định riêng tới các khẳng định chung mà tính đúng đắn của nó suy từ tính đúng đắn của các khẳng định riêng đều được gọi là quy nạp.

b) Suy luận, suy luận diễn dịch, suy luận quy nạp:

Suy luận là hình thức của tư duy nhờ đó rút ra phán đoán mới từ một hay nhiều phán đoán theo các quy tắc logic xác định.

Căn cứ vào cách thức lập luận, suy luận được chia thành suy luận diễn dịch (suy diễn) và suy luận quy nạp (quy nạp). Suy diễn là suy luận trong đó lập luận từ cái chung đến cái riêng, cái đơn nhất. Quy nạp là suy luận trong đó lập luận từ cái riêng, cái đơn nhất đến cái chung. (Vương Tất Đạt, 2007, p.125)

Theo định nghĩa cổ điển của Peirce, mục đích của suy luận là thông qua việc khảo sát những điều đã biết mà phát hiện ra những điều còn chưa biết.

Suy luận toán học sẽ có định nghĩa hẹp hơn, điều quan trọng là cần phải chú ý rằng suy luận toán học sử dụng cả những công cụ khác với logic hình thức: suy luận bằng truy chứng, và cả phép tính đại số là những phương tiện điển hình trong toán học để đạt tới mục đích mà Peirce đã xác định. (Arsac, 1995, p.11)

c) Tiến trình: Thực nghiệm/Suy luận trong dạy học định lí ở trường phổ thông:

Các bước của tiến trình Thực nghiệm/Suy luận gồm:

Bước 1: Nghiên cứu thực nghiệm qua các ví dụ, các đối tượng cụ thể (số, hình,...).

Bước 2: Phỏng đoán phát hiện một mệnh đề.

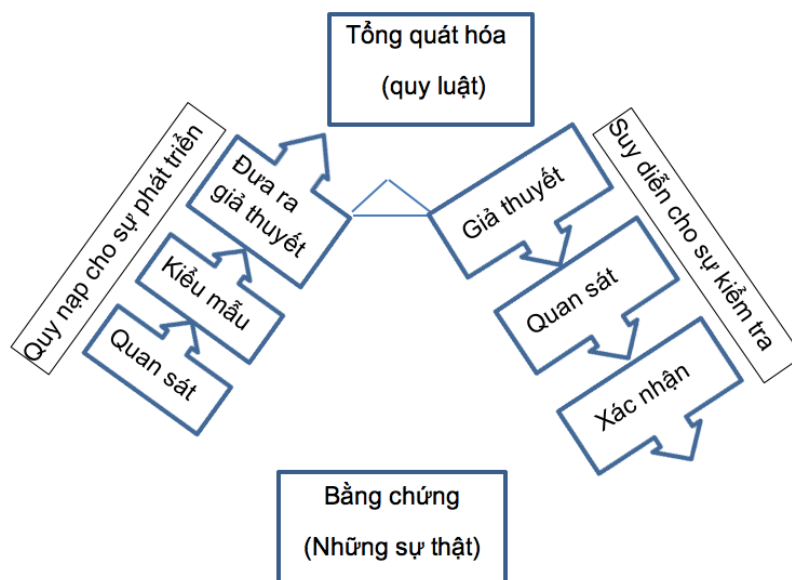
Bước 3: Bác bỏ hay khẳng định phỏng đoán.

Bước 4: Phát biểu định lí (nếu mệnh đề phỏng đoán được chứng minh là đúng).

Bước 5: Củng cố và vận dụng định lí (Lê Văn Tiến, 2016, p.91-92).

2.2. Sự phối hợp giữa quy nạp và suy diễn trong dạy học hình học ở trường THCS:

Oldroyd (1986) miêu tả mối liên hệ giữa quy nạp và suy diễn như “Hình vòng cung của kiến thức” (Banner, 2000, p.184).



Hình 1: Mối liên hệ giữa quy nạp và suy di

Hình vòng cung bắt đầu với những kinh nghiệm hoặc bằng chứng được giải thích. Một cách tổng quát hình vòng cung đi lên thông qua quy nạp về phía câu phát biểu tổng quát hóa mà điều này dựa trên những bằng chứng. Theo hình vòng cung, các nhà khoa học áp dụng tiêu chuẩn cơ bản làm cho thích hợp. Lý thuyết được giải thích phải thích hợp với bằng chứng thích hợp (Comas, 2014, p.31).

Vai trò của quy nạp và suy diễn là trung tâm của khoa học tự nhiên nhưng đặc thù của khoa học giáo dục tập trung trên quy nạp như công cụ phát sinh ra kiến thức trong khi suy diễn hiếm khi được đề cập. Học sinh nên được cho cơ hội sử dụng cả hai kiểu suy luận này như là họ thám hiểm “Hình vòng cung của kiến thức”.

Dựa vào tiến trình: Thực nghiệm / Suy luận trong dạy học định lí của tác giả Lê Văn Tiến, chúng tôi đưa ra các bước dạy học hình học thông qua việc vận dụng phối hợp giữa quy nạp và suy diễn như sau:

Bước 1: Dùng suy luận quy nạp để dự đoán kết quả.

Bước 2: Cho học sinh tranh luận khoa học để nêu lên các giả thuyết.

Bước 3: Dùng suy diễn để chứng minh hoặc bác bỏ các giả thuyết.

2.3. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ: Dạy học định lí: “Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° ” (Phan Đức Chính, 2014, p. 88).

Bước 1: Dùng suy luận quy nạp để dự đoán kết quả.

Pha 1:

GV: Mỗi học sinh vẽ một đường tròn và một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn. Dùng thước đo góc, các em hãy đo các góc $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$ và cho biết mối quan hệ của chúng? (Hình 2)

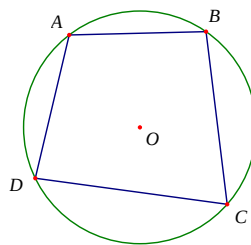
HS: Học sinh có thể trả lời:

$$\widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = 360^\circ$$

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}$$

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$$



Pha 2:

GV: Mỗi học sinh vẽ một đường tròn và một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn. Không dùng thước đo góc, hãy dùng kéo cắt các góc A, B, C, D và cho biết mối quan hệ của chúng?

HS: Học sinh có thể trả lời: $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = 360^\circ$, $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ hay $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$.

Bước 2: Cho học sinh tranh luận khoa học để nêu lên các giả thuyết.

Pha 3:

GV: Chia lớp thành các nhóm (từ 4-5 học sinh). Cho các em tranh luận về các kết quả dự đoán. Sau đó, giáo viên gọi đại diện vài nhóm học sinh phát biểu giả thuyết.

HS: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng hai góc đối diện bằng 1800.

GV: Các em hãy chỉ ra một chứng minh để giải thích giả thuyết được nêu ra là đúng.

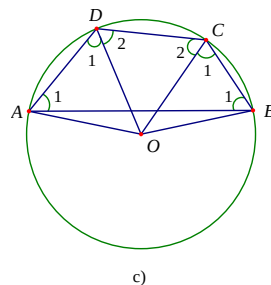
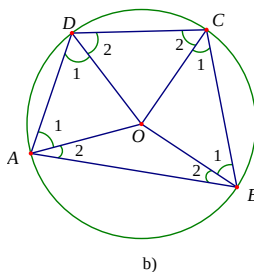
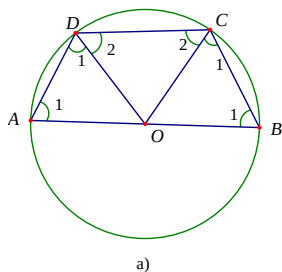
Bước 3: Dùng suy diễn để chứng minh hoặc bác bỏ các giả thuyết.

Pha 4: Cho đường tròn tâm O, bán kính R và tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

HS: Chiến lược S1: Dựa vào số đo cung bị chắn. (Hình 2)

Ta có: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\text{sđ cung BCD} + \frac{1}{2}\text{sđ cung BAD} = 180^\circ$.

Chiến lược S2: Chứng minh: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}$.



Trường hợp 1: Tâm O nằm trên cạnh của tứ giác ABCD (Hình 3a).

Ta có: Các $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ cân tại O nên $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{C_2} = \widehat{D_2}$, $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$.

Suy ra: $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \widehat{A_1} = \widehat{B_1} + \widehat{D_2} + \widehat{D_1}$. Suy ra: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}$.

Mặt khác: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Trường hợp 2: Tâm O nằm trong tứ giác ABCD (Hình 3b).

Ta có: Các $\triangle OAD, \triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD$ cân tại O nên

$$\widehat{A_1} = \widehat{D_1}, \widehat{A_2} = \widehat{B_2}, \widehat{C_1} = \widehat{B_1}, \widehat{C_2} = \widehat{D_2}.$$

Suy ra: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{D_1} + \widehat{D_2}$. Suy ra: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}$.

Mặt khác: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Trường hợp 3: Tâm O nằm ngoài tứ giác ABCD (Hình 3c).

Ta có: $\widehat{DAB} = \widehat{OAD} - \widehat{OAB} = \widehat{D_1} - \widehat{OBA}$ và $\widehat{BCD} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{OBA} + \widehat{B_1} + \widehat{D_2}$.

Nên $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{B_1} + \widehat{D_1} + \widehat{D_2}$. Vậy $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}$.

Mặt khác: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

3. Kết luận

Việc thiết kế tình huống dạy học như trên giúp cho học sinh có cơ hội phát triển khả năng tranh luận khoa học trong một lớp học Toán, điều này thúc đẩy các giao tiếp toán học của học sinh, đồng thời giúp học sinh khám phá ra các chân lý toán học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. George Polya (Bản dịch tiếng Việt). (1995). *Toán học và những suy luận có lí*. Hồ Chí Minh: NXB Giáo dục.
2. Gilbert Arsac, Gisete Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard, Michel Mante. (1995). (Đoàn Hữu Hải, Lê Đình Phi, Nguyễn Thành Tâm dịch). *Nhập môn về lập luận suy diễn ở trường Trung học cơ sở*. Hồ Chí Minh: NXB GD.
3. Lê Văn Tiến. (2016). *Phương pháp dạy học môn Toán*. Hồ Chí Minh: NXB Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.
4. Nguyễn Cảnh Toàn. (2003). *Tập cho học sinh giỏi toán làm quen dần với nghiên cứu toán học*. Hà Nội: NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
5. Phạm Văn Hoàn. (1981). *Giáo dục học môn Toán*. Hà Nội: NXB Giáo dục.
6. Phan Đức Chính (tổng chủ biên). (2014). *Sách giáo khoa Toán 9, tập hai*. Hà Nội: NXB Giáo dục.
7. Vương Tất Đạt. (2007). *Logic học đại cương*. Hà Nội: NXB Thế Giới.

Tiếng Anh

8. Barnes, H. M. (2000). *Stages of thought: The co-evolution of religious thought and science*. New York: Oxford University Press.
9. Oldroyd, D. R. (1986). *The arch of knowledge: An introductory study of the history of the philosophy and methodology of science*. New York: Methuen.
10. William F. McComas. (2014). *The language of science education. An expanded glossary of key terms and concepts in science teaching and learning*. Taipei: Sense publishers Rotterdam/ Boston/Taipei.

XÂY DỰNG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LỜI VĂN NHẪM PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TOÁN VÀ KỸ NĂNG SỐNG CỦA HỌC SINH TIỂU HỌC

Nguyễn Văn Hồng*

Tóm tắt

Trong dạy học toán ở Tiểu học, dạy học giải toán có lời văn là quan trọng nhất vì đây là nội dung xuyên suốt chương trình Toán tiểu học. Để vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn cuộc sống và phát triển năng lực sáng tạo tốt nhất cho học sinh tiểu học thì sinh viên - những người thầy giáo tương lai cần phải học tập, rèn luyện tay nghề một cách nghiêm túc. Với mỗi bài toán đã cho, yêu cầu học sinh đưa ra những bài toán tương tự, giải bài toán bằng nhiều cách hay ứng dụng kiến thức vào thực tiễn cuộc sống một cách sáng tạo là ưu thế đặc biệt của nội dung “dạy học giải toán có lời văn” ở Tiểu học.

Từ khóa: dạy học toán ở Tiểu học, bài toán có lời văn.

Abstract

Word mathematical problems play the most important role in teaching mathematics for pupils at primary schools because this is the main content of primary mathematics. To apply mathematical knowledge in real life contexts as well as to develop primary pupils' creativity, students. With a given mathematical problem, pupils are asked to make a similar one, to give different solutions to the problem, or to apply their mathematical knowledge in daily contexts creatively. All of these are outstanding advantages of teaching word mathematical problems at primary schools.

Keywords: Teaching mathematics in primary school, words problems.

1. Phương pháp dạy học bài toán có lời văn

Để dạy học giải toán có lời văn, giáo viên cần xây dựng hệ thống câu hỏi định hướng, dẫn dắt học sinh tìm hiểu bài toán, giải bài toán và phát triển bài toán.

Phương pháp dạy học toán Tiểu học cho là giáo viên tổ chức, hướng dẫn và làm các thao tác mẫu ban đầu, học sinh tự làm – học và cùng nhau đánh giá kết quả, giúp các em tự tìm kiếm tri thức.

Theo Phương pháp dạy học Toán ở Tiểu học, nội dung “Dạy học giải toán có lời văn” thì quy trình giải toán theo Polya làm cho học sinh nắm được các bước cần thiết của quá trình giải toán và rèn luyện kỹ năng thực hiện các bước đó một cách thành thạo.

Chúng tôi nhắc lại quy trình giải toán theo Polya gồm 4 bước:

Bước 1: Tìm hiểu kỹ đề bài.

- Bài toán hỏi gì? (cái phải tìm).
- Bài toán cho biết những gì? (cái đã cho).
- Mối quan hệ giữa cái phải tìm và cái đã cho (có thể dùng sơ đồ, hình vẽ).

* ThS, Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận

Bước 2: Lập kế hoạch giải

- Dùng phương pháp phân tích để tìm lời giải: Câu hỏi định hướng, câu hỏi dẫn dắt.
- Dùng phương pháp tổng hợp để trình bày lời giải.

Bước 3: Thực hiện kế hoạch giải

Bước 4: Kiểm tra lời giải và đánh giá cách giải

- Thử lại: Kiểm tra về tính toán và thuật toán.
- Tìm cách giải khác.
- Khai thác, phát triển bài toán.

Đối tượng nghiên cứu của Didactic Toán là Thầy giáo – Học sinh – Tri thức và sự tác động qua lại giữa ba yếu tố này.

Thầy giáo được xem xét trên phương diện nghề nghiệp và trong mối quan hệ của Thầy giáo – Học sinh – Tri thức.

Didactic Toán cho dạy học là cách truyền đạt tri thức Toán để học sinh nắm được nó.

Học sinh được nghiên cứu trên phương diện kiến thức của họ và mối quan hệ mà họ duy trì với tri thức Toán học.

Học bằng quan sát và bắt chước có nghĩa là sử dụng kinh nghiệm của người khác, quan sát ứng xử của người đó và làm theo như thế.

Như vậy, “học là một quá trình năng động trong đó người học đóng vai trò chủ động” (trang 53 - Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán).

Tri thức (knowledge): Bao gồm những dữ kiện, thông tin, sự mô tả, hay kỹ năng có được nhờ trải nghiệm hay thông qua giáo dục.

Thầy giáo là người truyền cảm hứng cho sinh viên khám phá tri thức. Kỹ năng truyền cảm hứng cho người khác là cả một “nghệ thuật”, nó phụ thuộc rất nhiều vào năng lực sư phạm của người thầy và nội dung bài giảng.

Chúng ta sẽ thực hiện hoạt động dạy học và truyền cảm hứng cho sinh viên qua một số bài toán.

2. Các bài toán rèn luyện kỹ năng sống

Ví dụ 1: Đi qua hầm tối

An, Bình, Châu, Danh muốn đi qua một cái hầm tối. Họ có một chiếc đèn pin còn đủ sáng được trong vòng 12 phút. An có thể đi qua hầm trong 1 phút, Bình trong 2 phút, Châu trong 4 phút và Danh trong 5 phút. Tuy nhiên, hầm rất hẹp, chỉ có thể đi cùng một lúc 2 người.

Họ đều rất sợ bóng tối nên không thể đi qua hầm mà không có đèn pin. Hầm cũng nghèo nàn không thể đứng một chỗ để rọi đèn pin được.

Hỏi các bạn phải làm thế nào để tất cả cùng qua được hầm trước khi đèn pin hết sáng?

Phân tích:

Người đi nhanh phải đi với người đi nhanh; người đi chậm phải đi với người đi chậm. Người quay lại phải là người đi nhanh.

Giải:

Cách 1.

Lần 1: Cho An và Bình qua, hết 2 phút. An quay về hết 1 phút.

Lần 2: Cho Châu và Danh qua, hết 5 phút. Bình quay về hết 2 phút.

Lần 3: An và Bình qua, hết 2 phút.

Tổng cộng hết $3 + 7 + 2 = 12$ phút.

Cách 2.

Lời giải tối ưu: Nối đuôi nhau đi qua hầm với vận tốc của người đi chậm nhất.

Liên hệ kỹ năng sống:

Linh hoạt trong suy nghĩ; tạo ra sự khác biệt và độc đáo mới có thể dẫn tới thành công.

Ví dụ 2:

Nếu dùng 5 máy trong 5 phút để tạo nên 5 thiết bị, thì 100 cái máy sẽ mất bao lâu để tạo 100 thiết bị?

Phân tích:

Các con số đều gần giống nhau:

5 máy – 5 phút – 5 thiết bị.

100 máy - ? phút – 100 thiết bị.

Chia nhóm: $100 (\text{máy}) = 5 (\text{máy}) \times 20$; $100 (\text{thiết bị}) = 5 (\text{thiết bị}) \times 20$

Thời gian: các máy cùng hoạt động.

Giải:

5 máy (cùng hoạt động) tạo nên 5 thiết bị (sản phẩm) trong khoảng thời gian 5 phút

100 máy (cùng hoạt động) tạo nên 100 thiết bị (sản phẩm) cũng trong khoảng thời gian 5 phút.

Chú ý: Các máy cùng hoạt động trong 5 phút.

Đáp số: 5 phút.

Rèn luyện kỹ năng sống:

Chúng ta thường tìm tới những loại kết nối cơ bản để trả lời câu hỏi và kết nối của câu hỏi trên chính là các số được đưa ra khá giống nhau, nếu đổi sang thành 5 máy trong 4 phút có lẽ mọi thứ sẽ dễ dàng hơn.

3. Bài toán gần gũi với cuộc sống của học sinh

Khái niệm: Bài toán cuộc sống là bài toán gắn liền với mọi chủ đề, câu chuyện trong cuộc sống. Tìm ra các cách giải quyết những vấn đề của cuộc sống mà có Toán “nhúng” vào thì sẽ chính xác hơn, hiệu quả hơn rất nhiều.

Bài toán cuộc sống sẽ có lời giải đúng, đúng hơn, đúng nhất. Tìm ra lời giải tối ưu (đúng nhất) chính là nhiệm vụ của toán học, nhằm phát triển tư duy sáng tạo cho sinh viên.

Giải bài toán cuộc sống nhằm hình thành và phát triển năng lực Toán học cho sinh viên ngành Giáo dục Tiểu học là đặc biệt quan trọng.

Ví dụ 3: Một hộp sữa Vinamilk có giá là 200.000 đồng, nhưng năm hộp sữa Vinamilk lại có giá là 800.000 đồng. Hỏi 10 hộp sữa Vinamilk có giá là bao nhiêu tiền?

Phân tích:

Cái đã cho: 01 hộp sữa giá 200.000 đồng, nhưng 05 hộp sữa chỉ có giá 800.000 đồng

Cái phải tìm: 10 hộp sữa giá bao nhiêu?

Cần hiểu đúng: bán sỉ và bán lẻ.

Giải:

Nếu theo logic của bài toán thì 10 hộp sữa giá 1.600.000 đồng (lớn nhất).

Những kiến thức thực tế:

Kinh tế thị trường nên 05 hộp sữa mới có giá 800.000 đồng. Mua bán theo “lô” có thể giá còn rẻ hơn.

Ví dụ 4 (toán lớp 3):

Một đàn vịt có 30 con. Mẹ bán đi một số con vịt. Hỏi đàn vịt còn lại bao nhiêu con?

1/ Giải và hướng dẫn học sinh giải.

2/ Tính hệ thống của chương trình toán Tiểu học được thể hiện trong bài toán trên như thế nào?

Phân tích:

Ở Tiểu học khái niệm hàm số đang được “ẩn tàng”.

Giải:

Số vịt còn lại phụ thuộc vào số vịt đã bán đi. Số vịt bán đi “biến đổi” nên số vịt còn lại biến đổi theo. Bước đầu hình thành ý niệm về hàm số.

Nếu bán đi 12 con thì số vịt còn lại là $30 - 12 = 18$ (con).

Nếu bán đi 16 con thì số vịt còn lại là $30 - 16 = 14$ (con).

Tổng quát: $30 - x$ (con).

Khái niệm hàm số là “sợi chỉ đỏ” xuyên suốt chương trình toán ở trường phổ thông. Ở Tiểu học, khái niệm hàm số được nêu dưới dạng ẩn tàng (lớp 2, 3); cụ thể hơn thông qua “đại lượng tỷ lệ thuận, tỷ lệ nghịch” (lớp 4, 5). Ở Trung học cơ sở mới chính thức dạy định nghĩa hàm số (lớp 7) bằng cách kế thừa “đại lượng tỷ lệ thuận, tỷ lệ nghịch”. Sang Trung học phổ thông, lại dạy định nghĩa hàm số theo hướng “hiện đại – khoa học” hơn.

Ví dụ 5:

Một con thuyền xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B hết 3 giờ; ngược dòng từ B về A hết 5 giờ. Hỏi cùm bèo trôi từ A về B hết mấy giờ?

1/ Giải bài toán bằng nhiều cách.

2/ Phát triển các thao tác tư duy cho học sinh khi hướng dẫn học sinh giải bài toán.

Bài giải:

1/ Giải bài toán bằng nhiều cách.

Phân tích:

Toán chuyển động nhưng không cho vận tốc.

Chú ý: $S = \text{const}$; $V_n = V_b$.

Giải:

Cách 1 : Phương pháp dùng chữ thay số.

Cách 2 : Phương pháp sơ đồ đoạn thẳng.

Ta thấy : $S = \text{const}$; $V_n = V_b$.

Thời gian và vận tốc tỷ lệ nghịch; mà $V_x - V_{ng} = 2V_b$.

Nên V_b là một phần.

Mà V_x chiếm 5 phần ứng với 3 giờ suy ra V_b chiếm 1 phần ứng với $3 \times 5 = 15$ giờ.

Thử lại.

Đáp số: 15 giờ.

4. Kết luận

Dạy cho học sinh tự mình khám phá tri thức mới, rèn luyện kỹ năng giải các bài toán gần gũi với cuộc sống để hình thành và phát triển năng lực Toán học là yêu cầu cấp thiết hiện nay. Giáo trình, tài liệu Toán ở các trường Sư phạm cần phải thay đổi theo hướng “Hoạt động hóa người học”, cụ thể là chuyển dần các bài toán nhà trường sang các bài toán cuộc sống. Chú trọng dạy cho sinh viên “Dạy học giải toán có lời văn” là cấp thiết và cực kỳ quan trọng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Annie Bessot, Claude Comiti, Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2009), *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

2. Vũ Quốc Chung (chủ biên) (2007), *Phương pháp dạy học toán ở Tiểu học*, NXB Giáo dục.

3. Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học đại cương môn toán*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

4. Phạm Gia Đức (2006), *Phương pháp dạy học các nội dung môn toán*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

CẢM ƠN ĐƠN VỊ TÀI TRỢ



VINSCHOOL
Nơi ươm mầm tinh hoa
Hệ thống giáo dục VINSCHOOL



Hệ thống trường quốc tế ngôi sao nhỏ



BITEX

Công ty Cổ phần Xuất nhập khẩu Bình Tây



Vùng Auvergne-Rhône-Alpes



Trung tâm nghiên cứu LIG Đại học Grenoble Alpes

